

Nom :

Mathématiques approfondies

Cours ECG 2

Partie VI

Chapitres

- 11. Introduction au calcul différentiel
- 12. Vecteurs aléatoires
- 13. Compléments sur les variables aléatoires à densité

FIN DU SEMESTRE I



Lycée Saint Louis 2025/2026

Introduction au calcul différentiel

The beauty of mathematics only shows itself to more patient followers.

MARYAM MIRZAKHANI

Mathématicienne iranienne ayant reçu la médaille Fields en 2014

1 Rappels : dérivation des fonctions d'une variable réelle

1.1 Définition du nombre dérivé et interprétation géométrique

Définition 1 (nombre dérivé, fonction dérivée)

Soient I , un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

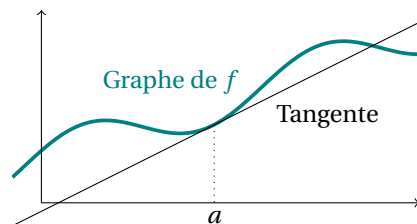
- f est **dérivable en** a si le quotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite *finie* en a . Si cette dernière existe, elle est unique et notée $f'(a)$.
- f est **dérivable sur** I si elle est dérivable pour tout réel de I . Ainsi, on définit la fonction dérivée par

$$f' : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ a & \mapsto f'(a). \end{cases}$$

- Graphiquement, f est dérivable en a s'il existe une tangente à la courbe. L'équation de la tangente est alors

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

- Le terme $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le taux d'accroissement de f entre a et x .



1.2 Les théorèmes

Théorème 2 (développement limité à l'ordre 1)

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Les énoncés suivants sont équivalents.

- i) La fonction f est dérivable en a et $\lambda = f'(a)$.
- ii) f admet un développement limité à l'ordre 1 en a .
C'est-à-dire, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) = f(a) + \lambda(x - a) + o_a(x - a)$.

Remarque. On peut réécrire le développement limité sous la forme : il existe une fonction ε définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 telle que pour tout $h \in \mathcal{V}$,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

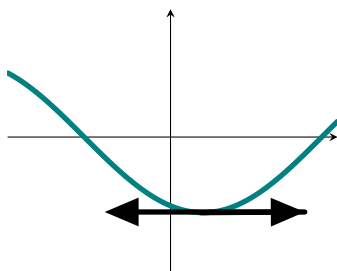
Théorème 3 (extremum - condition nécessaire)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle.

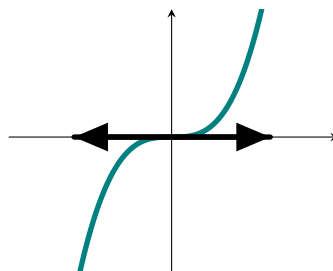
Si
 $\rightarrow f$ admet un extremum local en a .
 $\rightarrow f$ est dérivable en a .
 $\rightarrow a$ n'est pas un des bords de I ,
alors $f'(a) = 0$.

Vocabulaire. On dit que $A = (a, f(a))$ est un point critique de f lorsque $f'(a) = 0$.

Remarque. La réciproque est fautive : tout point critique ne donne pas un extremum. La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$ en 0 fournit un contre-exemple.



Point critique et minimum



Point critique sans extremum

2

Dérivées partielles et gradient

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on considère $f_{k,a}$ définie par

$$f_{k,a} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_n). \end{cases}$$

L'application $f_{k,a}$ est la k -ième application partielle de f en a . C'est une fonction d'une variable réelle, on peut donc utiliser les définitions et résultats de première année.

Définition 4 (dérivée partielle)

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^n$.

On dit que la fonction f admet une **dérivée partielle d'ordre k en a** si l'application partielle $f_{k,a}$ est dérivable en a_k . On note alors $\partial_k f(a)$ le nombre dérivée $f'_{k,a}(a)$. Autrement dit, la limite suivante existe et

$$\partial_k f(a) = \lim_{t \rightarrow a_k} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(a)}{t - a_k}.$$

Remarque. Si f admet pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, une dérivée partielle en a , on peut définir la i -ème dérivée partielle par

$$\partial_i f : a \in \mathbb{R}^n \mapsto \partial_i f(a).$$

C'est encore une fonction de n variables réelles.

Exercice 1



❖ Préciser les dérivées partielles des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ suivantes.

$$f(x, y) = x^2 \exp(xy), \quad g(x, y) = \ln\left(1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right), \quad h(x, y) = \sin(x)^2 + \cos(y)^2,$$

$$i(x, y, z) = x^2 y^2 z^2, \quad j(x, y, z) = \arctan(xyz).$$

On pourra utiliser les symétries pour simplifier certains calculs.

Définition 5 (gradient)

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tels que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, f admet une i -ème dérivée partielle en a . On définit le **gradient** de f en a , noté $\nabla f(a)$, par le vecteur de $\mathbb{R}^n$

$$\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a)).$$

3**Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$** **3.1 Définitions, exemples et règles de calculs****Définition 6** (fonctions de classe $\mathcal{C}^1$)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que f est de **classe $\mathcal{C}^1$** sur $\mathbb{R}^n$ si pour toutes les dérivées partielles existent et sont continues sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple. Les dérivées partielles d'une fonction polynomiale sont encore des fonctions polynomiales, elles sont donc continues sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi, les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.



Attention. La condition $\mathcal{C}^1$ est une condition plus restrictive que la simple existence des dérivées partielles.

Proposition 7 (linéarité, produit et quotient de fonctions $\mathcal{C}^1$)

Soient f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Alors

- Pour tout réel λ , λf est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
- La somme $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
- Le produit $f \cdot g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
- Si de plus, la fonction g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^n$, alors f/g est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple. Toute fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Pour rappel, une fonction est dite rationnelle si elle peut s'écrire comme le quotient de deux fonctions polynomiales.

Proposition 8 (composition de fonctions $\mathcal{C}^1$)

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, une partie I de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- Si**
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \in I$.
 - La fonction de plusieurs variables f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
 - La fonction d'une variable φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Alors la composée $\varphi \circ f$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple. Justifions que $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x \ln(1 + x^2 + y^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $1 + x^2 + y^2 \in \mathbb{R}_*^+$.
- $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1 + x^2 + y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale.
- La fonction logarithme $\ln : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

Par composition, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1 + x^2 + y^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

De plus, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Par produit, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

3.2 Développement limité d'ordre 1

Condition d'existence et exemples

Rappelons la définition de la norme euclidienne et du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

$$\forall x = (x_i) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall y = (y_i) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \text{et} \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Dans la suite, pour une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, la notation $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ signifie que ε est continue en $0_{\mathbb{R}^n}$ avec $\varepsilon(0_{\mathbb{R}^n}) = 0$. C'est-à-dire

$$\forall \eta \in \mathbb{R}_*^+, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_*^+, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \quad \left(\|h\| \leq \alpha \Rightarrow \|\varepsilon(h)\| \leq \eta \right).$$

Théorème 9 (développement limité d'ordre 1)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Alors pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, f admet en a un **unique développement limité à l'ordre 1**.

C'est-à-dire, il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour $h \in \mathbb{R}^n$,

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \|h\| \varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Exercice 2



Donner le développement limité de $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1 + x^2 + y^2)$ en $(2, 1)$ et $g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|^2$ en tout point $a \in \mathbb{R}^n$.

Remarques.

- On peut reformuler l'équation précédente :

— Avec les dérivées partielles :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^n \partial_k f(a) \times h_k + \|h\| \varepsilon(h) \quad \text{où} \quad \begin{cases} h &= (h_1, h_2, \dots, h_n) \\ \nabla f(a) &= (\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a)). \end{cases}$$

— Avec le changement de variable $x = a + h$ $f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n (x_k - a_k) \partial_k f(a) + \|x - a\| \varepsilon(x - a).$

- L'existence de dérivées partielles ne suffit pas à assurer l'existence d'un développement limité. On peut montrer qu'elle n'assure même pas la continuité de l'application.

Exercice 3



◆◆ Unicité du développement limité

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe une forme linéaire $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \|h\| \varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

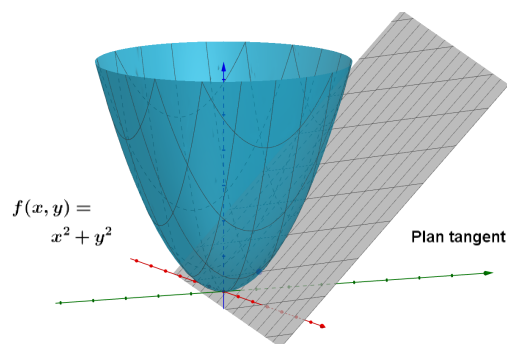
Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $L(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$.

Interprétation géométrique : le plan tangent

Exemple. Illustrons la situation avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + y^2$ et $a = (0.1, 0.5)$. L'équation du plan affine est

$$z = f(a) + \partial_1 f(a)(x - 0.1) + \partial_2 f(a)(y - 0.5).$$

À l'instar de la droite tangente pour une fonction d'une variable réelle, on obtient ici un plan tangent à la surface.

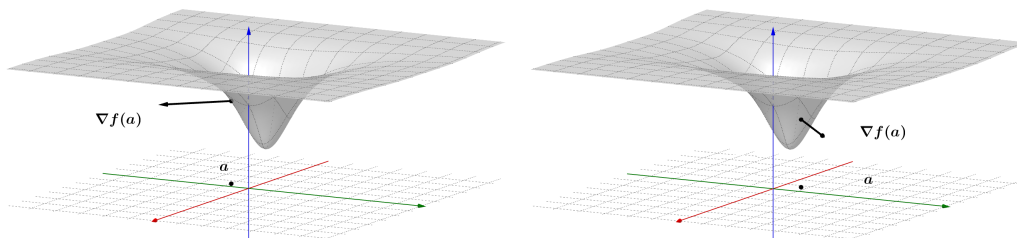


Le gradient donne la direction de plus grande pente

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons de plus que $\nabla f(a) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. D'après le développement limité d'ordre 1, $f(a+h) - f(a) \simeq \langle \nabla f(a), h \rangle$ lorsque h est « proche » de 0. Or, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

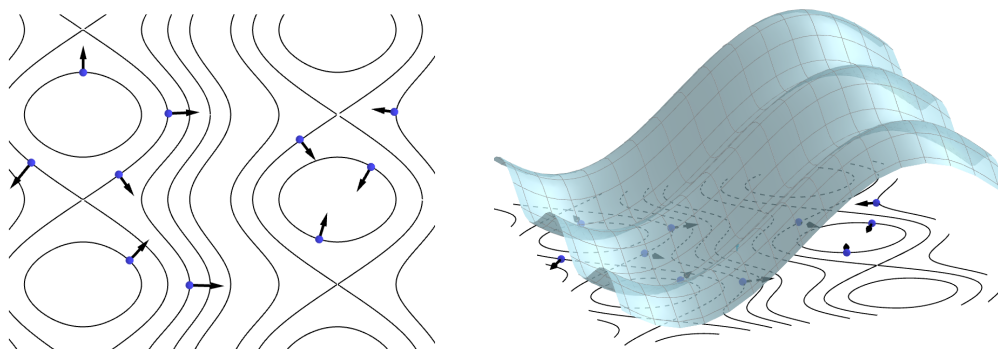
$$|\langle \nabla f(a), h \rangle| \leq \|\nabla f(a)\| \cdot \|h\|$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs sont colinéaires. Autrement dit, la variation $|f(a+h) - f(a)|$ est « localement » maximale lorsque le vecteur h est colinéaire au gradient $\nabla f(a)$. On dit que $\nabla f(a)$ donne la direction de plus grande pente (et dirigé dans le sens des pentes croissantes).



Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau

Commençons par un exemple. On a tracé ci-dessous quelques lignes de niveaux de la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 4 \sin(x/3) + \cos(y) + 5$ ainsi que quelques gradients $\nabla f(a)$ pour différentes valeurs de a .



On constate que le gradient $\nabla f(a)$ est systématiquement orthogonal à la tangente à la ligne de niveau en a . Prouvons le cas général. Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On pose

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\gamma_1(t), \gamma_2(t)). \end{cases}$$

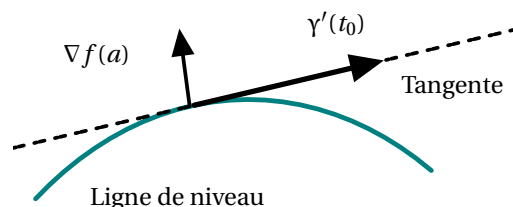
Comme γ_1 et γ_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$, on dit que γ est de classe $\mathcal{C}^1$, et on pose $\gamma' = (\gamma'_1, \gamma'_2)$. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $a = \gamma(t_0) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 4



1. Montrer que $\gamma(t) - \gamma(t_0) = \gamma'(t_0)(t - t_0) + o_{t_0}(t - t_0)$ où $o_{t_0}(t - t_0)$ désigne une fonction de limite nulle en t_0 .
2. Démontrer que pour $t \in \mathbb{R}$, $f(\gamma(t)) = f(a) + \langle \nabla f(a), \gamma'(t_0) \rangle (t - t_0) + o_{t_0}(t - t_0)$ et en déduire que $(f \circ \gamma)'(t_0) = \langle \nabla f(a), \gamma'(t_0) \rangle$.
3. On pose $K = f(a)$ de sorte que a appartienne à la ligne de niveau $\mathcal{L}_K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = K\}$. On suppose de plus que γ est à valeurs dans $\mathcal{L}_K$, c'est à dire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) \in \mathcal{L}_K$. Montrer que $\nabla f(a) \perp \gamma'(t_0)$.

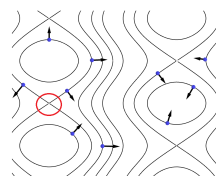
Comme γ est à valeurs dans $\mathcal{L}_K$, le vecteur $\gamma'(t_0)$ est un vecteur tangent à la ligne de niveau $\mathcal{L}_K$. On montre donc ici que le gradient de f en a est orthogonal à tout vecteur tangent (en a) à $\mathcal{L}_K$.



Exercice 5



- ◆ Que dire du gradient au niveau d'un croisement?

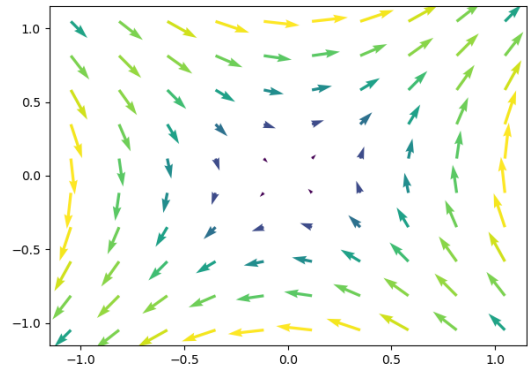


Tracé des vecteurs gradients avec Python

Pour le tracé de champs de vecteurs, on peut utiliser la commande `quiver`.

Editeur

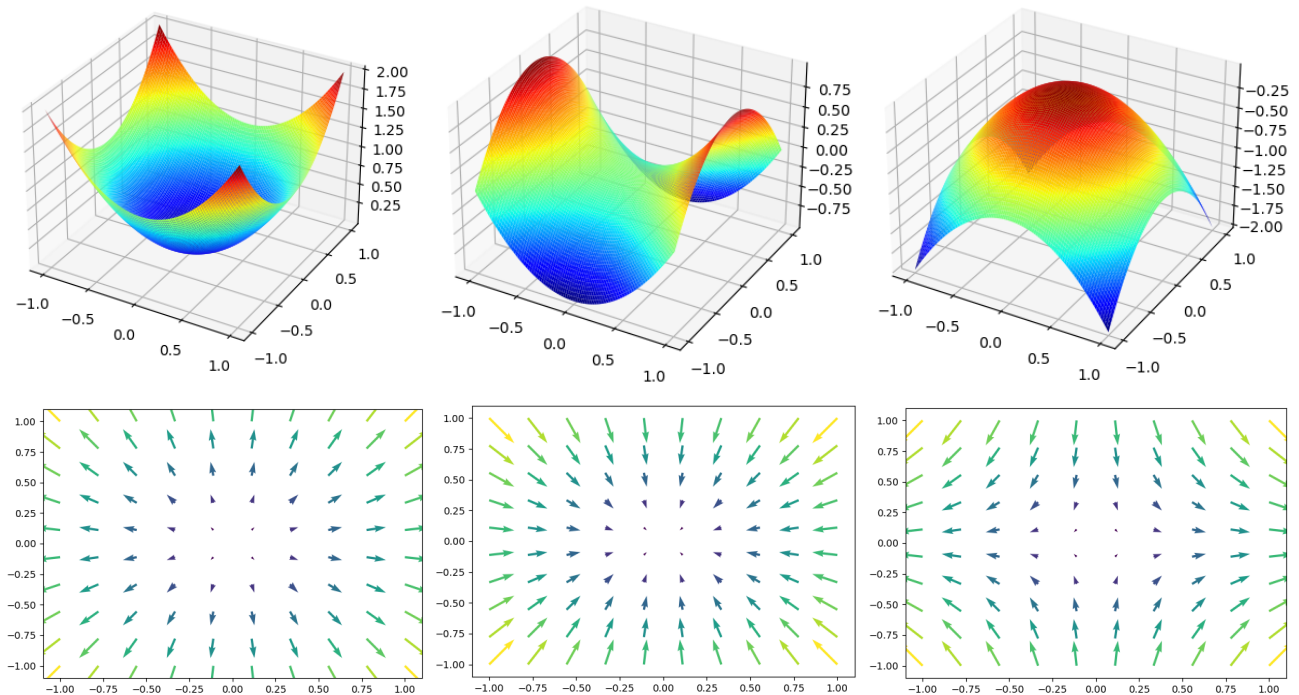
```
x = np.linspace(-np.pi/3, np.pi/3, 10)
y = np.linspace(-np.pi/3, np.pi/3, 10)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
Z = np.sin(X*Y)
dx = Y*np.cos(X*Y)
# expression de la première dérivée partielle
dy = X*np.cos(X*Y)
# expression de la seconde
color_array = np.sqrt((dx)**2 + (dy)**2)
# Pour que la couleur dépende
# de la norme du gradient
fig, ax = plt.subplots(figsize=(7,7))
ax.quiver(X, Y, dx, dy, color_array)
plt.show()
```



Exercice 6

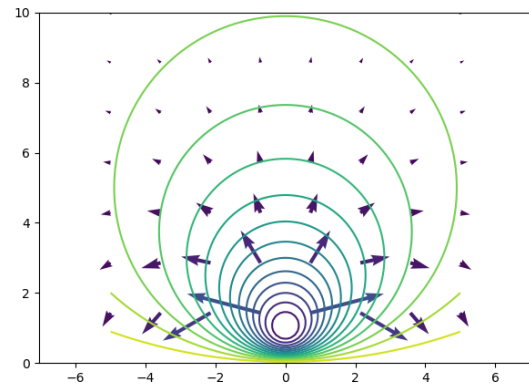
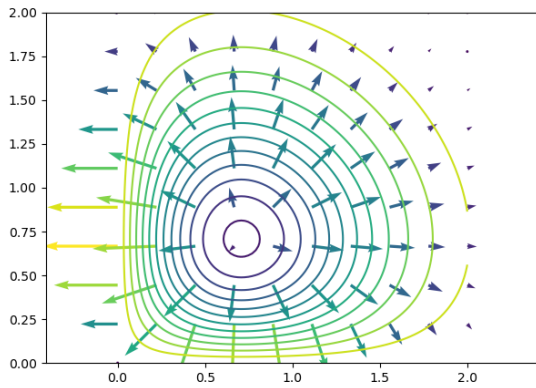
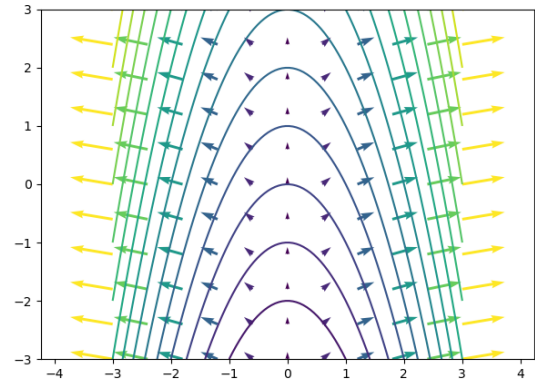
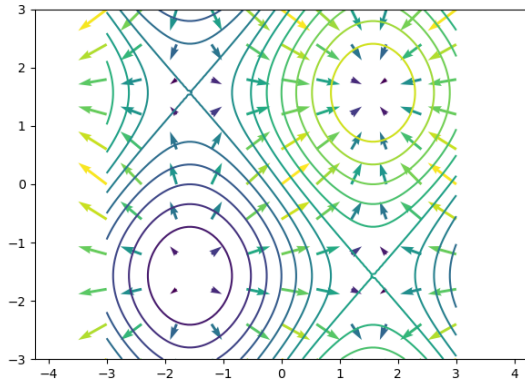


◆ Associer à chaque surface ci-dessous, la représentation des gradients.



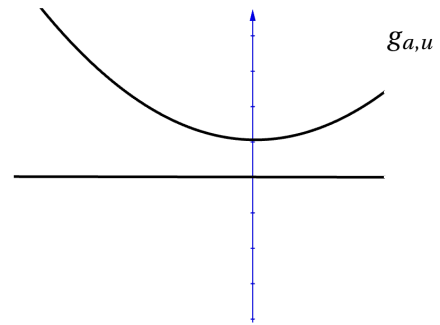
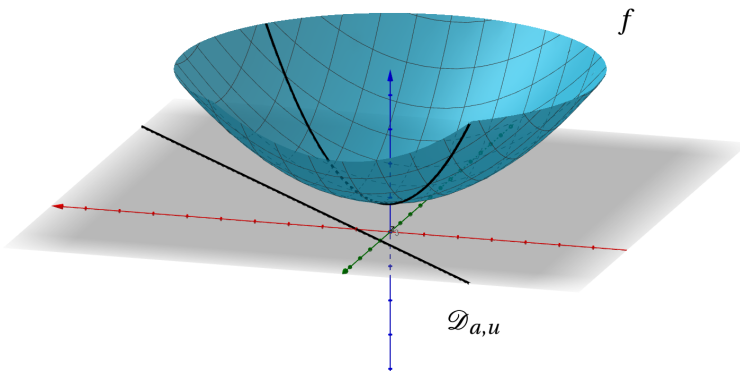
Remarque. En rajoutant, les lignes de niveaux, on peut de nouveau vérifier l'orthogonalité du gradient avec les lignes de niveau. Voici une succession d'exemples avec les fonctions. (Attention, il faut bien rendre les axes normés).

- $f(x, y) = 4 \sin(x) + 3 \sin(y)$ sur $[-3; 3]^2$.
- $f(x, y) = x^2 + y$ sur $[-3; 3]^2$.
- $f(x, y) = -x y e^{-x^2 - y^2}$ sur $[0; 2]^2$.
- $f(x, y) = -\frac{3 \cdot y}{1 + x^2 + y^2}$ sur $[-5, 5] \times [0; 10]$.



3.3 Dérivées directionnelles

Soient $a, u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. La droite affine passant par a et de direction u est l'ensemble $\mathcal{D}_{a,u} = \{a + t \cdot u \mid t \in \mathbb{R}\}$. Afin de ramener le problème à une fonction d'une seule variable, on peut restreindre l'étude de la fonction f à la droite $\mathcal{D}_{a,u}$. On pose donc $g_{a,u} : t \in \mathbb{R} \mapsto f(a + t \cdot u) \in \mathbb{R}$.



Théorème 10 (gradient et dérivée directionnelle)

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et $a, u \in \mathbb{R}^n$ avec u , non nul. Alors la fonction

$$g_{a,u} : t \in \mathbb{R} \mapsto f(a + t \cdot u) \in \mathbb{R}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'_{a,u}(t) = \langle \nabla f(a + tu), u \rangle.$$

Remarques.

- Si on précise les dérivées partielles, on obtient $g'_{a,u}(t) = \sum_{i=1}^n u_i \partial_i f(a + tu)$ où $u = (u_1, \dots, u_n)$.

- Lorsqu'on considère le vecteur e_i de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on retrouve l'expression de la dérivée partielle $\partial_k f(a)$.
- Pour $t = 0$, on a directement

$$g'_{a,u}(0) = \langle u, \nabla f(a) \rangle.$$

Lorsque u est de norme 1, cette quantité représente **la dérivée directionnelle de f au point a** dans la direction (et le sens) de u .

Exercice 7



◆◆ Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. On pose pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$. Soit $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ fixé, on définit

$$\varphi: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto f(t - y_0, y_0 - z_0, z_0 - t). \end{cases}$$

1. À l'aide du théorème des dérivées directionnelles, justifier la dérivabilité de φ et préciser $\varphi'(x_0)$.
2. Que peut-on en déduire sur $\partial_1 F$?
3. Montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\partial_1 F(x, y, z) + \partial_2 F(x, y, z) + \partial_3 F(x, y, z) = 0.$$

4

Optimisation : condition d'ordre 1

4.1

Extrema locaux

Définition 11 (extrema locaux)

Soient $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^n$.

→ On dit que f a un **maximum local** en a s'il existe $r \in \mathbb{R}_*^+$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \left(\|x - a\| < r \Rightarrow f(a) \geq f(x) \right).$$

→ On dit que f a un **minimum local** en a s'il existe $r \in \mathbb{R}_*^+$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \left(\|x - a\| < r \Rightarrow f(a) \leq f(x) \right).$$

→ On dit que f a un **extremum local** si f a un maximum local ou un minimum local.

Remarque. En pratique, pour étudier un extremum, on regardera le signe de $f(x) - f(a)$.

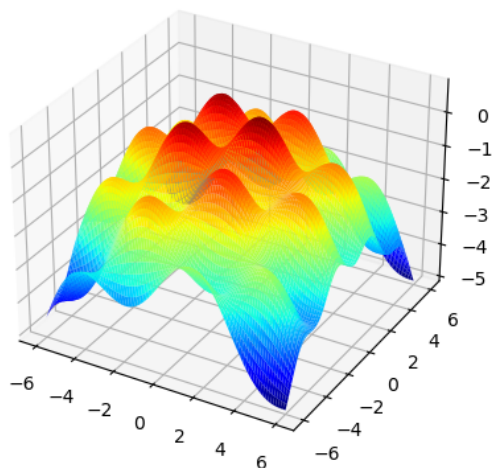
Exemple. Ci-dessous, un exemple de fonction avec une multitude d'extrema locaux qui ne sont tous pas globaux.

Editeur

```
def f(x, y):
    z=np.sin(x)*np.cos(2*y) -(x**2+y**2)/15
    return z

x = np.linspace(-6, 6, 100)
y = np.linspace(-6, 6, 100)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
Z = f(X,Y)

fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection='3d')
ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=1,
               cstride=1, cmap='jet', edgecolor='none')
```



4.2 Point critique et condition nécessaire d'extremum

Définition 12 (point critique)

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$.

On dit que a est un **point critique** de f si $\nabla f(a) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Autrement dit,

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \partial_i f(a) = 0.$$

Exercice 8



1. ✧ Calculer les points critiques des fonctions suivantes.

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y \quad \text{et} \quad g(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y.$$

2. Justifier que la fonction h définie sur $\mathbb{R}^2$ par $h(x, y) = e^x(x + y^2 + e^x)$ admet un unique point critique.
3. 📎 Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. On pose

$$f : x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{k=1}^n x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 - \sum_{k=1}^n x_k.$$

Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et admet un unique point critique.

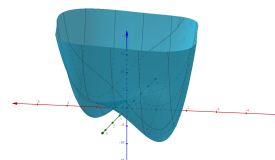
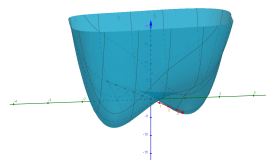
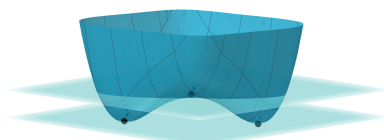
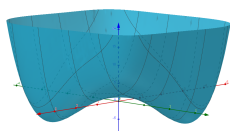
Exercice 9



- ✧ À l'aide des différentes vues de la surface, conjecturer le nombre de points critiques de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

Prouver votre conjecture.



Théorème 13 (condition nécessaire d'extremum)

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$.

Si f a un extremum en $a \in \mathbb{R}^n$,
alors a est un point critique de f .

Exercice 10



✧ Preuve

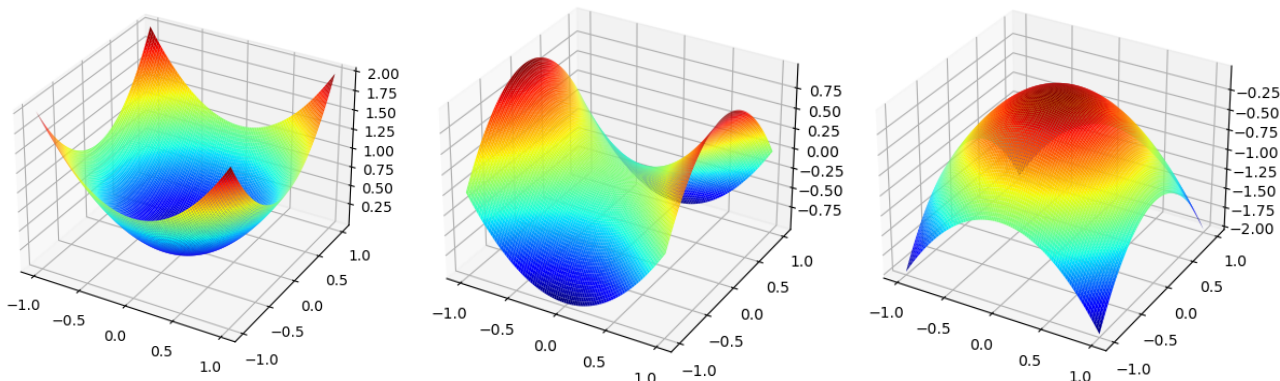
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ admettant un maximum en $a \in \mathbb{R}^n$.

1. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^n$ non nul. En utilisant la fonction $g_{a,u} : t \in \mathbb{R} \mapsto f(a + tu)$, montrer que $\langle \nabla f(a), u \rangle = 0$.
2. Conclure que a est un point critique de f .



Attention. La réciproque est fautive.

Reprenons le cas des fonctions $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto -x^2 - y^2$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2$. Dans le troisième cas, $(0, 0)$ est un point critique sans pour autant donner un extremum.



Vocabulaire. Un point critique qui ne correspond pas à un extremum est un point selle.

Méthode

Recherche d'extrema d'une fonction de plusieurs variables

Étudions la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 - 3x + xy + y^2$.

→ La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calcul des dérivées partielles.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\partial_1 f(x, y) = 2x - 3 + y \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x, y) = x + 2y.$$

→ Recherche du ou des points critiques.

Si f possède un extremum local en (x, y) , alors $\partial_1 f(x, y) = \partial_2 f(x, y) = 0$, donc $2x + y = 3$ et $x + 2y = 0$. On obtient un unique point critique avec $a = (2, -1)$.

→ Vérification sur chaque point critique.

On étudie le signe de la différence $f(x, y) - f(a)$ pour déterminer si le point critique a donnera un extremum. Par un changement de variable, c'est équivalent à étudier $f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a)$ pour tout $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(2 + h_1, -1 + h_2) - f(2, -1) &= (2 + h_1)^2 - 3(2 + h_1) + (2 + h_1)(-1 + h_2) + (-1 + h_2)^2 + 3 \\ &= h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2 = \left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right)^2 + \frac{3h_2^2}{4} \geq 0, \end{aligned}$$

donc f possède un minimum global atteint en $(2, -1)$. Il vaut $f(2, -1) = -3$.

Exercice 11



♦ En reprenant la méthode précédente, déterminer les extrema de f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^2 y + y^2 + x.$$



Exercices



On limite les exercices aux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur $\mathbb{R}^n$. Le cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ ou définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$ sera étudié au second semestre.

Dérivées partielles premières

Exercice 12. ♦ Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1 f(x, y) = 4x^3 y + 3y + 1 \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x, y) = x^4 + 3x.$$

Exercice 13. ♦ Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x, y) = (x, y)$.
Démontrer que tous les points $(\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2$ avec $t \in \mathbb{R}$ appartiennent tous à la même ligne de niveau de f .

Exercice 14. ♦♦♦ **Inégalité des accroissements finis et suite du type $u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$**
On considère une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On suppose qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |\partial_1 f(x, y)| + |\partial_2 f(x, y)| \leq k.$$

1. Soient $a = (x, y)$, $b = (x', y') \in \mathbb{R}^2$. On pose $g : t \in \mathbb{R} \mapsto f(a + t(b - a))$.

a) Préciser $g(0)$ et $g(1)$. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser sa dérivée.

b) En déduire que

$$|f(x, y) - f(x', y')| \leq k \max(|x - x'|, |y - y'|).$$

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \max(|u_{n+2} - u_{n+1}|, |u_{n+1} - u_n|)$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} \leq k a_n$.

b) En déduire l'existence d'une constante c telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq c k^{n/2}$.

c) Conclure en prouvant la convergence de la série $\sum u_{n+1} - u_n$, puis de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

En passant à la limite dans la relation de récurrence, on montre que la limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell, \ell)$.

3. Justifier que la convergence ne dépend pas du choix des conditions initiales u_0 et u_1 .

4. *Python.* On définit la suite u par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 1 + \frac{1}{4} \sin(u_n + u_{n+1}).$$

a) Écrire un programme qui prend en argument n et renvoie u_n .

b) Vérifier que la suite u converge vers une limite finie ℓ .

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq (1/\sqrt{2})^n$.

c) En déduire un programme pour obtenir une approximation de la limite à 10^{-3} près.

Exercice 15. ♦♦ Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a, b \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(b) - f(a) = \langle b - a, \nabla f(c) \rangle.$$

2. On considère dans cette question la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \|x\|^2$. Déterminer une valeur de c en fonction de a et b .

Points critiques et optimisation

TD Exercice 16. ♦♦ **Une infinité de points critiques!**

D'après oral ESCP

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (2x - y)^2 e^{2x - y}.$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et vérifier que

$$\forall a \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1 f(a) + 2\partial_2 f(a) = 0.$$

2. Montrer que f possède une infinité de points critiques. Trouver ceux en lesquels f admet un extremum local ou global.

TD Exercice 17. ♦♦♦ **Mélange avec des probabilités**

D'après oral ESCP

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont à densité et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Sous réserve d'existence, on note $\mathbf{E}(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X .

Dans tout l'exercice, X, Y et Z sont trois variables aléatoires ayant des moments d'ordre 2. On admet que chacune des variables aléatoires XY, XZ et YZ admet une espérance et on suppose que la condition suivante est vérifiée : $\mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2) - (\mathbf{E}(XY))^2 \neq 0$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $f(x, y) = \mathbf{E}((Z - xX - yY)^2)$.

- Quelle est, selon les valeurs des réels a, b, c et d , le rang de la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$?
- Établir les inégalités strictes : $\mathbf{E}(X^2) > 0$ et $\mathbf{E}(Y^2) > 0$.
 - Montrer que pour tout couple $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$, on a : $\mathbf{E}((xX + yY)^2) > 0$.
- Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle admet un unique point critique (x_0, y_0) .
 - Montrer que pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\mathbf{E}((Z - x_0X - y_0Y)(xX + yY)) = 0.$$

- En déduire l'égalité :

$$f(x, y) = \mathbf{E}((Z - x_0X - y_0Y)^2) + \mathbf{E}([(x - x_0)X - (y_0 - y)Y]^2)$$

- Étudier les extrema de f .

- Dans cette question, on suppose que X et Y sont indépendantes et suivent toutes les deux la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ et on pose : $Z = X^2$. Déterminer l'ensemble des couples (x_0, y_0) pour lesquels $\mathbf{E}((Z - xX - yY)^2)$ est minimale.

Exercice 18. ♦♦♦ **Fonctions convexes sur $\mathbb{R}^n$**

D'après oral ESCP 2001

On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire canonique. Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

- Soient $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et l'application $\varphi_{x,y}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_{x,y}(t) = f(x + t(y - x))$. Justifier que $\varphi_{x,y}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et rappeler une expression de sa dérivée.
- On suppose que f est convexe sur $\mathbb{R}^2$. C'est-à-dire

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

- Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$, $\varphi_{x,y}$ est une fonction convexe (d'une seule variable). Que dire sur les variations de la fonction $\varphi'_{x,y}$?
- En déduire que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle \quad (\bullet)$$

- Réciproquement, on suppose que f vérifie la relation $(\bullet)$ ci-dessus. Montrer que f est convexe.
- On suppose que f est convexe sur $\mathbb{R}^2$.
 - Montrer que si f présente en $x_0 \in \mathbb{R}^2$ un minimum relatif, alors f présente en x_0 un minimum global.
 - Montrer que si l'ensemble des points où f admet un minimum, noté $\mathcal{A}$, est non vide, alors cet ensemble est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$. C'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in \mathcal{A}^2, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathcal{A}.$$

Exercice 19. ♦♦♦  Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. On se place dans $\mathbb{R}^n$ munit de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soient u, v deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^n$ et f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \langle x, u \rangle^2 + \langle x, v \rangle^2$$

- Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifier que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(a) = 2\langle a, u \rangle u + 2\langle a, v \rangle v$.
- En déduire les points critiques de f .
- Étudier les extrema de f .

TD Exercice 20. ♦♦♦ Soient $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x) = \frac{\langle x, u \rangle}{\|x\|^2 + \|u\|^2}.$$

- Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ puis déterminer une fonction g définie sur $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \nabla f(x) = g(x)(u - 2f(x)x).$$

- Justifier que f a exactement deux points critiques.
- Préciser les éventuels extrema de f .

Le hasard est ma matière première.

JEAN ARP (1886-1966)
Co-fondateur du mouvement Dada.

Ci-contre : "Collage avec des carrés disposés selon les lois du hasard".



1 Rappels : couples de variables aléatoires

1.1 Lois, lois marginales et indépendance

Définition 14 (loi d'un couple)

La loi (conjointe) d'un couple (X, Y) de variables aléatoires discrètes, c'est la donnée de la valeur de $\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$ pour tout couple $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Définition 15 (indépendance)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. On dit que X et Y sont **indépendantes** si

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbf{P}(X = x) \cdot \mathbf{P}(Y = y).$$

Remarque. Les lois de X et Y sont appelées **lois marginales**. Elles s'obtiennent à partir de la loi du couple en utilisant la formule des probabilités totales :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbf{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbf{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

! Attention. Les lois marginales de X et Y ne permettent pas de retrouver la loi du couple.

Par exemple, soient X et Y deux variables de Bernoulli de paramètre $1/2$. Dans les trois cas suivants, les lois marginales sont identiques alors que les lois de couples diffèrent.

→ X et Y indépendantes.

→ $Y = X$.

→ $Y = 1 - X$.

Par contre si X et Y sont indépendantes, la loi du couple (X, Y) est connue.

Proposition 16 (loi d'une fonction, cas général)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes, et soit g une fonction à valeurs réelles définie sur le sous-ensemble $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ de $\mathbb{R}^2$. Notons Z la variable aléatoire $g(X, Y)$. Alors, pour tout élément k de $Z(\Omega)$,

$$\mathbf{P}(Z = k) = \sum_{\substack{i \in X(\Omega), j \in Y(\Omega) \\ g(i, j) = k}} \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]),$$

où la somme porte sur le sous-ensemble de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ constitué par les couples (i, j) tels que $g(i, j) = k$.

1.2 Calculs d'espérance

Sans hypothèses particulières, l'espérance d'une fonction de deux variables aléatoires s'obtient à l'aide du théorème de transfert. La loi conjointe des deux variables permet le calcul, lorsqu'elle existe de l'espérance de $g(X, Y)$ sans nécessité de calculer la loi de la fonction associée.

Théorème 17 (de transfert pour un couple de variables)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes, et soit g une fonction à valeurs réelles définie sur le sous-ensemble $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ de $\mathbb{R}^2$. Sous réserve de convergence absolue,

$$\mathbf{E}(g(X, Y)) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} g(x, y) \cdot \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]).$$

Remarque. C'est l'hypothèse de convergence absolue qui assure que la valeur de la somme ne dépend pas de l'ordre de ses termes.

Voici deux applications de ce théorème, dans le cas d'une combinaison linéaire d'une part, et dans le cas d'un produit de deux variables indépendantes d'autre part.

Corollaire 18 (linéarité de l'espérance)

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et λ et μ deux réels.

Si X et Y admettent une espérance,

alors alors $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et $\mathbf{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbf{E}(X) + \mu \mathbf{E}(Y)$.

Corollaire 19 (espérance d'un produit de variables indépendantes)

Soient X et Y deux variables aléatoires.

Si X et Y | $\begin{array}{l} \rightarrow \text{admettent une espérance et} \\ \rightarrow \text{sont indépendantes,} \end{array}$

alors $X \cdot Y$ admet une espérance et $\mathbf{E}(X \cdot Y) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$.

Exercice 21

◇ Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $X(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$. Notons $Y = X^2$.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) . En déduire la loi de Y .
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
3. Comparer $\mathbf{E}(X \cdot Y)$ et $\mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$. Commenter.

1.3 Loi d'une somme, exemples

Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires. Donnons la loi de la somme $Z = X + Y$. On a

$$Z(\Omega) = \{x + y \mid (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)\}.$$

Pour tout $z \in Z(\Omega)$.

$$\mathbf{P}(Z = z) = \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ x+y=z}} \mathbf{P}([X=x] \cap [Y=y]) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ z-x \in Y(\Omega)}} \mathbf{P}([X=x] \cap [Y=z-x]).$$

Si les variables X et Y sont indépendantes, alors la loi de Z est donnée par la formule du **produit de convolution discret**. Pour tout $z \in Z(\Omega)$:

$$\mathbf{P}(Z = z) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ z-x \in Y(\Omega)}} \mathbf{P}(X = x) \mathbf{P}(Y = z - x).$$

Dans le cas particulier où les variables X et Y sont supposées indépendantes, de loi binomiale ou de Poisson, et où la fonction g est simplement l'addition, la loi de $g(X, Y)$ est en fait totalement connue :

Proposition 20 (somme de binomiale)

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0; 1]$ et $X_1, X_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires.

Si | $\rightarrow X_1$ et X_2 sont indépendantes.
 | $\rightarrow X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$.

Alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p)$.

Proposition 21 (somme de loi de Poisson)

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$ et $X_1, X_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires.

Si | $\rightarrow X_1$ et X_2 sont indépendantes.
 | $\rightarrow X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$.

Alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Remarque. Par récurrence, ces résultats s'étendent pour des sommes de n variables aléatoires.

1.4 Loi du maximum, du minimum

Pour déterminer la loi de $\max(X, Y)$, on passe par la fonction de répartition.

Pour la loi du $T = \min(X, Y)$, on passe par la fonction d'anti-répartition ($x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{P}(T > x)$).

Exercice 22



◆ Un exemple

Soient p et p' deux réels de $]0; 1[$ et X et X' deux v.a indépendantes. On suppose de plus que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, $X' \hookrightarrow \mathcal{G}(p')$.

1. Donner la loi de la variable aléatoire $T = \min(X, X')$.
2. Calculer $\mathbf{P}([X \geq X'])$.
3. Comment interpréter les résultats précédents en termes de lancer de pièces?

VeA2

2

Généralisation aux vecteurs aléatoires, indépendances

Dans la suite, un vecteur aléatoire sur un espace probabilitisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ est la donnée d'un n -uplet $(X_1, \dots, X_n)$ où chaque X_i désigne une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

2.1 Lois, lois marginales

Définition 22 (loi d'un vecteur aléatoire, loi marginale)

- La **loi d'un vecteur aléatoire** $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires réelles est donnée par la fonction $F_{(X_1, \dots, X_n)}$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$F_{(X_1, \dots, X_n)}(t_1, \dots, t_n) = \mathbf{P} \left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq t_i] \right).$$

- On appelle **i -ème loi marginale** de $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ la loi de X_i .

Exercice 23



- Soit F la fonction de répartition associée à un couple (X_1, X_2) . Pour $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, on définit l'ensemble $\mathcal{R} =]a_1, b_1] \times]a_2, b_2]$. Exprimer $\mathbf{P}((X_1, X_2) \in \mathcal{R})$ à l'aide de F , a et b .

VeA3

Proposition 23 (égalité en loi)

Soient $(X_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$, $(Y_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ deux vecteurs aléatoires définis sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

- Si**
- Les vecteurs $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ ont la même loi.
 - La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Alors les variables aléatoires $g(X_1, \dots, X_n)$ et $g(Y_1, \dots, Y_n)$ ont la même loi.

Exercice 24



- Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, de même loi, à valeurs dans $[1; +\infty[$. Montrer que $\mathbf{E} \left(\frac{X}{X+Y} \right)$ existe et vaut $\frac{1}{2}$.
On pourra remarquer que $\frac{X}{X+Y}$ et $\frac{Y}{X+Y}$ ont même loi.

VeA4

2.2 Indépendance

Définition 24 (indépendance)

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont dites **mutuellement indépendantes** si pour tout $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, les événements $[X_1 \leq t_1], \dots, [X_n \leq t_n]$ sont mutuellement indépendants. Autrement dit,

$$\forall (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{P} \left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq t_i] \right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i \leq t_i).$$

Remarques.

- Autrement dit, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si

$$\forall (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, \quad F_{(X_1, \dots, X_n)}(t_1, \dots, t_n) = \prod_{k=1}^n F_{X_k}(t_k).$$

- Il est clair que, si les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_k$ sont mutuellement indépendantes.
- On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est composée de variables mutuellement indépendantes si pour toute partie finie $I \subset \mathbb{N}$, les variables $(X_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendantes.

Proposition 25 (des coalitions)

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$, sont indépendantes,

alors toute variable aléatoire fonction de $X_1, X_2, \dots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction de $X_{p+1}, X_{p+2}, \dots, X_n$.

Vocabulaire. Dans la suite, on note $\varphi(X_1, \dots, X_n)$ de $X_1, X_2, \dots, X_p$ pour désigner l'application :

$$\varphi : \begin{cases} \Omega & \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto \varphi(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \end{cases} \quad \text{où } \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Proposition 26 (caractérisation par des intervalles)

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Les deux énoncés suivants sont équivalents.

i) $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

ii) Pour tous intervalles $I_1, \dots, I_n$ de $\mathbb{R}$,
$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n X_i \in I_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i \in I_i).$$

Proposition 27 (caractérisation de l'indépendance, cas discret)

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Les variables $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout $(t_1, \dots, t_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = t_i]\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i = t_i).$$

2.3 Calculs d'espérance et de la variance

Le programme limite la définition de l'espérance et de la variance aux cas de variables aléatoires finies, discrètes dénombrables et à densité. Mais les propositions s'étendent au cas général.

L'espérance

Proposition 28 (linéarité de l'espérance)

Soient $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Si pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, X_i admet une espérance,

Alors $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n$ admet une espérance avec

$$\mathbf{E}(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n) = \lambda_1 \mathbf{E}(X_1) + \dots + \lambda_n \mathbf{E}(X_n).$$

Proposition 29 (espérance d'un produit)

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

- Si**
- Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, X_i admet une espérance.
 - Les variables $(X_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ sont mutuellement indépendantes.

Alors $X_1 \times \dots \times X_n$ admet une espérance avec

$$\mathbf{E}(X_1 \times \dots \times X_n) = \mathbf{E}(X_1) \times \dots \times \mathbf{E}(X_n).$$

Exercice 25

- ◆ Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$, des variables aléatoires indépendantes et suivant chacune une loi uniforme sur $[-1/2, 1/2]$. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (e^x - e^{-x})/2$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout réel $t > 0$, on a

$$\mathbf{E}(e^{tS_n}) = \left(\frac{f(t/2)}{t/2} \right)^n \quad \text{où} \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

VeA5

Exercice 26

D'après oral ESCP 2022

1. Soient S et T deux variables aléatoires réelles indépendantes, telles que T et $-T$ aient la même loi. Montrer que $\mathbf{E}(\cos(S+T)) = \mathbf{E}(\cos(S))\mathbf{E}(\cos(T))$.
2. On considère une suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et telles que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(R_k = -1) = \mathbf{P}(R_k = 1) = \frac{1}{2}$ et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n R_k$. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbf{E}(\cos(tS_n)) = (\cos t)^n.$$

VeA6

La variance**Proposition 30** (variance et indépendance)

Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

- Si**
- X et Y admettent une variance.
 - X et Y sont indépendantes.

Alors $X + Y$ admet une variance avec $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$.

Le résultat suivant s'en déduit par récurrence en rappelant que, par le lemme des coalitions, X_{k+1} est indépendants de $(X_1 + \dots + X_k)$.

Corollaire 31 (variance et indépendance)

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

- Si**
- Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, X_i admet une variance.
 - Les variables $(X_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ sont mutuellement indépendantes.

Alors $X_1 + \dots + X_n$ admet une variance avec

$$\mathbf{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbf{V}(X_1) + \dots + \mathbf{V}(X_n).$$

Exemple. Nous avons vu que si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ alors il existe $X_1, X_2, \dots, X_n$, des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètre p telles que $X = \sum_{i=1}^n X_i$. On retrouve alors l'espérance et la variance

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i) = \sum_{i=1}^n p = np \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i) = \sum_{i=1}^n pq = npq.$$

3

Compléments sur les couples : la covariance

3.1

Définitions et premières propriétés

Définition-proposition 32 (covariance)

Soient X, Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors la variable aléatoire $(X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))$ admet une espérance. On définit la covariance de X et Y par

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X)) \cdot (Y - \mathbf{E}(Y))\right).$$

Remarque. Lorsque $X = Y$, nous retrouvons la définition de la variance.

$$\mathbf{V}(X) = \text{Cov}(X, X).$$

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, un espace probabilisé. Dans la suite, $\mathcal{M}_2$ désigne l'ensemble des variables aléatoires de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ admettant un moment d'ordre 2.

Proposition 33 (propriété de la covariance)

La covariance est :

- **Symétrique.** $\forall X, Y \in \mathcal{M}_2, \quad \text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X).$
- **Positive.** $\forall X \in \mathcal{M}_2, \quad \text{Cov}(X, X) \geq 0.$
De plus, il y a égalité $\text{Cov}(X, X) = 0$ si et seulement si X est presque sûrement constante.

- **Bilinéaire.**

→ Linéaire à gauche. Pour tous $X_1, X_2, Y \in \mathcal{M}_2$, tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\text{Cov}(\lambda X_1 + \mu X_2, Y) = \lambda \text{Cov}(X_1, Y) + \mu \text{Cov}(X_2, Y).$$

→ Linéaire à droite. Pour tous $X_1, X_2, Y \in \mathcal{M}_2$, tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\text{Cov}(Y, \lambda X_1 + \mu X_2) = \lambda \text{Cov}(Y, X_1) + \mu \text{Cov}(Y, X_2).$$

 **Attention.** Ces propriétés sont à rapprocher de la définition d'un produit scalaire. Il y a toutefois, une grande différence : la covariance n'est pas définie.

$$\text{Cov}(X, X) = 0 \not\Rightarrow X = 0.$$

Vocabulaire. Deux variables sont dites décorrélées si la covariance est nulle.

Exercice 27



Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que $\text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac \text{Cov}(X, Y)$.
2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant la même variance. Montrer qu'alors les variables aléatoires $X + Y$ et $X - Y$ sont décorrélées.

Proposition 34 (dépendance et corrélation)

Soient X, Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ admettant un moment d'ordre 2.

Si X et Y sont indépendants

Alors X et Y sont des variables décorrélées : $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Exercice 28

❖ **La réciproque est fausse!**

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{-1; 0; 1\}$. Vérifier que X et $Y = X^2$ sont décorrélées mais non indépendantes.

VeA9

Théorème 35 (formule de Huygens)

Soient X, Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ admettant un moment d'ordre 2. On a

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y).$$

Exercice 29

♦ Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, admettant une espérance $\mu \neq 0$ et une variance σ^2 non nulle.

1. Exprimer l'espérance et la variance de XY en fonction de μ et σ^2 .
2. Est-ce que les variables $X + Y$ et XY sont indépendantes?

VeA10

Exercice 30

♦♦ Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p . On note M_n la variable aléatoire définie sur Ω par $M_n(\omega) = \max_{1 \leq i \leq n} X_i(\omega)$.

1. Reconnaître la loi de M_n , préciser son espérance.
2. Soient r et s deux entiers tels que $1 \leq r < s$. Vérifier que $\mathbf{E}(M_r M_s) = 1 - q^r$.
3. Calculer la covariance $\text{cov}(M_r, M_s)$.

VeA11

Proposition 36 (variance d'une somme)

Soient X, Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ admettant un moment d'ordre 2.

Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la variable $\lambda X + \mu Y$ admet un moment d'ordre 2, et

$$\mathbf{V}(\lambda X + \mu Y) = \lambda^2 \mathbf{V}(X) + 2\lambda\mu \text{Cov}(X, Y) + \mu^2 \mathbf{V}(Y).$$

Remarques.

- En particulier, $X + Y$ admet un moment d'ordre 2 et $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + \mathbf{V}(Y)$.
- Cette formule est à comparer avec la formule avec le produit scalaire. Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien

$$\forall x, y \in E, \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

- Soient $X_1, \dots, X_n$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et admettant des variances. On montre que

$$\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j).$$

Exercice 31

♦

1. À l'aide d'une inégalité usuelle, montrer que pour tous réels $x_1, \dots, x_n$,

$$(x_1 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \dots + x_n^2).$$

2. En déduire que $\sum_{k=1}^n X_k$ admet une variance, puis justifier l'égalité de la remarque précédente.

VeA13

Théorème 37 (inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient X, Y . On a

$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X) \sigma(Y)$$

où $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ désignent respectivement l'écart-type de X et Y .

Exercice 32◆ **Preuve**

1. Prouver cette inégalité en introduisant la fonction polynomiale $t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{V}(tX + Y)$.
2. Préciser le cas d'égalité.
3. *Exemple.*

Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et suivant des lois de Bernoulli. Montrer que $4 \text{Cov}(X, Y) \leq 1$.

VeA14

3.2 Coefficient de corrélation**Définition 38** (coefficients de corrélation)

Soient X, Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ admettant un moment d'ordre 2. On suppose de plus que $\mathbf{V}(X) \neq 0$ et $\mathbf{V}(Y) \neq 0$. On appelle **coefficient de corrélation linéaire**, noté $\rho(X, Y)$, le nombre réel défini par

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X) \sigma(Y)}$$

où $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ désignent respectivement l'écart-type de X et Y .

Remarques.

- Si X et Y sont indépendantes, leur coefficient de corrélation linéaire est nul. Mais la réciproque est fausse.
- À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\rho(X, Y)| \leq 1.$$

Précisons que le cas d'égalité. Si $|\rho_{X,Y}| = 1$, alors il existe des réels a et b tels que $\mathbf{P}(Y = aX + b) = 1$.

Exercice 33

◆ Soient X et Y des variables aléatoires admettant des variances non nulles.

1. Soient $a, c \in \mathbb{R}_*^+$, $b, d \in \mathbb{R}$. Prouver que $\rho(aX + b, cY + d) = \rho(X, Y)$.
2. *Cas d'égalité.* On pose $Z = \left(\frac{1}{\sigma(Y)}\right)Y - \left(\frac{\rho(X, Y)}{\sigma(X)}\right)X$.
 - a) Exprimer $\mathbf{V}(Z)$ à l'aide de $\rho(X, Y)$.
 - b) Que peut-on en déduire si $|\rho(X, Y)| = 1$?

VeA15



Exercices



Révisions : couples de v.a discrètes

Exercice 34. ♦ On considère n boîtes numérotées de 1 à n . La boîte numéro k contient k boules numérotées de 1 à k . On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. Soient X et Y les numéros de la boîte et de la boule obtenues. # VeA16

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. Calculer $P(X = Y)$.
3. Déterminer la loi de Y ainsi que son espérance.

Exercice 35. ♦♦

D'après Oral HEC 2014 # VeA18

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{\lambda}{(i + j + 1)!}.$$

1. Déterminer le réel λ .
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

Compléments

Exercice 36. ♦ Vrai ou faux?

VeA19

Dans la suite, X et Y désignent deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé admettant un moment d'ordre 2.

1. Si $E(X) = 0$ alors $E(X^2) = 0$. ✓ ×
2. Si X et Y sont indépendantes, $\text{Cov}(X, X + Y) = V(X)$. ✓ ×

TD Exercice 37. ♦ Soient $p \in]0, 1[$ et (X, Y) un couple de v.a à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est donnée par

VeA20

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, \quad P([X = n] \cap [Y = k]) = \begin{cases} \alpha(1-p)^k & \text{si } k \geq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Préciser α .
2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) .
3. Reconnaître la loi de $X + 1$? En déduire l'espérance et la variance de X .
4. Vérifier que X et $Y - X$ sont deux variables de même loi et indépendantes.
5. En déduire $\text{Cov}(X, Y)$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 38. ♦ Un cas très particulier!

VeA21

Soient X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(q)$. Montrer que si X et Y sont décorrélées alors elles sont indépendantes.

TD Exercice 39. ♦♦ Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et suivant toute une loi de Bernoulli de paramètre p . On pose

VeA22

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Y_n = X_n X_{n+1} \quad \text{et} \quad U_n = Y_1 + \dots + Y_n.$$

1. Quelle est la loi de Y_n ? Soient $i, j \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de i et j , les variables Y_i et Y_j sont-elles indépendantes?
2. Calculer l'espérance et la variance de U_n .

Exercice 40. ♦♦ Loi de Pascal

VeA23

On dispose d'une urne contenant une proportion $p \in]0, 1[$ de boules blanches. On effectue une suite infinie de tirages, indépendants. Pour chaque $r \in \mathbb{N}^*$, on note R_r la variable aléatoire qui renvoie le rang de la r -ième «boule blanche», (avec 0 si le r -ième boule blanche n'apparaît pas).

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note X_i la v.a qui renvoie 1 si l'on a obtenu une boule blanche au i -ème tirage, et 0 sinon.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$. On note aussi $Y_0 = 0$.

1. On note A l'événement « obtenir un nombre fini de boules blanches » et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n l'événement « ne plus obtenir de boules blanches à partir du n -ième lancer ».
- a) En utilisant le théorème de la limite monotone, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(A_n) = 0$.

- b) Exprimer A en fonction des événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. En déduire $\mathbf{P}(A)$.
- c) En déduire que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(R_r = 0) = 0$.
2. Identifier la loi de R_1 , en déduire l'existence et la valeur de $\mathbf{E}(R_1)$ et $\mathbf{V}(R_1)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de Y_n ?
4. Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geq r$.
Exprimer l'événement $[R_r = n]$ en fonction d'événements formés à partir des variables Y_{n-1} et X_n .
5. En déduire la loi de R_r .
6. Écrire une fonction Python qui prend en argument r et simule la variable aléatoire R_r .

TD Exercice 41. ♦♦ Somme aléatoire de variables aléatoires discrètes - identité de Wald

VeA24

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi et admettant une espérance. Soit N , une nouvelle variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et admettant aussi une espérance. On pose

$$S = \sum_{i=1}^N X_i.$$

C'est-à-dire, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$S(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) + \dots + X_{N(\omega)}(\omega) & \text{si } N(\omega) \geq 1 \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0. \end{cases}$$

On admet que S est une variable aléatoire.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{P}(N = n) \neq 0$. Justifier l'existence et calculer l'espérance $\mathbf{E}(S | [N = n])$.
2. En déduire l'existence de l'espérance de S et l'égalité $\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(X_1) \cdot \mathbf{E}(N)$.

Exercice 42. ♦♦♦

d'après HEC 2014 # VeA25

On lance indéfiniment un dé équilibré et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le numéro sorti au n -ième tirage. Les variables aléatoires X_n , définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, sont donc supposées indépendantes et de même loi uniforme sur $[[1, 6]]$. Pour tout $i \in [[1, 6]]$, on note T_i le temps d'attente de la sortie du numéro i .

1. a) Donner la loi de T_1 ainsi que son espérance et sa variance.
b) Trouver l'espérance des variables aléatoires $\text{Inf}(T_1, T_2)$ et $\text{Sup}(T_1, T_2)$.
2. Justifier l'existence de la covariance de T_1 et de T_2 , que l'on notera $\text{Cov}(T_1, T_2)$.
3. a) Établir, pour tout $i \in [[2, 6]]$, la relation : $\mathbf{E}(T_1 | [X_1 = i]) = 7$.
b) Montrer que pour tout $i \in [[3, 6]]$, on a : $\mathbf{E}(T_1 T_2 | [X_1 = i]) = \mathbf{E}((1 + T_1)(1 + T_2))$.
c) Calculer $\mathbf{E}(T_1 T_2)$.
d) En déduire $\text{Cov}(T_1, T_2)$ ainsi que le coefficient de corrélation linéaire de T_1 et T_2 .
4. a) Trouver un réel α tel que les variables aléatoires T_1 et $T_2 + \alpha T_1$ soient non corrélées.
b) Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(T_2 + \alpha T_1 | [T_1 = 1])$.
c) Les variables aléatoires T_1 et $T_2 + \alpha T_1$ sont-elles indépendantes?

Avec un peu d'algèbre linéaire...

TD Exercice 43. ♦ Matrice de variance-covariance

VeA26

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, un vecteur aléatoire dont chaque variable aléatoire admet un moment d'ordre 2. On définit la matrice colonne aléatoire $\mathcal{X}$ et la matrice $\mathcal{E}$ des espérances et $\mathcal{V}$ des variances-covariances par

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(X_1) \\ \mathbf{E}(X_2) \\ \vdots \\ \mathbf{E}(X_n) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \mathbf{V}(X_2) & \dots & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \text{Cov}(X_n, X_2) & \dots & \mathbf{V}(X_n) \end{bmatrix}.$$

1. Comparer la somme de tous les coefficients de la matrice $\mathcal{V}$ avec $\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)$.
2. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels et A la matrice ligne $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$. On note Z la variable aléatoire réelle définie par $Z = A\mathcal{X} = \sum_{i=1}^n a_i X_i$. Exprimer $\mathbf{E}(Z)$ à l'aide de A et $\mathcal{E}$, puis $\mathbf{V}(Z)$ avec A et $\mathcal{V}$.
3. a) Justifier que la matrice $\mathcal{V}$ est diagonalisable et que les valeurs propres sont positives.
b) Préciser les valeurs propres lorsque les variables sont mutuellement indépendantes.
4. Que dire des variables aléatoires X_i si la matrice $\mathcal{V}$ n'est pas inversible?

Exercice 44. ♦♦ Matrice de variance-covariance II

VeA27

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ des variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_i suit la loi de Poisson de paramètre 1.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $Y_k = X_1 + \dots + X_k = \sum_{i=1}^k X_i$.

On définit aussi la matrice de variance-covariance par

$$M_n = \left(\text{Cov}(Y_i, Y_j) \right)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, rappeler la loi de Y_k . Préciser $\mathbf{E}(Y_k)$ et $\mathbf{V}(Y_k)$.
2. On considère tout d'abord le cas particulier $n = 2$.
 - a) Expliciter la matrice M_2 .
 - b) Montrer que M_2 est inversible et expliciter son inverse.
3. On revient au cas général avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$.
 - a) Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i < j$. Montrer que $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = i$.
 - b) Expliciter la matrice M_n .

On note

$$N_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & 1 \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} = [t_{i,j}]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}.$$

la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients situés au-dessus de la diagonale sont égaux à 1, les autres étant nuls.

4. Montrer que N_n est inversible et calculer son inverse que l'on notera R_n .
5.
 - a) Exprimer M_n en fonction de ${}^t N_n$ et de N_n .
 - b) Justifier que M_n est inversible et exprimer $(M_n)^{-1}$ en fonction de R_n et ${}^t R_n$.
6. Soit $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $Z_n = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n z_i Y_i\right) = {}^t(N_n Z_n)(N_n Z_n)$.

On pose $W_n = N_n Z_n = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

7. Montrer que ${}^t(R_n W_n)(R_n W_n) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} (w_i - w_{i+1})^2\right) + w_n^2$.
8. Vérifier que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a - b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$. En déduire ${}^t(R_n W_n)(R_n W_n) \leq 4 {}^t(W_n)W_n$.
9. Conclure que pour tout $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n z_i Y_i\right) \geq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n z_i^2.$$

Exercice 45. ♦♦♦

d'après oral ESCP 2022 # VeA29

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que X et Y admettent des moments d'ordre 2 et on suppose que X n'a pas une variance nulle. Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(X^2) & \mathbf{E}(X) \\ \mathbf{E}(X) & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, montrer l'existence de l'espérance $\mathbf{E}((Y - aX - b)^2)$ et trouver une matrice colonne B et un nombre $C \in \mathbb{R}$ (qui ne dépendent ni de a ni de b) tels que :

$$\mathbf{E}((Y - aX - b)^2) = {}^t U A U - 2 {}^t B U + C \quad \text{avec} \quad U = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

On souhaite montrer l'existence et trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathbf{E}((Y - aX - b)^2)$ soit minimal. On pose $f(a, b) = \mathbf{E}((Y - aX - b)^2)$.

2. Montrer que f admet une borne inférieure sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont strictement positives.
On admet (pour l'instant) qu'il existe une matrice orthogonale P telle que $A = P D {}^t P$ avec D diagonale.
4. En déduire l'existence d'un minimum pour f sur $\mathbb{R}^2$.

5. Trouver explicitement tous les couples (a, b) pour lesquels ce minimum est atteint.

Exercice 46. ♦♦♦ Exemple de calcul de loi de la trace et du rang

VeA31

1. Préliminaires

Soit φ une projecteur de $\mathbb{R}^n$ de rang r . Soit P , la matrice canoniquement associée à φ . Préciser le spectre de φ et donner le lien entre $\text{Tr}(P)$ et $\text{rg}(P)$.

• Cas 1.

2. On considère la famille $X_1, \dots, X_n$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ toutes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

Soit M une variable aléatoire discrète de Ω dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout ω dans Ω , $M(\omega)$ est diagonalisable et semblable à $\Delta(\omega) = \text{diag}(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$. De plus, on note T la variable aléatoire $\text{Tr}(M)$.

- Donner la loi de probabilité de T . Préciser son espérance et sa variance.
- En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire $R = \text{rg}(M)$.
- On se propose de déterminer la probabilité de l'événement Z :

« les sous-espaces propres de la matrice M ont tous la même dimension ».

- On note V l'événement : « M ne possède qu'une seule valeur propre ». Calculer $\mathbf{P}(V)$.
- On suppose n impair. Déterminer $\mathbf{P}(Z)$.
- On suppose n pair. Calculer $\mathbf{P}(T = n/2)$. En déduire $\mathbf{P}(Z)$.

• Cas 2.

3. On note $U = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = U^t U = (a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2}$.

- Donner la loi de probabilité de chaque variable aléatoire a_{ij} .
- Donner la loi de $\text{tr}(A)$ puis de $\text{rg}(A)$.

Exercice 47. ♦♦♦ Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, # VeA32 suivant la même loi et avec un moment d'ordre 2. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$A(\omega) = \begin{bmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{bmatrix}.$$

- On suppose dans cette question que $X, Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Calculer la probabilité que la matrice A soit inversible.
- Justifier que A est toujours diagonalisable.
- Notons λ_1 et λ_2 les variables aléatoires égales aux valeurs propres de A . Calculer $\text{Cov}(\lambda_1, \lambda_2)$ puis $\mathbf{E}(\lambda_1 \lambda_2)$.

Problème 48. ♦♦♦ Distance en variation totale

VeAp1

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans une partie de $\mathbb{N}$.

1. • Préliminaires : loi d'un couple

Soit $p \in]0; 1/2[$. On considère deux variables aléatoires S, T respectivement à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\{0; 1\}$. On suppose que la loi du couple (S, T) est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([S = k] \cap [T = 0]) = \begin{cases} e^{-p} - p(1 - e^{-p}) & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k = 1 \\ p^k e^{-p} / k! & \text{si } k \geq 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([S = k] \cap [T = 1]) = \begin{cases} p(1 - e^{-p}) & \text{si } k = 0 \\ p e^{-p} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

- Vérifier que cela définit bien une loi de probabilité.
- Reconnaître les lois marginales de S et T .
- Exprimer $\mathbf{P}(S = T)$ en fonction de p .
- En déduire que $\mathbf{P}(S = T) \geq 1 - 2p^2$.

2. • La distance en variation totale

Pour X, Y deux variables aléatoires, on pose : $d(X, Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbf{P}([X = n]) - \mathbf{P}([Y = n])|$.

- Vérifier que $d(X, Y)$ est bien défini et $d(X, Y) \leq 2$.
- Que dire de X et Y si $d(X, Y) = 0$?
- Soient X, Y et Z trois variables aléatoires. Montrer que $d(X, Y) = d(Y, X)$ et $d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z)$.

3. • Une majoration de la distance

- a)  Justifier que pour toute partie A de $\mathbb{N}$, on a $|\mathbf{P}(X \in A) - \mathbf{P}(Y \in A)| \leq \mathbf{P}([X \neq Y])$.
- b) On pose $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathbf{P}([X = n]) \geq \mathbf{P}([Y = n])\}$, justifier que

$$d(X, Y) = 2 \left| \mathbf{P}([X \in A]) - \mathbf{P}([Y \in A]) \right| \quad \text{puis} \quad d(X, Y) \leq 2\mathbf{P}([X \neq Y]).$$

- c)  On suppose dans cette question que X s'exprime sous la forme $X = \sum_{i=1}^n X_i$ où les variables $(X_1, \dots, X_n)$ sont indépendantes et de même loi. De même, on suppose que $Y = \sum_{i=1}^n Y_i$ où les variables $(Y_1, \dots, Y_n)$ sont indépendantes et de même loi. Montrer alors que

$$d(X, Y) \leq 2n - 2 \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i = Y_i).$$

4. • Inégalité de Le Cam

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que si $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors : $d(X, Y) \leq \frac{4\lambda^2}{n}$.

5. Quel théorème retrouve-t-on lorsque $n \rightarrow +\infty$?



Problème 49. ♦♦ Théorème de Weierstrass dans le cas $\mathcal{C}^1$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$.

1. Justifier qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $(x, y) \in [0; 1]^2$, $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction P_n par

$$P_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) t^k (1-t)^{n-k}. \end{cases}$$

Soient $p \in [0; 1]$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et indépendantes.

2. a) Rappeler la loi de $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Préciser son espérance et sa variance.

b) Vérifier que si on note $\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$, alors $\mathbf{V}(\bar{X}_n) \leq \frac{1}{4n}$.

3. Montrer que $\mathbf{E}\left(f\left(\bar{X}_n\right)\right) = P_n(p)$. En déduire que

$$P_n(p) - f(p) = \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(p)\right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

4. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$. On note :

- $A_{1,\varepsilon}$ l'ensemble des entiers $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ tels que $|k/n - p| < \varepsilon/M$;
- $A_{2,\varepsilon}$ l'ensemble des entiers $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ tels que $|k/n - p| \geq \varepsilon/M$.

En particulier, on obtient $P_n(p) - f(p) = S_{1,\varepsilon} + S_{2,\varepsilon}$ où

$$\forall i \in \{1, 2\}, \quad S_{i,\varepsilon} = \sum_{k \in A_{i,\varepsilon}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(p)\right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

a) Démontrer que $|S_{1,\varepsilon}| \leq \varepsilon$.

b) Vérifier ensuite que $|S_{2,\varepsilon}| \leq 2M\mathbf{P}\left(\left|\bar{X}_n - p\right| \geq \varepsilon/M\right)$.

5. a)  Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}\left(\left|\bar{X}_n - p\right| \geq \varepsilon/M\right) \leq M^2/(4n\varepsilon^2)$.

b)  Avec un bon choix de ε , conclure en montrant que

$$\sup_{x \in [0; 1]} |f(x) - P_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

• Illustration avec Python

6. Écrire un programme qui prend en arguments un réel t , un entier naturel n , une fonction f définie sur $[0; 1]$ et renvoie $P_n(t)$ où P_n est défini à la question 1.

On pourra utiliser la commande `sp.binom(i, j)` de la bibliothèque `scipy.special` pour le coefficient $\binom{i}{j}$.

7. Proposer un code pour afficher sur le même graphe, la courbe de $f : t \in [0; 1] \mapsto \sin(2\pi t)$, et les courbes de P_i pour $i \in \llbracket 2; 8 \rrbracket$.

Compléments sur les variables à densité

Il n'y a rien de plus triste qu'une vie sans hasard.

HONORÉ DE BALZAC (1799-1850)

1 Loi du maximum, loi du minimum

Soient X, Y des variables aléatoires *indépendantes* à densité définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Notons f_X et f_Y des densités respectivement de X et Y . On définit les applications

$$Z: \begin{cases} \Omega & \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto \max(X(\omega); Y(\omega)) \end{cases} \quad \text{et} \quad T: \begin{cases} \Omega & \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto \min(X(\omega); Y(\omega)). \end{cases}$$

Noter simplement $Z = \max(X, Y)$ et $T = \min(X, Y)$. Les applications Z et T sont des variables aléatoires.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on montre que

$$F_Z(t) = F_X(t) \cdot F_Y(t).$$

Par produit, F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points (noté D). Z est une variable aléatoire à densité. Une densité est donnée par dérivation, pour $t \in \mathbb{R} \setminus D$

$$f_Z(t) = F_Z'(t) = F_X'(t) \cdot F_Y(t) + F_X(t) \cdot F_Y'(t) = f_X(t)F_Y(t) + f_Y(t)F_X(t).$$

La dernière égalité s'étend à tout réel t .

- Le calcul est similaire pour le minimum en rajoutant le passage au complémentaire. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$1 - F_T(t) = (1 - F_X(t)) \cdot (1 - F_Y(t)).$$

La variable T est à densité. Une densité est donnée par dérivation, pour $t \in \mathbb{R}$

$$f_T(t) = f_X(t)(1 - F_Y(t)) + f_Y(t)(1 - F_X(t)).$$

Exercice 50



✧ Soient X, Y des variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois exponentielles de paramètres λ et μ .

1. Donner la loi de $T = \min(X, Y)$.
2. En déduire l'existence et le calcul des espérances de $\min(X, Y)$ et $\max(X, Y)$.
3. Généraliser le résultat de la première question avec n variables.

Le calcul précédent se généralise au cas de n variables aléatoires indépendantes à densité $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Avec

$$Z = \max(X_1, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad T = \min(X_1, \dots, X_n),$$

on a

$$F_Z = \prod_{i=1}^n F_{X_i} \quad \text{et} \quad 1 - F_T = \prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i}).$$

VAD1

Les variables Z et T restent des variables à densité.

Exercice 51

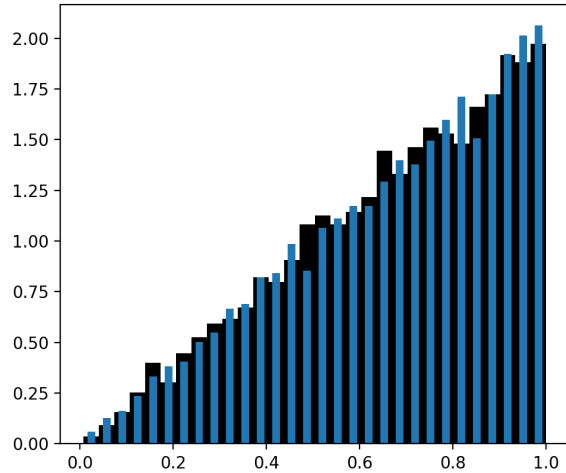


1. Que permet de conjecturer le programme et les résultats suivants?
2. Prouver votre conjecture puis généraliser le résultat obtenu? Comment interpréter graphiquement ce résultat?

VAD2

Editeur

```
def simu1():
    return max(rd.random(2))
def simu2():
    return np.sqrt(rd.random())
m=5000
Ech1=np.zeros(m), Ech2=np.zeros(m)
for i in range(m):
    Ech1[i]=simu1()
    Ech2[i]=simu2()
plt.hist(Ech1,30,density=True,color='black')
plt.hist(Ech2,30,density=True,rwidth=0.5)
plt.show()
```



2

Loi d'une somme de variables aléatoires à densité

2.1 Calcul d'un produit de convolution

Soient f, g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points). Pour tout réel x , on définit, sous réserve d'existence, $f * g(x)$ par

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt.$$

Cela définit alors une nouvelle fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto f * g(x)$. On parle alors de produit de convolution, noté $f * g$.

Exercice 52



Conditions suffisantes d'existence et propriétés

Soient f, g et h , trois fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que f soit bornée sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$, $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt$ soient absolument convergentes.

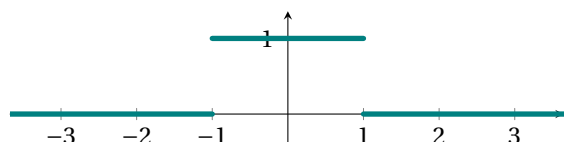
1. Montrer que $f * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que $f * g = g * f$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f * (g + \lambda h) = (f * g) + \lambda(f * h)$.

VAD3

Exemples.

- Exemple 1 avec la gaussienne.
- Exemple 2 avec une fonction à support borné. Soit c définie sur $\mathbb{R}$ par

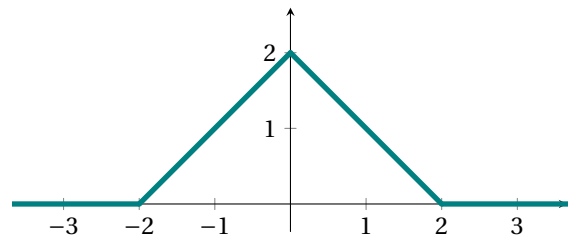
$$c(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-1; 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



On montre que

$$c * c(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [-2; 2] \\ 2+x & \text{si } x \in [-2; 0] \\ 2-x & \text{si } x \in [0; 2]. \end{cases}$$

On obtient un graphe en "triangle".



Exercice 53



◆◆◆ On définit les fonctions f , g et h sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}, \quad g(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $f * h$, $g * g$, $g * h$.

#VAD4

2.2 Le théorème de sommation

Théorème 39 (loi d'une somme)

Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, de densités respectives f_X et f_Y .

- Si**
- Les variables X et Y sont indépendantes,
 - La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt$$

est bien définie et continue sauf en un nombre fini de points.

Alors la variable $X + Y$ est à densité et h est une densité.

Exemple. Le deuxième calcul de l'exemple 2 traduit le fait que la somme de deux lois uniformes sur $[-1; 1]$ est encore une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par

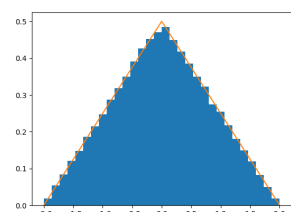
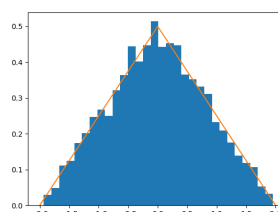
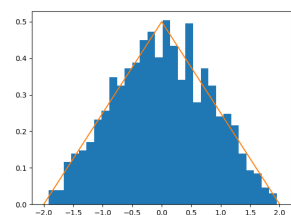
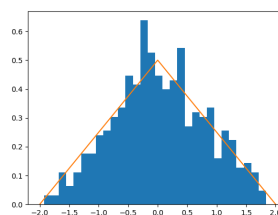
$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [-2; 2] \\ (2+x)/4 & \text{si } x \in [-2; 0] \\ (2-x)/4 & \text{si } x \in [0; 2]. \end{cases}$$

Vérification expérimentale avec Python

Editeur

```
m=500
# puis, 1000, 5000 et 10^4
# taille de l'échantillon
x=-1+2*np.random.rand(m)
y=-1+2*np.random.rand(m)
# simulation d'une loi uniforme
# continue sur [-1;1]

plt.hist(x+y,30,density=True)
# tracé de l'histogramme
plt.plot([-2,0,2],[0,0.5,0])
# tracé de la densité
plt.show()
# affichage
```



Attention. La somme de deux variables aléatoires à densité n'est pas toujours une variable aléatoire à densité. Il suffit de considérer $X + (-X)$ pour s'en convaincre.

Exercice 54



◆◆ Probabilité de collision

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à densité bornée. Que dire de la probabilité $\mathbf{P}(X = Y)$?

VAD5

Exercice 55



◆ Soient X une variable à densité qui admet une densité f continue sur $\mathbb{R}$ et U une variable suivant une loi uniforme continue sur $[0; 1]$. Vérifier que $X - U$ est à densité et donner une relation simple entre la fonction de répartition de $X - U$ et celle de X .

VAD14

3 Application aux lois usuelles

3.1 Stabilité par somme des lois γ

On rappelle les définitions des fonctions Γ et β

$$\Gamma : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{et} \quad \beta : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Théorème 40 (somme de deux lois γ)

Soient $v_1, v_2 \in \mathbb{R}_*^+$ et X_1, X_2 deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Si | $\rightarrow X_1$ et X_2 sont indépendantes.
 | $\rightarrow X_1 \hookrightarrow \gamma(v_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \gamma(v_2)$.

Alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \gamma(v_1 + v_2)$.

Remarque. Ce calcul a permis de retrouver l'égalité

$$\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}_*^+, \quad \beta(v_1, v_2) = \int_0^1 (1-u)^{v_1-1} u^{v_2-1} du = \frac{\Gamma(v_1) \Gamma(v_2)}{\Gamma(v_1 + v_2)}.$$

Corollaire 41 (cas particulier des lois exponentielles)

Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé.

Si | $\rightarrow$ Les variables $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.
 | $\rightarrow$ Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

Alors $X_1 + X_2 + \dots + X_n \hookrightarrow \gamma(n)$.

Exercice 56



◆ Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables mutuellement indépendantes suivant une loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Vérifier que la somme $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ est à densité et préciser une densité.

VAD6

3.2 Stabilité par somme des lois normales

Proposition 42 (somme de deux lois normales)

Soient $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et $X_1, X_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes.} \\ \rightarrow X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2) \text{ et } X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2). \end{array} \right.$

Alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$

♦♦ Preuve

1. On suppose dans cette question que $m_1 = m_2 = 0$. Prouver l'énoncé en adaptant le premier exemple de la section et en admettant l'égalité suivante :

$$-\frac{(x-t)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{t^2}{2\sigma_2^2} = -\frac{\sigma^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} \left(t - \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} x \right)^2 - \frac{x^2}{2\sigma^2} \quad \text{où } \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

2. En déduire le cas général avec m_1 et m_2 non nécessairement nuls.

VAD7

Exercice 57



Exercice 58



On considère X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi respectives $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$. Soient $S = X + Y$ et $T = X - Y$.

1. Déterminer la loi de S puis celle de T .
2. On suppose que S et T sont indépendantes. Donner la loi de $S + T$. En déduire $\sigma_1 = \sigma_2$.

VAD8

Corollaire 43 (somme de n lois normales)

Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes telles que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$. Alors

$$X_1 + \dots + X_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n m_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right).$$

Exemple. En particulier, retenons que si $(X_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est un vecteur aléatoire composé de variables mutuellement indépendantes et de loi identique $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors

$$\overline{X}_n^* = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1).$$

Remarque. Nous avons vu que les lois normales sont stables par transformations affines, ainsi toute combinaison linéaire de variables aléatoires suivant des lois normales restent une loi normale.

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $]0; 1[$. On pose

$$Z = \frac{\min(X, Y)}{\max(X, Y)}.$$

Déterminons la loi de Z .

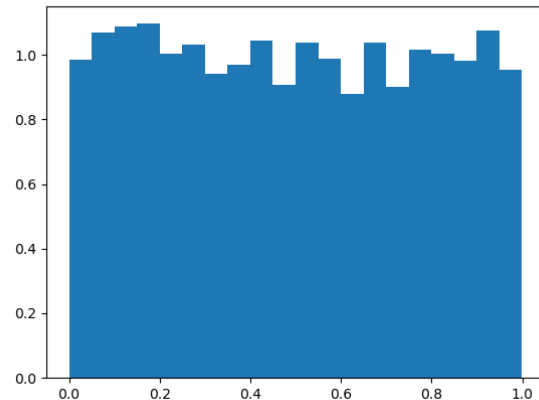
Simulation Python et conjecture

Editeur

```
import random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def simulation():
    X=rd.random()
    Y=rd.random()
    Z=min(X,Y)/max(X,Y)
    return Z

Ech=[]
for i in range(5000):
    Z=simulation()
    Ech.append(Z)
plt.clf()
plt.hist(Ech, bins=20, density=True)
plt.show()
```



De manière assez surprenante, la loi semble uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$. Une preuve s'impose!

Exercice 59



Les questions sont indépendantes.

1. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{U}([0; 1])$. Donner la loi de

$$T = -\ln(\max\{X, Y\}).$$

2. Reprendre le problème avec trois variables aléatoires indépendantes X, Y, T suivant des lois uniformes sur $[0; 1]$ et

$$Z = \frac{\min(X, Y, T)}{\max(X, Y, T)}.$$



Exercices



Compléments sur les variables à densité

Exercice 60. ♦ Anticiper la réponse de la machine à la suite des commandes suivantes :

VAD11

Editeur

```
import numpy.random as rd
C=0
m=5000
for i in range(m):
    if rd.normal(0,1)<rd.normal(0,1):
        C+=1
print(C/m)
```

TD

Exercice 61. ♦

VAD12

Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée réduite et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1; 0\}$. On définit

$$Y_0 = X_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+1} = \alpha Y_n + X_{n+1}.$$

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable Y_n suit une loi normale dont on précisera les paramètres.
3. Calculer pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\text{Cov}(Y_n, Y_{n+p})$.

Exercice 62. ♦♦

VAD13

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telles que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(b, \sigma^2)$. Prouver l'équivalence

$$\mathbf{P}(X \leq Y) \geq \frac{1}{2} \iff a \leq b.$$

Exercice 63. ♦♦

D'après oraux HEC 2013 # VAD16

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On note α , la probabilité que la matrice ci-dessous soit diagonalisable.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & X & 0 \\ Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$ et $\mathbf{P}(XY > 0)$.
2. Calculer α .

TD

Exercice 64. ♦♦ Soient X, Y , et Z trois variables aléatoires, indépendantes de même loi. On pose

VAD17

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad M(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}.$$

1. a) Justifier que si $a + b + c \neq 0$ alors $M(a, b, c)$ est diagonalisable.
b) Comparer les événements $[X + Y + Z \neq 0]$ et "La matrice $M(X, Y, Z)$ est diagonalisable". En déduire la probabilité que la matrice aléatoire $M(X, Y, Z)$ soit diagonalisable lorsque les trois variables suivent des lois normales.
2. Reprendre la question en supposant que $X + 1$, Y et Z suivent des lois de Poisson.

Loi d'une somme, d'un maximum, d'un produit, etc

Exercice 65. ♦ 📎 📎 Maximum et loi de Gumbel

VAD19

On dit que la variable X suit la loi de Gumbel si sa fonction de répartition F_X est définie sur $\mathbb{R}$ par $F_X(x) = e^{-e^{-x}}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, \dots, X_n$ suivant chacune la loi de Gumbel. Montrer que la variable aléatoire Z définie par $Z = \max(X_1, \dots, X_n) - \ln n$ suit également la loi de Gumbel.
2. On considère maintenant une suite de variables aléatoires indépendantes $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. Posons $S_n = \max(Y_1, \dots, Y_n) - \ln n$. Montrer que l'on a, pour tout $x \geq 0$, la convergence suivante :

$$F_{S_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_X(x) \quad \text{où } X \text{ suit une loi de Gumbel.}$$

Exercice 66. ♦ 📎 📎 Loi d'un produit d'une variable discrète et d'une continue

VAD20

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé. On suppose que X est une variable discrète à valeurs dans $\{-1; 1\}$ et que Y suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

Donner la loi de $Z = XY$?

Exercice 67. ♦ Exemples avec les lois uniformes

D'après EDHEC # VAD21

On considère deux variables aléatoires X et Y , définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose : $Z = X + Y$.

1. a) Déterminer une densité de Z .
b) Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, les événements $(Z > 1)$ et $(1 - x < Z \leq 1 + x)$ sont indépendants.
2. On pose : $T = \max(X, Y)$. On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
a) Montrer que T est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité de T .
b) En déduire que T possède une espérance et la déterminer.
3. On pose : $U = |X - Y|$ et on admet que U est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Montrer que U est combinaison linéaire de Z et T , puis en déduire l'espérance de U .

Exercice 68. ♦ Loi d'une différence de lois exponentielles

D'après Ecricome # VAD22

Soient a et b deux réels strictement positifs, X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et suivant chacune une loi exponentielle de paramètres respectifs a et b .

1. Déterminer la fonction de répartition, puis donner une densité de la variable $T = -X$.
2. Montrer que $Y - X$ admet une densité, notée h , définie par :

$$h(t) = \begin{cases} \frac{ab}{a+b} e^{-bt}, & \text{pour } t > 0 \\ \frac{ab}{a+b} e^{at}, & \text{pour } t \leq 0. \end{cases}$$

3. On considère la variable $Z = |Y - X|$.

- a) Montrer que pour tout $s \in [0, +\infty[$, $\mathbf{P}(Z \leq s) = 1 - \frac{be^{-as} + ae^{-bs}}{a+b}$.
- b) Vérifier que Z est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité de Z .
- c) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

Exercice 69. ♦♦ Lois de Pareto et produit

VAD23

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la fonction f_a sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(t) = \begin{cases} \frac{a}{t^{a+1}} & \text{si } t \in [1; +\infty[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Vérifier que f_a est une densité de probabilité.
On dit qu'une variable X suit une loi de Pareto de paramètre a si X admet f_a comme densité.
2. 📎 Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi de Pareto de paramètre a . Justifier que le produit $X_1 \dots X_n$ est une variable à densité, et en donner une densité.

Exercice 70. ♦♦ Loi de la partie fractionnaire

VAD24

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. Donner la loi de $[X]$. Préciser son espérance et sa variance.
2. Démontrer que la variable $Y = X - [X]$ est à densité et donner une densité.

Exercice 71. ♦♦ 📎 Somme de lois uniformes

VAD26

Soient $Z, X_1, \dots, X_n$, $n+1$ variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme sur $[0; 1]$.

1. 📎 Justifier que $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ est une variable à densité et qu'il existe une densité f_n dont la restriction à $[0; 1]$ est donnée par :

$$\forall x \in [0; 1], \quad f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

2. Calculer $P(Z > X_1 + X_1 + \dots + X_n)$.

Exercice 72. ♦♦ Un exemple sans l'hypothèse d'indépendance

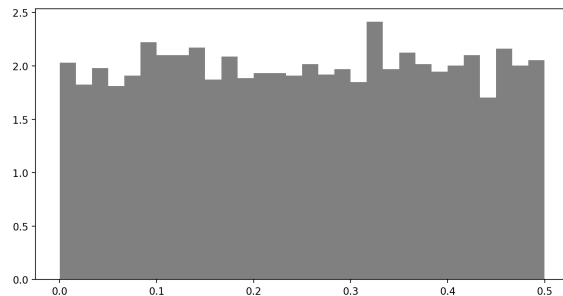
VAD27

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0; 1]$.

1. Déterminer la loi et l'espérance de $Y = \min(X, 1 - X)$, ainsi que de $Z = \max(X, 1 - X)$.
2. Vérifier que vos résultats sont en accord avec les simulations numériques suivantes :

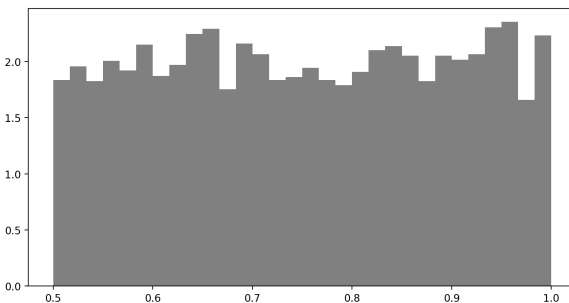
Editeur

```
ech=np.zeros(5000)
for i in range(5000):
    x=np.random.rand()
    ech[i]=min(x,1-x)
plt.hist(ech,30,density=True)
plt.show()
```



Editeur

```
ech=np.zeros(5000)
for i in range(5000):
    x=np.random.rand()
    ech[i]=max(x,1-x)
plt.hist(ech,30,density=True)
plt.show()
```



3. Calculer, si elles existent, les espérances de X/Z et de X/Y .

TD

Exercice 73. ♦♦♦ Minimum sur un nombre aléatoire de variables

VAD28

On considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre 1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

1. Donner la loi de U_n .
2. Soit N une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On suppose que N est indépendant des X_k , pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et on pose :

$$U_N = \min(X_1, \dots, X_N)$$

i.e. $U_N(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_{N(\omega)}(\omega))$, pour tout $\omega \in \Omega$. On admet que U_N est une variable aléatoire.

Déterminer la loi de U_N .

3. Soient $q \in]0; 1[$ et $I(q) = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1-qt)^2} dt$.

a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall t \in]0; 1/q[, \quad \frac{1}{t(1-qt)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1-qt}$.

b) En déduire l'existence et la valeur de $I(q)$.

c) Conclure en montrant que U_N a une espérance que l'on calculera.

Indication : on pourra utiliser le changement de variable $\varphi(t) = e^{-t}$.

Exercice 74. ♦♦♦ Soit une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes toutes de loi uniforme continue sur $[0; 1]$.

VAD29

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires S_n et T_n :

$$S_n = \sum_{j=1}^n X_j \quad \text{et} \quad T_n = S_n - \lfloor S_n \rfloor.$$

1. Vérifier que S_2 est à densité et donner une densité.
2. Montrer que T_2 suit la loi uniforme sur $[0; 1]$.
3. On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x - \lfloor x \rfloor$.
 - a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $h(h(S_n) + X_{n+1}) = T_{n+1}$.
 - b) En déduire que T_n suit la loi uniforme sur $[0; 1]$.

TD

Problème 75. ♦♦♦ Lois de Cauchy

VADp1

1. • *Preliminaire sur la loi de Cauchy*

Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_a par : $f_a(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}$.

a) Montrer que f_a est une densité de probabilité.

Dans la suite, X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ admettant f_a pour densité. On dit alors que X suit une loi de Cauchy de paramètre a et on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{C}(a)$.

b) Donner la fonction de répartition de X .

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. Reconnaître la loi de λX lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{C}(a)$.

2. *Quotient de lois normales centrées*

Soient N et N' deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

a) Montrer que la variable aléatoire $Z = \ln |N|$ est une variable aléatoire à densité, et en déterminer une densité. Quelle est une densité de la variable aléatoire $-Z$?

b) Montrer qu'une densité h de la variable aléatoire $\ln |N/N'|$ est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \frac{2}{\pi} \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$.

c) i) En déduire que la fonction de répartition de $U = |N/N'|$ est donnée par $F_U(x) = 2 \arctan(x)/\pi \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$.

ii) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}(N/N' = x) = 0$. En remarquant que N et $-N$ ont même loi, déduire que $G(x) + G(-x) = 1$ où G désigne la fonction de répartition de N/N' .

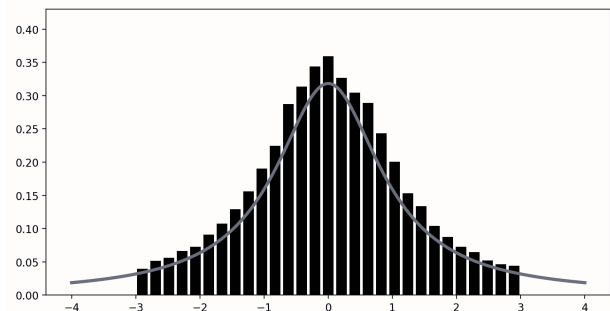
iii) Conclure en montrant que $N/N' \hookrightarrow \mathcal{C}(1)$.

3. Proposer une fonction python qui simule une loi de Cauchy de paramètre 1, puis de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$.

4. À l'aide du code suivant, que peut-on conjecturer sur la loi de $1/X$ si $X \hookrightarrow \mathcal{C}(1)$? Prouver la conjecture.

Editeur

```
plt.clf()
X=np.zeros(50000)
for iter in range(50000):
    X[iter]=1/Cauchy()
plt.hist(X,np.linspace(-3,3,30),density=
    True,rwidth=0.8,color='k')
x=np.linspace(-4,4,200)
plt.plot(x,1/(np.pi*(1+x**2)),linewidth=3)
plt.show()
```



Problème 76. ♦♦ Maximum de loi normale

D'après EDHEC 2006 #VADp2

On considère deux variables aléatoires X et Y , définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et suivant toutes deux la loi normale centrée réduite (de densité notée φ et de fonction de répartition notée Φ).

On pose $Z = \max(X, Y)$ et l'on se propose de déterminer la loi de Z , ainsi que son espérance et sa variance.

1. a) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

b) Vérifier que Z admet pour densité la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 2\varphi(x)\Phi(x).$$

2. a) Rappeler la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

b) En déduire la convergence et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

c) En remarquant que, pour tout réel x , $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$, montrer, grâce à une intégration par parties, que :

$$\int_0^{+\infty} xf(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

d) Montrer de même que : $\int_{-\infty}^0 xf(x) dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt$. En déduire que Z a une espérance et donner sa valeur.

3. a) Montrer que X^2 et Z^2 suivent la même loi.

b) Déterminer $E(Z^2)$, puis donner la valeur de la variance de Z .

- **Fonctions de plusieurs variables**

- Définition d'un extremum (local/global). □□□ ✓
- Définition de la dérivée partielle d'ordre k en a . □□□ ✓
- Définition du gradient. Donner le gradient de $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|^2$. □□□ ✓
- Savoir prouver qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$. □□□ ✓
Exemple : $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow x \ln(1 + x^2 + y^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
- Développement limité d'ordre 1. □□□ ✓
- Interprétation géométrique : plan tangent, le gradient donne la direction de plus grande pente, le gradient est orthogonal aux lignes de niveau. □□□ ✓
- Dérivées directionnelles $g_{a,u}$. □□□ ✓
- Point critique. Et lien avec les extrema lorsque f est définie sur $\mathbb{R}^n$. □□□ ✓

- **Vecteurs aléatoires**

- Loi d'un couple de variables discrètes. Lois marginales de variables discrètes. □□□ ✓
- Généralisation : Loi d'un vecteur aléatoire avec la fonction de répartition, loi marginale. □□□ ✓
- Théorème de l'égalité en loi. Si g continue, $(X_i)_i, (Y_i)_i$ même loi alors $g(X_i)_i, g(Y_i)_i$ ont même loi. □□□ ✓
- Définition de l'indépendance de n v.a, d'une suite de v.a avec la fonction de répartition. □□□ ✓
- Traduction de l'indépendance dans le cas discret. □□□ ✓
- Lemme des coalitions. □□□ ✓
- Formule de transfert pour un couple de variables aléatoires discrètes. □□□ ✓
- Loi d'une somme de lois binomiales indépendantes. □□□ ✓
- Loi d'une somme de lois de Poisson indépendantes. □□□ ✓
- Espérance d'un produit dans le cas d'indépendance. □□□ ✓
- Variance d'une somme de variables indépendantes. □□□ ✓
- Définition de la covariance. Formule de Huygens. □□□ ✓
- Propriété de la covariance. Forme bilinéaire, symétrique positive (mais non définie). □□□ ✓
- Si 2 variables sont indépendantes alors la covariance est nulle. Preuve. □□□ ✓
- $V(X + Y) = V(X) + 2\text{cov}(X, Y) + V(Y)$. Généralisation à n v.a. □□□ ✓
- Inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas de la covariance. □□□ ✓
- Coefficient de corrélation. Définition et propriété. □□□ ✓

- **Compléments sur les variables à densité**

- Loi d'un maximum et minimum de variables indépendantes. □□□ ✓
- Théorème de sommation pour des v.a. à densité indépendantes (avec le produit de convolution). □□□ ✓
- Sommes de loi gamma indépendantes. □□□ ✓
- Sommes de loi normale indépendantes. □□□ ✓