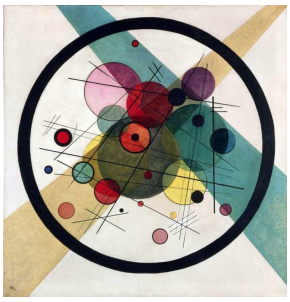
CHAPITRE 14

# Endomorphismes symétriques



*Cercles dans un cercle,*
1923, VASSILY KANDINSKY

L'objectif principal de ce chapitre est l'étude de la réduction des matrices et endomorphismes symétriques par l'intermédiaire du théorème spectral.

## 1 Matrices et endomorphismes symétriques

### 1.1 Les définitions et exemples

**DÉFINITION (RAPPEL)** — **matrice symétrique**

*On dit qu'une matrice* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *est* ***symétrique*** *si* ${}^tA = A$.
*Autrement dit, si* $(a_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]}$ *sont les coefficients de la matrice* $A$ : $\forall\,(i,j) \in [\![1;n]\!]^2, \qquad a_{i,j} = a_{j,i}$.

**Exercice 1**

✦ Donner la dimension de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ défini comme le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. p. 18

**DÉFINITION** — **endomorphisme symétrique**

*Soient,* E *un espace vectoriel muni d'un produit scalaire* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *et* $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
*On dit que* $\varphi$ *est un* ***endomorphisme symétrique*** *si*

$$\forall\, u,\, v \in \mathrm{E}, \qquad \langle \varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle.$$

**Exemples.**

- On définit

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-6y,\, -6x-7y). \end{array} \right.$$

Pour $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $v = (x',y') \in \mathbb{R}^2$ et avec le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$

$$\langle \varphi(u), v\rangle = (2x-6y)x' + (-6x-7y)y' = x\left(2x'-6y'\right) + y\left(-6x'-7y'\right) = \langle u, \varphi(v)\rangle.$$

L'endomorphisme $\varphi$ est symétrique.

- Soient E, un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et $u_0 \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$. Pour tout réel $a \in \mathbb{R}^+$, on définit l'endomorphisme $\varphi_a : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ par

$$\varphi_a(u) = u + a\,\langle u, u_0\rangle\, u_0.$$

Justifions que $\varphi_a$ est symétrique. Soient $u,\, v \in \mathrm{E}$

$$\begin{array}{lll} \left\langle \varphi_a(u), v\right\rangle & = \left\langle u + a\langle u, u_0\rangle u_0, v\right\rangle & = \langle u, v\rangle + a\left\langle u, u_0\right\rangle\langle u_0, v\rangle \\ & = \langle u, v\rangle + \langle u, a\,\langle u_0, v\rangle\, u_0\rangle & = \langle u, v + a\,\langle u_0, v\rangle\, u_0\rangle \\ & = \left\langle u, \varphi_a(v)\right\rangle. & \end{array}$$

- On pourra consulter l'exercice 24, p. 14, pour un exemple d'endomorphisme symétrique en dimension infinie.

**Exercice 2**

✦✦ Soient $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $f$, $g$ deux endomorphismes symétriques de E.

1. Justifier que si $f$ et $g$ commutent alors $f \circ g$ est symétrique.
2. On souhaite prouver la réciproque. On suppose donc $f \circ g$ symétrique. p. 18
   a) Simplifier pour tous $u,\, v \in \mathrm{E}$, $\left\langle u, f\circ g(v) - g\circ f(v)\right\rangle$.
   b) En déduire que $f$ et $g$ commutent.

## 1.2 Premières propriétés

**LEMME** — **caractérisation via une famille génératrice**

*Soient* $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une famille génératrice de* E *et* $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. *Les deux énoncés suivants sont équivalents.*

**i)** *L'endomorphisme* $\varphi$ *est symétrique.*

**ii)** $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad \left\langle \varphi(e_i), e_j\right\rangle = \left\langle e_i, \varphi\left(e_j\right)\right\rangle.$

***Preuve.*** Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si l'endomorphisme $\varphi$ est symétrique :

$$\forall\, u,\, v \in \mathrm{E}, \qquad \langle \varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle.$$

On obtient directement le résultat avec $u = e_i$ et $v = e_j$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, supposons l'énoncé **ii)** vrai.
Soient $u,\, v \in \mathrm{E}$. Par définition d'une famille génératrice de E, il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ tels que

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad v = \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j.$$

Par linéarité de $\varphi$ : $\qquad \varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i) \quad \text{et} \quad \varphi(v) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \varphi(e_j).$

Puis, par bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\langle \varphi(u), v\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i), \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j \left\langle \varphi(e_i), e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j \left\langle e_i, \varphi(e_j) \right\rangle \qquad \text{condition } \mathbf{ii})\\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j \varphi_j(e_j) \right\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle.\end{aligned}$$

Ce qui prouve l'énoncé **i**).

■

**THÉORÈME** — **lien avec les matrices**

*Soit* $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *où* $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *est un espace euclidien. Les trois énoncés suivants sont équivalents.*

- **i**) *L'endomorphisme* $\varphi$ *est un endomorphisme symétrique de* E.
- **ii**) *Il existe une base orthonormée* $\mathscr{B}$ *de* E *telle que la matrice* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ *soit une matrice symétrique.*
- **iii**) *Pour toutes les bases orthonormées* $\mathscr{B}$ *de* E, *la matrice* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ *est une matrice symétrique.*

***Preuve.*** Rappelons que pour une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i, \varphi(e_j) \right\rangle e_i.$$

Par définition de la matrice d'une application linéaire, il vient

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} \langle e_1, \varphi(e_1)\rangle & \langle e_1, \varphi(e_2)\rangle & \cdots & \langle e_1, \varphi(e_n)\rangle \\ \langle e_2, \varphi(e_1)\rangle & \langle e_2, \varphi(e_2)\rangle & \cdots & \langle e_2, \varphi(e_n)\rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle e_n, \varphi(e_1)\rangle & \langle e_n, \varphi(e_2)\rangle & \cdots & \langle e_n, \varphi(e_n)\rangle \end{bmatrix}.$$

Par définition de la transposée

$${}^t\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} \langle e_1, \varphi(e_1)\rangle & \langle e_2, \varphi(e_1)\rangle & \cdots & \langle e_n, \varphi(e_1)\rangle \\ \langle e_1, \varphi(e_2)\rangle & \langle e_2, \varphi(e_2)\rangle & \cdots & \langle e_n, \varphi(e_2)\rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle e_1, \varphi(e_n)\rangle & \langle e_2, \varphi(e_n)\rangle & \cdots & \langle e_n, \varphi(e_n)\rangle \end{bmatrix}.$$

Le lemme précédent justifie alors directement les équivalences **i**)$\Leftrightarrow$**ii**) et **i**)$\Leftrightarrow$**iii**).

■

⚠ **Attention.** Il ne faut pas oublier que $\mathscr{B}$ doit être une base orthonormée !

**Exemple.** Si on reprend l'exemple de $\varphi$ défini sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(x, y) = (2x - 6y, -6x - 7y)$, la matrice de $\varphi$ dans la base canonique est bien symétrique

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}.$$

**Remarque.** Donnons une seconde justification de l'implication **ii**) $\Rightarrow$ **iii**).
Soit $\mathscr{B}$, une base orthonormée telle que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ soit symétrique. Soit $\mathscr{C}$, une seconde base orthonormée de E. Montrons que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi)$ est symétrique. Par la formule de changement de base, il vient

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi) = \mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}{}^{-1}\, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$$

et la matrice de passage $P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$ est orthogonale (c'est-à-dire ${P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}}^{-1} = {}^tP_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$). Ensuite,

$$\begin{aligned}{}^t\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi) &= {}^t\left({P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}}^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}\right)\\ &= {}^tP_{\mathscr{B}\mathscr{C}}\,{}^t\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)\,{}^t\left({P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}}^{-1}\right)\\ &= {P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}}^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)P_{\mathscr{B}\mathscr{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi).\end{aligned}$$

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi)$ est bien symétrique.

**Exercice 3**

✦✦

1. Justifier que l'ensemble $\mathscr{S}(E)$ des endomorphismes symétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$. p. 18
2. Si E est de dimension finie, pouvez-vous préciser sa dimension ?

# 2 Réduction

## 2.1 Diagonalisation des endomorphismes symétriques

### Premières propriétés

**PROPOSITION** — **espace stable**

*Soient* $\varphi$ *un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien* $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *et* F *un sous-espace vectoriel de* E.

***Si*** F *est stable par* $\varphi$,

***alors*** $F^\perp$ *est également stable par* $\varphi$.

***Preuve.*** Rappelons que

$$F^\perp = \{v \in E \mid \forall\, u \in F,\ \langle u, v\rangle = 0\}.$$

Soit $v \in F^\perp$, montrons que $\varphi(v) \in F^\perp$.
Soit $u \in F$. L'endomorphisme $\varphi$ étant symétrique

$$\langle \varphi(v), u\rangle = \langle v, \varphi(u)\rangle = 0$$

car $v \in F^\perp$ et $\varphi(u) \in F$. Ainsi, pour tout $u \in F$, $\varphi(v)$ est orthogonal à $u$, c'est-à-dire $\varphi(v) \in F^\perp$.
En conclusion, $F^\perp$ est stable par $\varphi$. ■

**PROPOSITION** — **vecteurs propres orthogonaux**

*Soit* $\varphi$ *un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien* $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

***Si*** *u et v sont deux vecteurs propres de* $\varphi$ *associés à des valeurs propres distinctes,*

***alors*** *les vecteurs u et v sont orthogonaux.*

***Preuve.*** Soient $u$, $v$ deux vecteurs propres de $\varphi$ associés respectivement aux valeurs propres $\lambda$ et $\mu$ (distinctes).

$$\begin{aligned}\lambda\langle u, v\rangle &= \langle \lambda u, v\rangle = \langle \varphi(u), v\rangle\\ &= \langle u, \varphi(v)\rangle = \langle u, \mu v\rangle = \mu\langle u, v\rangle.\end{aligned}$$

Or $\lambda \neq \mu$, nécessairement $\langle u, v\rangle = 0$. Les vecteurs $u$ et $v$ sont orthogonaux. ■

**Remarque.** On a la généralisation suivante. Si $e_1, \ldots, e_p$ sont des vecteurs propres de $\varphi$ associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, alors la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est orthogonale.

On en déduit directement le résultat suivant.

**COROLLAIRE** — **sous-espaces propres orthogonaux**

*Soit* $\varphi$ *un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien* $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$.
*Alors les sous-espaces propres de* $\varphi$ *sont deux à deux orthogonaux.*

**Exemple.** On considère $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$. On vérifie que $\varphi : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tM \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un endomorphisme symétrique. L'endomorphisme $\varphi$ possède deux valeurs propres : $-1$ et $1$ où $E_1(\varphi)$, $E_{-1}(\varphi)$ désigne respectivement l'ensemble des matrices symétriques et antisymétriques. Ces sous-espaces sont donc orthogonaux.

### Le théorème spectral

**THÉORÈME** — **spectral**

*Soit* $\varphi$ *un endomorphisme d'un espace euclidien* $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$.

***Si*** $\varphi$ *est un endomorphisme symétrique,*

***alors***
- *L'endomorphisme* $\varphi$ *est diagonalisable.*
- *Il existe une base orthonormée de* $E$ *formée de vecteurs propres de* $\varphi$.

⚠ **Attention.** Il ne faut pas oublier le second point du théorème : la base des vecteurs propres peut être choisie orthonormée.

***Preuve.*** On admet que tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien admet une valeur propre réelle (voir exercice **??**, p. **??** sur le quotient de Rayleigh pour une preuve).

On raisonne par récurrence forte sur la propriété :

$\mathscr{P}(k)$ : Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension $k$ est diagonalisable dans une base orthonormée.

- *Initialisation.* $\mathscr{P}(1)$ est claire puisque la linéarité impose dans ce cas que tout endomorphisme est de la forme $\lambda\,\mathrm{id}_E$.

- *Hérédité.* Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(1), \mathscr{P}(2), \dots, \mathscr{P}(k)$ vraies et démontrons $\mathscr{P}(k+1)$. Soit $\varphi$ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension $k+1$. D'après la remarque préliminaire, il existe une valeur propre $\lambda$ à $\varphi$. Notons $E_\lambda(\varphi)$, le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda$.
  - Si $E = E_\lambda(\varphi)$, alors $\varphi = \lambda\,\mathrm{id}_E$ et $\varphi$ est directement diagonalisable dans une b.o.n de $E$.
  - Si $E_\lambda(\varphi) \neq E$. Alors $E_\lambda(\varphi)$ est stable par $\varphi$ et d'après la première proposition de cette section, $E_\lambda(\varphi)^\perp \neq \{0_E\}$ est aussi stable par $\varphi$. On peut donc considérer l'endomorphisme $\tilde{\varphi}$ obtenu par la restriction de $\varphi$ à $E_\lambda(\varphi)^\perp$. Comme $\varphi$ est symétrique, $\tilde{\varphi}$ l'est aussi pour l'espace euclidien $E_\lambda(\varphi)^\perp$ muni du produit scalaire restreint.

$$\forall\, u, v \in E_\lambda(\varphi)^\perp, \qquad \langle u, \tilde{\varphi}(v)\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle = \langle \varphi(u), v\rangle = \langle \tilde{\varphi}(u), v\rangle.$$

  Or $E_\lambda(\varphi)^\perp$ est de dimension comprise entre 1 et $k$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\tilde{\varphi}$ est diagonalisable dans une b.o.n de $E_\lambda(\varphi)^\perp$. Soit $\tilde{\mathscr{B}}$ une telle base. Noter que les vecteurs de $\tilde{\mathscr{B}}$ constituent aussi des vecteurs propres de $\varphi$. Soit aussi $\mathscr{B}_\lambda$, une base de $E_\lambda(\varphi)$. Les vecteurs de $\mathscr{B}_\lambda$ sont des vecteurs propres de $\varphi$ (associés à la valeurs propres $\lambda$). Comme

$$E_\lambda(\varphi) \underset{\perp}{\oplus} E_\lambda(\varphi)^\perp = E,$$

  on peut concaténer les familles $\mathscr{B}_\lambda$ et $\tilde{\mathscr{B}}$ respectivement en une base $\mathscr{B}$ orthonormée de $E$. On obtient ainsi une b.o.n de $E$ constituée de vecteurs propres de $\varphi$. L'endomorphisme $\varphi$ est diagonalisable dans une b.o.n.
  Si $\mathscr{P}(1), \mathscr{P}(2), \dots, \mathscr{P}(k)$ sont vraies, $\mathscr{P}(k+1)$ l'est aussi.

- *Conclusion.* Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

■

**Remarque.** La réciproque est vraie mais elle est beaucoup moins utile.

**Exemples.** Vérifions le théorème sur les deux premiers exemples du chapitre (page p.2).
• La matrice de $\varphi$ dans la base canonique est

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminons les valeurs propres par un calcul de déterminant.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -6 \\ -6 & -7-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (2-\lambda)(-7-\lambda) - 36 \\ &= \lambda^2 + 5\lambda - 50 \\ \det(A - \lambda I_3) &= (\lambda+10)(\lambda-5). \end{aligned}$$

Il y a deux valeurs propres $-10$ et $5$. Précisons les espaces propres. Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

$$AX = 5X \iff \begin{cases} 2x - 6y = 5x \\ -6x - 7y = 5y \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 6y = 0 \\ 6x + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\iff x + 2y = 0 \iff x = \begin{bmatrix} -2y \\ y \end{bmatrix}.$$

Ainsi $\qquad E_5(\varphi) = \mathrm{Vect}(u_1) \quad$ où $\quad u_1 = (-2, 1).$

De même, on trouve

$$E_{-10}(\varphi) = \mathrm{Vect}(u_2) \quad \text{où} \quad u_2 = (1, 2).$$

Il est clair que $u_1$ et $u_2$ sont orthogonaux, $E_5(\varphi)$ et $E_{-10}(\varphi)$ le sont aussi.

• Reprenons l'exemple de $\varphi_a$ du début de chapitre. On constate que

$$\varphi_a(u_0) = u_0 + a\langle u_0, u_0\rangle u_0 = \left(1 + a\|u_0\|^2\right) u_0.$$

→ Comme $u_0 \neq 0_E$, $u_0$ est vecteur propre pour la valeur propre $\lambda = 1 + a\|u_0\|^2 \neq 0$ (car $a \geqslant 0$).
→ De plus, pour tout $u \in \mathrm{Vect}(u_0)^\perp$, on a

$$\varphi_a(u) = u + a\overbrace{\langle u, u_0\rangle}^{=0} u_0 = u.$$

Le réel 1 est donc une seconde valeur propre pour $\varphi_a$. Précisons que $\mathrm{Vect}(u_0)^\perp$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$ car $\dim E \geqslant 2$. De plus,

$$\dim \mathrm{Vect}(u_0) = 1 \quad \text{et} \quad \dim \mathrm{Vect}(u_0)^\perp = n - 1.$$

D'où $\qquad \dim E_1(\varphi_a) + \dim E_\lambda(\varphi_a) \geqslant n.$

Nécessairement, il y a égalité des dimensions et même $E_\lambda(\varphi_a) \oplus E_1(\varphi_a) = E$. L'endomorphisme $\varphi_a$ est diagonalisable dans une b.o.n de E. Pour trouver un telle base, on peut ajouter le vecteur normée $u_0/\|u_0\|$ à une b.o.n de $E_1(\varphi_a)$.

**Exercice 4**

✦✦ *Les questions sont indépendantes.*

Soit $\varphi$ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

1. Que dire de $\varphi$ si pour tout $u \in E$, $\langle u, \varphi(u)\rangle = 0$ ?
2. Justifier que $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \mathbb{R}^+$ si et seulement si $\varphi$ vérifie

p. 18

$$\forall u \in E, \quad \langle u, \varphi(u)\rangle \geqslant 0 \quad (\bullet)$$

**Exercice 5**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Justifier que l'application linéaire

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$$

p. ??

est aussi diagonalisable.
*On pourra introduire le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

> *En mathématiques, les noms sont arbitraires. Libre à chacun d'appeler un opérateur auto-adjoint un éléphant" et une décomposition spectrale une "trompe". On peut alors démontrer un théorème suivant lequel "tout éléphant a une trompe". Mais on n'a pas le droit de laisser croire que ce résultat a quelque chose à voir avec de gros animaux gris.*
>
> GERALD SUSSMAN
> spécialiste en intelligence artificielle (1947).

## 2.2 Diagonalisation des matrices symétriques réelles

### Théorème spectral dans le cas matriciel

**THÉORÈME** — **spectral, version matricielle**

***Si*** A *est une matrice symétrique réelle,*

***alors***
- *La matrice* A *est diagonalisable.*
- *Il existe une matrice orthogonale* P *et une matrice diagonale réelle* D *telles que*

$$D = P^{-1}AP = {}^tPAP.$$

***Preuve.*** Soit $\varphi$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Comme la base canonique est une b.o.n pour le produit scalaire canonique, $\varphi$ est un endomorphisme symétrique en dimension finie. D'après ce qui précède $\varphi$ est diagonalisable dans une b.o.n. (notée $\mathscr{C}$). Précisons que la matrice de passage, notée P, entre la base canonique et la base $\mathscr{C}$ est orthogonale (puisque les deux bases sont orthonormées). La formule de changement de base donne alors

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(\varphi) = P\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi)P^{-1} = P\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi)\,{}^tP.$$

D'où le résultat avec $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi)$ qui est bien diagonale. ■

**Remarques.**

- Les colonnes de la matrice P forment une b.o.n de vecteurs propres de A.
- La réciproque, qui est bien moins utile, est vraie. S'il existe P orthogonale et D diagonale telles que $A = PD\,{}^tP$ alors la matrice A est symétrique puisque

$${}^tA = {}^t\left(P\,{}^tDP\right) = {}^t\left({}^tP\right){}^tD\,{}^tP = PD\,{}^tP = A.$$

*Les questions sont indépendantes.*

**Exercice 6**

1. ✦ On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   Justifier que A est diagonalisable. Calculer $A^2$. En déduire que $\mathrm{Sp}(A) = \{-1; 1\}$.
2. ✦ Soient A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre $n$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles. Montrer l'équivalence p. 19
$$A = B \iff A^2 = B^2.$$
3. ✦✦ Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M + {}^tM$ soit nilpotente.
   Montrer que la matrice M est antisymétrique.

**Exercice 7**

✦ Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1;n]\!]}$ une matrice symétrique réelle, et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres comptées sans multiplicité (c'est-à-dire que l'on prend en compte les éventuelles répétitions). Grâce au calcul de $\mathrm{Tr}\left({}^tAA\right)$, démontrer que p. 19
$$\sum_{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2} {a_{i,j}}^2 = \sum_{i=1}^{n} {\lambda_i}^2.$$

**PROPOSITION** — **décomposition d'une matrice symétrique**

*Soit* A *une matrice symétrique de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

***Notons***
- $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *les valeurs propres de* A.
- $(X_1, \dots, X_n)$ *une b.o.n de vecteurs propres de* A *telle que* $AX_i = \lambda_i X_i$ *pour tout* $i \in [\![1;n]\!]$.

***Alors***
$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i {}^tX_i = \lambda_1 X_1 {}^tX_1 + \cdots + \lambda_n X_n {}^tX_n.$$

***Preuve.*** Posons $B = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i {}^tX_i$ de sorte que, pour $j \in [\![1;n]\!]$,
$$BX_j = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i {}^tX_i\right) X_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \left({}^tX_i X_j\right).$$
Or la famille $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est orthonormée
$${}^tX_i X_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
La somme précédente se simplifie, et on obtient
$$BX_j = \lambda_j X_j = AX_j.$$
Les endomorphismes canoniquement associés à A et B sont donc égaux sur la base $(X_1, \dots, X_n)$, ils sont donc égaux et $A = B$. ■

**Remarque.** En particulier, A est combinaison linéaire de $n$ matrices de projecteurs de rang 1.

**Exercice 8**

✦ Justifier que les matrices $X_i {}^tX_i$ pour $i \in [\![1;n]\!]$ sont des matrices de projection dont on déterminera les éléments caractéristiques (ici, une base du noyau et de l'image). p. 19

**Exercice 9**

✦ On reprend les notations de l'énoncé précédent et on suppose en plus les réels $\lambda_i$ positifs.

1. Montrer que la matrice $L = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} X_i {}^t X_i$ est symétrique à valeurs propres positive et vérifie l'égalité $L^2 = A$. Prouver que L commute avec A. p. 19
2. On admet que c'est la seule matrice symétrique avec des valeurs propres dont le carré vaut A et on la note $\sqrt{A}$. Montrer que si A est de plus inversible, alors on a $(\sqrt{A})^{-1} = \sqrt{A^{-1}}$.

## Pratique de la réduction des matrices symétriques

**Méthode**

**Comment obtenir une b.o.n de vecteurs propres d'une matrice/endomorphisme symétrique ?**

- Déterminer les valeurs propres.
  (Par un calcul du rang, un polynôme annulateur, le déterminant ...)
- Pour chaque valeur propre, déterminer une base de vecteurs propres.
- À l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt, déterminer une base orthonormée pour chacun des sous-espaces propres.
- On obtient une base de vecteurs propres par concaténation des bases orthonormées de chacun des sous-espaces propres.

**Exemple.** Partons de la matrice symétrique

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Le spectre est donné par $\mathrm{Sp}(A) = \{1;4\}$. Pour s'en convaincre, on remarque que $\mathrm{rg}(A - I_3) = 2$, donc 1 est valeur propre, l'espace propre associé est de dimension 2. Pour trouver la dernière valeur propre, on considère la trace.
- On vérifie que $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est une base de $E_4$ et une base de $E_1$ est donnée par les deux vecteurs colonnes

$$X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Comme $E_4$ est de dimension 1, il suffit de renormaliser $X_1$ pour obtenir une base orthonormée de $E_4$.

$$\|X_1\|^2 = 3 \quad \text{et} \quad E_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} X_1.$$

Par contre, $X_2$ et $X_3$ ne sont pas orthogonaux. On pose donc

$$E_2 = \frac{X_2}{\|X_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} X_2.$$

Puis
$$V_2 = X_3 - \langle X_3, E_2 \rangle E_2 = X_3 - \frac{\langle X_3, X_2 \rangle}{\|X_2\|^2} X_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Et
$$E_3 = \frac{V_2}{\|V_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

→ Finalement, une b.o.n de vecteurs propres de A est donnée par la famille

$$(E_1, E_2, E_3) = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

**Exercice 10**

✦ Diagonaliser dans une b.o.n chacune des matrices symétriques suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

p. 19

**Exercice 11**

✦ On considère la matrice carrée d'ordre 3 : *d'après EMLyon 2007 E*

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

p. 20

1. Montrer, sans calcul, que A est diagonalisable.
2. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible et symétrique P, de première ligne $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et de deuxième ligne $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ telles que $A = PDP^{-1}$.

## 3 Formes quadratiques associées à une matrice

### Définition et exemples

**DÉFINITION** — **forme quadratique d'une matrice symétrique**

*Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *symétrique. La* ***forme quadratique associée à*** A *est l'application définie sur* $\mathbb{R}^n$ *par*

$$q(h) = {}^tHAH$$

*où* H *est la matrice des coordonnées de* $h$ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^n$.

**Exemple.** Si on pose $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, la forme quadratique associée est définie pour tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\begin{aligned} q(h) &= \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2h_1 + 3h_2 \\ 3h_1 - h_2 \end{bmatrix} \\ &= h_1(2h_1 + 3h_2) + h_2(3h_1 - h_2) = 2{h_1}^2 + 6h_1h_2 - {h_2}^2 = \begin{matrix} \mathbf{2}{h_1}^2 + & \mathbf{3}h_1h_2 \\ +\mathbf{3}h_2h_1 + & -\mathbf{1}{h_2}^2 \end{matrix}. \end{aligned}$$

**Remarque.** En généralisant le calcul précédent, on constate que pour $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$ et $h = (h_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$

$$q(h) = \sum_{i,j\in[\![1;n]\!]} a_{ij} h_i h_j.$$

Par symétrie de A, on peut réécrire cette expression

$$q(h) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} {h_i}^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} h_i h_j.$$

En particulier, si A est diagonale avec $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, on a simplement

$$q(h) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {h_i}^2.$$

**Exercice 12**

✦ **Forme quadratique associée à un endomorphisme symétrique**
On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. Soient $\varphi$ un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ et A la matrice de $\varphi$ dans la base canonique.
Justifier que si $q$ est la forme quadratique associée à A alors

p. 20

$$\forall\, h \in \mathbb{R}^n, \quad q(h) = \langle h, \varphi(h) \rangle.$$

### Expression de la forme quadratique dans une b.o.n

**THÉORÈME** — **expression dans une b.o.n**

*Soit $q$, une forme quadratique associée à une matrice symétrique* A. *Alors il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que si $h$ a pour coordonnées $\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_n$ dans $\mathscr{B}$, on a*

$$q(h) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {\tilde{h}_i}^2$$

*où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de* A.

***Preuve.*** D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = PD{}^tP$. Ainsi, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} q(h) &= {}^tHAH \\ &= {}^tHPD{}^tPH. \\ q(h) &= {}^t\tilde{H}D\tilde{H} \qquad \text{où} \quad \tilde{H} = {}^tPH. \end{aligned}$$

Il existe une base $\mathscr{B}$ telle que ${}^tP$ soit la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$. Si $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_n)$ sont les coordonnées de H dans cette nouvelle base

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_2 \\ \vdots \\ \tilde{h}_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad q(h) = \begin{bmatrix} \tilde{h}_1, \tilde{h}_2 & \dots & \tilde{h}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_2 \\ \vdots \\ \tilde{h}_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {\tilde{h}_i}^2.$$

■

**Application.** ✎ **L'encadrement de Rayleigh**
Si on pose $\alpha = \min \operatorname{Sp}(A)$ et $\beta = \max \operatorname{Sp}(A)$, montrons que

$$\forall\, h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \qquad \alpha \leqslant \frac{q(h)}{\|h\|^2} \leqslant \beta.$$

Il suffit de reprendre l'expression obtenue précédemment

$$q(h) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {\tilde{h}_i}^2 \quad \text{puis,} \quad \alpha \sum_{i=1}^{n} {\tilde{h}_i}^2 \leqslant q(h) \leqslant \beta \sum_{i=1}^{n} {\tilde{h}_i}^2.$$

On conclut en rappelant que pour une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ orthonormée, on a $\sum_{i=1}^{n} {\tilde{h}_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle h, e_i \rangle^2 = \|h\|^2$.

## Signe d'une forme quadratique

**Exercice 13**

✧ ✎ À quelles conditions nécessaires et suffisantes sur le spectre de A, a-t-on

**i)** $\forall\, u \in \mathrm{E}, \qquad q(u) \geqslant 0\,?$

**ii)** $\forall\, u \in \mathrm{E}, \qquad q(u) \leqslant 0\,?$

**iii)** $\forall\, u \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}, \qquad q(u) > 0\,?$

**iv)** $\forall\, u \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}, \qquad q(u) < 0\,?$

p. 20

# Exercices

## Matrices symétriques

**Exercice 14.** ✦ Soit $n \geqslant 3$. On note $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1 sauf le coefficient en position $(n, n)$ qui vaut 0.

1. Justifier que A est diagonalisable.
2. Vérifier que A est semblable à une matrice diagonale de la forme $D = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, a, b)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
3. En calculant de deux manières la trace de A et celle de $A^2$, déterminer $a$ et $b$.

≫ Solution p. ??

**Exercice 15.** ✦✦ Soient A et B deux matrice symétriques réelles telles que les formes quadratiques associées $q_A$ et $q_B$ soient égales. Justifier que $A = B$.

≫ Solution p. 20

**Exercice 16.** ✦ **Rayon spectral, exemple de convergence de suite de matrices**
On munit $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique défini par $\langle M, N\rangle = {}^tMN$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit A, une matrice symétrique de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. On pose $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$.

1. Justifier que pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\| \leqslant \rho(A)\|X\|$.
2. Établir l'équivalence entre les énoncés :

**i)** $\rho(A) < 1$ **ii)** Pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $\left\|A^n X\right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

≫ Solution p. 20

**Exercice 17.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique à valeurs propres positives. Trouver une solution de l'équation $X^6 = A$, où $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. A-t-on unicité de la solution ?

≫ Solution p. 20

## Matrices symétriques positives, définies positives

**Exercice 18.** ✦ ✎ **Définitions des symétriques définies positives et équivalences**
On dit qu'une matrice symétrique M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, on a ${}^tXMX > 0$. Montrer l'équivalence des quatre énoncés suivants :

*i)* M est définie positive.

*ii)* Les valeurs propres de M sont strictement positives.

*iii)* Il existe P orthogonale, D diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telles que $M = PD{}^tP$.

*iv)* Il existe une matrice R inversible et symétrique telle que $M = R^2$.

≫ Solution p. 21

**Exercice 19.** ✦✦✦ **Racine carrée d'une matrice de $\mathscr{S}_n^+$**
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives. Soit $A \in \mathscr{S}_n^+$.

1. Montrer qu'il existe $R \in \mathscr{S}_n^+$ telle que $A = R^2$. On dit que R est une racine carrée de A.
2. Soient $R_1$ et $R_2$ deux racines carrées de A appartenant à $\mathscr{S}_n^+$.
   Montrer que $R_1$ et $R_2$ ont les mêmes valeurs propres et les mêmes vecteurs propres. En déduire que la matrice A admet une unique racine carrée dans $\mathscr{S}_n^+$ notée dans la suite $\sqrt{A}$.
3. *Expression de $\sqrt{A}$ via les polynômes de Lagrange.*
   Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, les $p$ valeurs propres de A deux à deux distinctes. Pour tout $j \in [\![1; p]\!]$, on définit le polynôme :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i \in [\![1;p]\!] \\ i \neq j}} \frac{x - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}.$$

**a)** Montrer que $\mathscr{B} = \left(L_1, \ldots, L_p\right)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[x]$. En déduire l'existence d'un unique polynôme P de $\mathbb{R}_{p-1}[x]$ tel que, pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, $P\left(\lambda_i\right) = \sqrt{\lambda_i}$.

**b)** Exprimer $\sqrt{A}$ comme un polynôme en A.

**4.** Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. vérifier que A est dans $S_n^+$ et déterminer $\sqrt{A}$.

≫ Solution p. 21

**Exercice 20.** ✦✦✦ **Matrices symétriques positives et définies positives**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $S = \left(a_{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que :

$$\forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2, \quad a_{ij} > 0.$$

On note β la plus grande valeur propre de S et V le sous-espace propre de S associé à β. On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique et de la norme associée $\|\cdot\|$.

**1.** Soit $X_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in V \setminus \{0\}$. On note $|X_0| = \begin{bmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{bmatrix}$.

**a)** Montrer ${}^tX_0 S X_0 \leqslant {}^t|X_0| S |X_0|$ et en déduire : $|X_0| \in V$.

**b)** Montrer que les coordonnées de $S|X_0|$ sont toutes strictement positives et en déduire que $X_0$ n'a aucune coordonnée nulle.

**c)** Montrer : ${}^tX_0 S X_0 = {}^t|X_0| S |X_0|$ et en déduire que les coordonnées de $X_0$ sont toutes de même signe.

**2.** **a)** En déduire qu'il n'existe pas deux vecteurs de $V \setminus \{0\}$ orthogonaux entre eux.

**b)** Conclure : $\dim(V) = 1$.

≫ Solution p. ??

## Endomorphismes symétriques

**Exercice 21.** ✦ Soient $\left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ un espace euclidien et φ un endomorphisme symétrique de E. Démontrer que Ker(φ) et Im(φ) sont supplémentaires orthogonaux.

≫ Solution p. 22

**Exercice 22.** ✧ **Vrai ou faux ?**

Si $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la décomposition en sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien, alors $\mathscr{B}$ est une base orthogonale.

≫ Solution p. 22

**Exercice 23.** ✦✦ **La symétrie implique la linéarité**

Soit $\varphi : E \to E$ tel que, pour tous $u, v \in E$, on a $\langle \varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle$. Justifier que φ est un endomorphisme.

≫ Solution p. 22

**Exercice 24.** ✦ **Exemple d'endomorphisme symétrique en dimension infinie** *D'après EMLyon 2011*

On note $E = \mathscr{C}^\infty([0;1];\mathbb{R})$, muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par :

$$\forall f, g \in E, \qquad \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

et, pour toute fonction $f \in E$, on pose

$$T(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(x^2 - x\right) f''(x) + (2x-1) f'(x). \end{array} \right.$$

Montrer que T est un endomorphisme symétrique de E.

≫ Solution p. 22

**Exercice 25.** ✦ **Endomorphisme symétrique et produit scalaire** *d'après EDHEC 2015*

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ qui est orthonormée pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

On considère un endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^n$, symétrique, dont les valeurs propres sont toutes strictement positives.

1. Justifier l'existence d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, formée de vecteurs propres de $f$.
2. a) Montrer que, pour tout $x$ de $\mathbb{R}^n$, on a : $\langle x, f(x)\rangle \geqslant 0$.
   b) Vérifier que l'égalité $\langle x, f(x)\rangle = 0$ a lieu si et seulement si $x = 0$.
   c) En déduire que l'application $\varphi$, de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, définie par $\varphi(x, y) = \langle x, f(y)\rangle$, est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
3. a) En utilisant $\mathscr{B}'$, montrer qu'il existe un endomorphisme $g$ de $\mathbb{R}^n$, symétrique pour le produit scalaire canonique, dont les valeurs propres sont strictement positives, et tel que $g^2 = f$.
   b) Établir que $g$ est bijectif.
   c) Montrer que la famille $\left(g^{-1}(e_1), g^{-1}(e_2), \dots, g^{-1}(e_n)\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire $\varphi$.

≫ Solution p. 23

**Exercice 26.** ✦✦ *D'après ESCP 2011.*

Soit $n$ un entier naturel non nul. On désigne par E un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$. On note $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout vecteur $x$ de E, on pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

1. a) L'application $f$ est-elle un endomorphisme de E ?
   b) L'application $f$ est-elle injective ? surjective ?
   c) L'application $f$ est-elle un endomorphisme symétrique de E ?
   d) Caractériser les bases $(e_1, \dots, e_n)$ telles que $f$ soit un projecteur.
2. a) Montrer que les valeurs propres de $f$ sont strictement positives.
   b) Montrer qu'il existe un isomorphisme symétrique $s$ de E à valeurs propres strictement positives tel que $s = (s \circ f)^{-1}$.
   c) Montrer que $(s(e_1), \dots, s(e_n))$ est une base orthonormée de E.
   d) Que dire de $f$ si la matrice de $s$ dans $\mathscr{B}$ est une matrice orthogonale ?

≫ Solution p. 23

**Exercice 27.** ✦✦ ✎

Soient $(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n$, et $f$ un endomorphisme symétrique de E. En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres telles que $\lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_p$, montrer que

$$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad \lambda_1 \|x\|^2 \leqslant \langle f(x), x \rangle \leqslant \lambda_p \|x\|^2.$$

≫ Solution p. 24

**Exercice 28.** ✦✦✦ *Oraux HEC 2009*

Soient $(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n$ et $f$, $g$ deux endomorphismes de E symétriques et ayant des valeurs propres strictement positives.

1. Prouver qu'il existe un endomorphisme $\varphi$ de E ayant des valeurs propres positives tel que $f = \varphi^2 = \varphi \circ \varphi$.
2. Montrer que : $\mathrm{Ker}(f + g) = \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g$.

≫ Solution p. 24

## Endomorphismes particuliers d'un espace euclidien

**Exercice 29.** ✦ **Et le cas antisymétrique ?**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire usuel. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1. Montrer que la seule valeur propre réelle possible de A est 0.
2. Montrer que $\mathrm{B} = \mathrm{A}^2$ est une matrice symétrique réelle.
3. Quel est le signe des valeurs propres non nulles de B ?

≫ Solution p. 25

**Exercice 30.** ✦ **Un exemple d'endomorphisme antisymétrique**

Soit $n$ un entier au moins égal à 3. On travaille dans l'espace $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. On considère deux vecteurs $a$ et $b$ de $\mathbb{R}^n$ de norme 1 et orthogonaux. On définit sur E l'application $f$ par :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad f(x) = \langle a, x \rangle b - \langle b, x \rangle a.$$

1. Vérifier que $f$ est un endomorphisme de E.
2. a) Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.
   b) Vérifier que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.
3. Montrer que :
$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$$
4. En déduire que $f \circ f$ est un endomorphisme symétrique.
5. À quelle condition sur l'entier naturel $k$, l'endomorphisme $f^k$ est diagonalisable.

≫ Solution p. 25

**Exercice 31.** ✦✦ Soit E un espace euclidien de dimension $n$. Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. On note S (resp. T) la matrice de $f$ (resp. $g$) dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E. On suppose que S est symétrique et T antisymétrique. Montrer que :
$$\forall\, x \in \mathrm{E}, \qquad \left\|(f-g)(x)\right\| = \left\|(f+g)(x)\right\|.$$

≫ Solution p. 25

**Exercice 32.** ✦ ✎ **Adjoint $u^*$ d'un endomorphisme $u$ et endomorphismes normaux** *d'après EDHEC 2019*
Soient $\left(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ un espace euclidien de dimension $n$ et $\varphi$ un endomorphisme de E. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.

- *Définition de l'adjoint d'un endomorphisme de* E
  Pour tout $y \in \mathrm{E}$, on pose $\varphi^*(y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left\langle \varphi\left(e_i\right), y\right\rangle e_i$.

1. Vérifier que $\varphi^*$ est un endomorphisme de E et : $\quad \forall x, y \in \mathrm{E}, \qquad \langle \varphi(x), y\rangle = \left\langle x, \varphi^*(y)\right\rangle$.
2. 🔑 Que dire de $(\varphi^*)^*$ ?
3. 🔑 Comparer les matrices de $\varphi$ et $\varphi^*$ dans la base $\mathscr{B}$. En déduire que $\varphi \circ \varphi^*$ est diagonalisable.

- *Étude des endomorphismes normaux*
  Dans la suite, on suppose que $\varphi$ est un endomorphisme normal, c'est-à-dire $\varphi$ commute avec $\varphi^*$ :
$$\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi.$$

4. Montrer que : $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \|\varphi(x)\| = \left\|\varphi^*(x)\right\|$.
5. En déduire que $\operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Ker}\left(\varphi^*\right)$.
6. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par $\varphi$, alors $\mathrm{F}^\perp$ est stable par $\varphi^*$.
7. On suppose que $\varphi$ possède une valeur propre $\lambda$ et on note $\mathrm{E}_\lambda(\varphi)$ le sous espace propre associé. Montrer que $\mathrm{E}_\lambda(\varphi)$ est stable par $\varphi^*$, puis en déduire que $\mathrm{E}_\lambda^\perp$ est stable par $\varphi$.

≫ *Pour aller plus loin, HEC 2019 Maths I, Essec 2014*
≫ Solution p. 26

## Compléments

**Exercice 33.** ✦✦✦ **Une descente de gradient** *D'après ESCP 2012*
Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et $\|\cdot\|$, la norme associée, et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique réelle dont les valeurs propres sont toutes strictement positives.
On confond vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice colonne canoniquement associée et on pose, pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$,
$$\Phi(\mathrm{X}) = {}^t\mathrm{X}\mathrm{A}\mathrm{X}.$$

1. Soit B un élément de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'équation $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$ admet une unique solution qu'on notera R.
2. Montrer qu'il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ strictement positifs tels que pour tout X de $\mathbb{R}^n$
$$\alpha\|\mathrm{X}\|^2 \leqslant \Phi(\mathrm{X}) \leqslant \beta\|\mathrm{X}\|^2.$$
3. Dans la suite de l'exercice, on pose pour $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$ : $\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \Phi(\mathrm{X}) - 2\,{}^t\mathrm{B}\mathrm{X}$.
   a) Déterminer le gradient $\nabla \mathrm{F}_\mathrm{X}$ de F en X.
   b) Soient X et H deux éléments de $\mathbb{R}^n$. Montrer que
$$\mathrm{F}(\mathrm{X}+\mathrm{H}) = \mathrm{F}(\mathrm{X}) + \langle \nabla \mathrm{F}_\mathrm{X}, \mathrm{H}\rangle + \Phi(\mathrm{H}).$$

**c)** En déduire que F possède un minimum sur $\mathbb{R}^n$. En quel point est-il atteint ?

**4.** Soit $X \in \mathbb{R}^n$ fixé, $X \neq 0$. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ de façon à ce que $F(X - \alpha \nabla F_X)$ soit minimal. Calculer ce minimum.

**5.** Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$. On définit une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ par, pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$X_{k+1} = X_k - \alpha_k \nabla F_{X_k}, \text{ où } \alpha_k = \frac{\|\nabla F_{X_k}\|^2}{2\Phi(X_k)} \text{ si } X_k \neq R \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

**a)** Montrer que la suite $(F(X_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

**b)** Exprimer $F(X_{k+1}) - F(X_k)$ en fonction de $\alpha_k$ et de $\nabla F_{X_k}$.

**6.** Une suite $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sera dite convergente vers un vecteur $Z \in \mathbb{R}^n$ si $\lim\limits_{k\to+\infty} \|Y_k - Z\| = 0$, ce qui revient à dire que les coordonnées de $Y_k$ convergent vers les coordonnées correspondantes de Z.

**a)** Montrer que la suite $(\nabla F_{X_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

**b)** En déduire la limite de la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

≫ Solution p. 26

**Exercice 34.** ✦✦✦ **Exemple d'endomorphisme symétrique**

On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire définie par

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

**1.** Montrer que la relation

$$u(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)\,\mathrm{d}t$$

définit un endomorphisme $u$ de l'espace E.

**2.** Vérifier que l'endomorphisme $u$ est symétrique.

≫ Solution p. 26