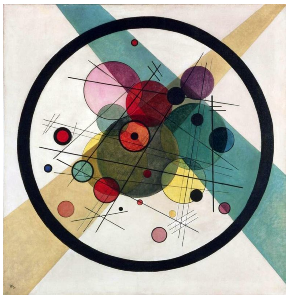
CHAPITRE 14

Endomorphismes symétriques



Cercles dans un cercle,
1923, VASSILY KANDINSKY

L'objectif principal de ce chapitre est l'étude de la réduction des matrices et endomorphismes symétriques par l'intermédiaire du théorème spectral.

1 Matrices et endomorphismes symétriques

1.1 Les définitions et exemples

DÉFINITION (RAPPEL) **matrice symétrique**

On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *est* ***symétrique*** *si* ${}^tA = A$.
Autrement dit, si $(a_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]}$ *sont les coefficients de la matrice* A *:* $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, \qquad a_{i,j} = a_{j,i}$.

Exercice 1

✦ Donner la dimension de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ défini comme le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

p. 17

DÉFINITION — **endomorphisme symétrique**

Soient, E *un espace vectoriel muni d'un produit scalaire* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *et* $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
On dit que φ *est un* ***endomorphisme symétrique*** *si*

$$\forall\, u,\, v \in \mathrm{E}, \qquad \langle\varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle.$$

Exemples.

- On définit

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x-6y, -6x-7y). \end{array} \right.$$

Pour $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et avec le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$

$$\langle\varphi(u), v\rangle = (2x-6y)x' + (-6x-7y)y' = x\left(2x'-6y'\right) + y\left(-6x'-7y'\right) = \langle u, \varphi(v)\rangle.$$

L'endomorphisme φ est symétrique.

- Soient E, un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et $u_0 \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$. Pour tout réel $a \in \mathbb{R}^+$, on définit l'endomorphisme $\varphi_a : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ par

$$\varphi_a(u) = u + a\langle u, u_0\rangle\, u_0.$$

Justifions que φ_a est symétrique. Soient $u,\, v \in \mathrm{E}$

$$\begin{aligned} \left\langle \varphi_a(u), v \right\rangle &= \left\langle u + a\langle u, u_0\rangle u_0, v \right\rangle &&= \langle u, v\rangle + a\left\langle u, u_0\right\rangle\langle u_0, v\rangle \\ &= \langle u, v\rangle + \langle u, a\langle u_0, v\rangle\, u_0\rangle &&= \langle u, v + a\langle u_0, v\rangle\, u_0\rangle \\ &= \left\langle u, \varphi_a(v) \right\rangle. \end{aligned}$$

- On pourra consulter l'exercice 22, p. 13, pour un exemple d'endomorphisme symétrique en dimension infinie.

Exercice 2

✦✦ Soient $\left(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ un espace euclidien et f, g deux endomorphismes symétriques de E.

1. Justifier que si f et g commutent alors $f \circ g$ est symétrique.
2. On souhaite prouver la réciproque. On suppose donc $f \circ g$ symétrique. p. 17
   a) Simplifier pour tous $u,\, v \in \mathrm{E}$, $\left\langle u, f \circ g(v) - g \circ f(v) \right\rangle$.
   b) En déduire que f et g commutent.

1.2 Premières propriétés

LEMME — **caractérisation via une famille génératrice**

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une famille génératrice de* E *et* $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. *Les deux énoncés suivants sont équivalents.*

i) *L'endomorphisme* φ *est symétrique.*

ii) $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \qquad \left\langle \varphi(e_i), e_j \right\rangle = \left\langle e_i, \varphi\left(e_j\right) \right\rangle.$

Preuve. Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si l'endomorphisme φ est symétrique :

$$\forall\, u,\, v \in \mathrm{E}, \qquad \langle\varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle.$$

On obtient directement le résultat avec $u = e_i$ et $v = e_j$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, supposons l'énoncé **ii)** vrai.
Soient $u,\, v \in \mathrm{E}$. Par définition d'une famille génératrice de E, il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ tels que

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad v = \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j.$$

Par linéarité de φ : $$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i) \quad \text{et} \quad \varphi(v) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \varphi(e_j).$$

Puis, par bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\langle \varphi(u), v\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i), \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j \left\langle \varphi(e_i), e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j \left\langle e_i, \varphi(e_j) \right\rangle \qquad \text{condition } \textbf{ii)} \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j \varphi_j(e_j) \right\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle.\end{aligned}$$

Ce qui prouve l'énoncé **i**).

THÉORÈME **lien avec les matrices**

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ où $\left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ est un espace euclidien. Les trois énoncés suivants sont équivalents.

- **i**) *L'endomorphisme φ est un endomorphisme symétrique de E.*
- **ii**) *Il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ soit une matrice symétrique.*
- **iii**) *Pour toutes les bases orthonormées $\mathscr{B}$ de E, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ est une matrice symétrique.*

Preuve. Rappelons que pour une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i, \varphi(e_j)\right\rangle e_i.$$

Par définition de la matrice d'une application linéaire, il vient

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} \langle e_1, \varphi(e_1)\rangle & \langle e_1, \varphi(e_2)\rangle & \cdots & \langle e_1, \varphi(e_n)\rangle \\ \langle e_2, \varphi(e_1)\rangle & \langle e_2, \varphi(e_2)\rangle & \cdots & \langle e_2, \varphi(e_n)\rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle e_n, \varphi(e_1)\rangle & \langle e_n, \varphi(e_2)\rangle & \cdots & \langle e_n, \varphi(e_n)\rangle \end{bmatrix}.$$

Par définition de la transposée

$${}^t\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} \langle e_1, \varphi(e_1)\rangle & \langle e_2, \varphi(e_1)\rangle & \cdots & \langle e_n, \varphi(e_1)\rangle \\ \langle e_1, \varphi(e_2)\rangle & \langle e_2, \varphi(e_2)\rangle & \cdots & \langle e_n, \varphi(e_2)\rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle e_1, \varphi(e_n)\rangle & \langle e_2, \varphi(e_n)\rangle & \cdots & \langle e_n, \varphi(e_n)\rangle \end{bmatrix}.$$

Le lemme précédent justifie alors directement les équivalences **i**)$\Leftrightarrow$**ii**) et **i**)$\Leftrightarrow$**iii**).

⚠ **Attention.** Il ne faut pas oublier que $\mathscr{B}$ doit être une base orthonormée !

Exemple. Si on reprend l'exemple de φ défini sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(x, y) = (2x - 6y, -6x - 7y)$, la matrice de φ dans la base canonique est bien symétrique

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}.$$

Remarque. Donnons une seconde justification de l'implication **ii**) $\Rightarrow$ **iii**).
Soit $\mathscr{B}$, une base orthonormée telle que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ soit symétrique. Soit $\mathscr{C}$, une seconde base orthonormée de E. Montrons que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi)$ est symétrique. Par la formule de changement de base, il vient

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi) = \mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}{}^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$$

et la matrice de passage $P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$ est orthogonale (c'est-à-dire ${P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}}^{-1} = {}^tP_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$). Ensuite,

$$\begin{aligned}
{}^t\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi) &= {}^t\left({P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}}^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}\right)\\
&= {}^tP_{\mathscr{B}\mathscr{C}}\,{}^t\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)\,{}^t\left({P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}}^{-1}\right)\\
&= {P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}}^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)P_{\mathscr{B}\mathscr{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi).
\end{aligned}$$

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi)$ est bien symétrique.

Exercice 3

✦✦

1. Justifier que l'ensemble $\mathscr{S}(E)$ des endomorphismes symétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
2. Si E est de dimension finie, pouvez-vous préciser sa dimension ?

p. 17

2 Réduction

2.1 Diagonalisation des endomorphismes symétriques

Premières propriétés

Proposition — espace stable

Soient φ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $\left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ et F un sous-espace vectoriel de E.

Si F *est stable par* φ,

alors $F^{\perp}$ *est également stable par* φ.

Preuve. Rappelons que

$$F^{\perp} = \left\{ v \in E \mid \forall\, u \in F,\ \ \langle u, v\rangle = 0 \right\}.$$

Soit $v \in F^{\perp}$, montrons que $\varphi(v) \in F^{\perp}$.
Soit $u \in F$. L'endomorphisme φ étant symétrique

$$\langle \varphi(v), u\rangle = \langle v, \varphi(u)\rangle = 0$$

car $v \in F^{\perp}$ et $\varphi(u) \in F$. Ainsi, pour tout $u \in F$, $\varphi(v)$ est orthogonal à u, c'est-à-dire $\varphi(v) \in F^{\perp}$.
En conclusion, $F^{\perp}$ est stable par φ. ■

Proposition — vecteurs propres orthogonaux

Soit φ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $\left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$.

Si *u et v sont deux vecteurs propres de φ associés à des valeurs propres distinctes,*

alors *les vecteurs u et v sont orthogonaux.*

Preuve. Soient u, v deux vecteurs propres de φ associés respectivement aux valeurs propres λ et μ (distinctes).

$$\begin{aligned}
\lambda\langle u, v\rangle &= \langle \lambda u, v\rangle = \langle \varphi(u), v\rangle\\
&= \langle u, \varphi(v)\rangle = \langle u, \mu v\rangle = \mu\langle u, v\rangle.
\end{aligned}$$

Or $\lambda \neq \mu$, nécessairement $\langle u, v\rangle = 0$. Les vecteurs u et v sont orthogonaux. ■

Remarque. On a la généralisation suivante. Si $e_1, \dots, e_p$ sont des vecteurs propres de φ associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, alors la famille $\left(e_1, \dots, e_p\right)$ est orthogonale.

On en déduit directement le résultat suivant.

COROLLAIRE **sous-espaces propres orthogonaux**

Soit φ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$.
Alors les sous-espaces propres de φ sont deux à deux orthogonaux.

Exemple. On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^t\!AB)$. On vérifie que $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^t\!M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un endomorphisme symétrique. L'endomorphisme φ possède deux valeurs propres : -1 et 1 où $E_1(\varphi)$, $E_{-1}(\varphi)$ désigne respectivement l'ensemble des matrices symétriques et antisymétriques. Ces sous-espaces sont donc orthogonaux.

Le théorème spectral

THÉORÈME **spectral**

Soit φ un endomorphisme d'un espace euclidien $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$.

Si *φ est un endomorphisme symétrique,*

alors
- *L'endomorphisme φ est diagonalisable.*
- *Il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de φ.*

Attention. Il ne faut pas oublier le second point du théorème : la base des vecteurs propres peut être choisie orthonormée.

Preuve. On admet que tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien admet une valeur propre réelle (voir exercice **??**, p. **??** sur le quotient de Rayleigh pour une preuve).

On raisonne par récurrence forte sur la propriété :

$\mathscr{P}(k)$: Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension k est diagonalisable dans une base orthonormée.

- *Initialisation.* $\mathscr{P}(1)$ est claire puisque la linéarité impose dans ce cas que tout endomorphisme est de la forme $\lambda\, \mathrm{id}_E$.

- *Hérédité.* Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(1), \mathscr{P}(2), \dots, \mathscr{P}(k)$ vraies et démontrons $\mathscr{P}(k+1)$. Soit φ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension $k+1$. D'après la remarque préliminaire, il existe une valeur propre λ à φ. Notons $E_\lambda(\varphi)$, le sous-espace propre associé à la valeur propre λ.
  - Si $E = E_\lambda(\varphi)$, alors $\varphi = \lambda\, \mathrm{id}_E$ et φ est directement diagonalisable dans une b.o.n de E.
  - Si $E_\lambda(\varphi) \neq E$. Alors $E_\lambda(\varphi)$ est stable par φ et d'après la première proposition de cette section, $E_\lambda(\varphi)^\perp \neq \{0_E\}$ est aussi stable par φ. On peut donc considérer l'endomorphisme $\tilde{\varphi}$ obtenu par la restriction de φ à $E_\lambda(\varphi)^\perp$. Comme φ est symétrique, $\tilde{\varphi}$ l'est aussi pour l'espace euclidien $E_\lambda(\varphi)^\perp$ muni du produit scalaire restreint.

$$\forall\, u, v \in E_\lambda(\varphi)^\perp, \qquad \langle u, \tilde{\varphi}(v)\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle = \langle \varphi(u), v\rangle = \langle \tilde{\varphi}(u), v\rangle.$$

Or $E_\lambda(\varphi)^\perp$ est de dimension comprise entre 1 et k. D'après l'hypothèse de récurrence, $\tilde{\varphi}$ est diagonalisable dans une b.o.n de $E_\lambda(\varphi)^\perp$. Soit $\tilde{\mathscr{B}}$ une telle base. Noter que les vecteurs de $\tilde{\mathscr{B}}$ constituent aussi des vecteurs propres de φ. Soit aussi $\mathscr{B}_\lambda$, une base de $E_\lambda(\varphi)$. Les vecteurs de $\mathscr{B}_\lambda$ sont des vecteurs propres de φ (associés à la valeurs propres λ). Comme

$$E_\lambda(\varphi) \underset{\perp}{\oplus} E_\lambda(\varphi)^\perp = E,$$

on peut concaténer les familles $\mathscr{B}_\lambda$ et $\tilde{\mathscr{B}}$ respectivement en une base $\mathscr{B}$ orthonormée de E. On obtient ainsi une b.o.n de E constituée de vecteurs propres de φ. L'endomorphisme φ est diagonalisable dans une b.o.n.
Si $\mathscr{P}(1), \mathscr{P}(2), \dots, \mathscr{P}(k)$ sont vraies, $\mathscr{P}(k+1)$ l'est aussi.

- *Conclusion.* Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie. ■

Remarque. La réciproque est vraie mais elle est beaucoup moins utile.

Exemples. Vérifions le théorème sur les deux premiers exemples du chapitre (page p.2).
• La matrice de φ dans la base canonique est

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminons les valeurs propres par un calcul de déterminant.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -6 \\ -6 & -7-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (2-\lambda)(-7-\lambda) - 36 \\ &= \lambda^2 + 5\lambda - 50 \\ \det(A - \lambda I_3) &= (\lambda+10)(\lambda-5). \end{aligned}$$

Il y a deux valeurs propres -10 et 5. Précisons les espaces propres. Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

$$AX = 5X \iff \begin{cases} 2x - 6y = 5x \\ -6x - 7y = 5y \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 6y = 0 \\ 6x + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\iff x + 2y = 0 \iff x = \begin{bmatrix} -2y \\ y \end{bmatrix}.$$

Ainsi $$E_5(\varphi) = \mathrm{Vect}(u_1) \quad \text{où} \quad u_1 = (-2, 1).$$

De même, on trouve
$$E_{-10}(\varphi) = \mathrm{Vect}(u_2) \quad \text{où} \quad u_2 = (1, 2).$$

Il est clair que u_1 et u_2 sont orthogonaux, $E_5(\varphi)$ et $E_{-10}(\varphi)$ le sont aussi.

• Reprenons l'exemple de φ_a du début de chapitre. On constate que

$$\varphi_a(u_0) = u_0 + a\langle u_0, u_0\rangle u_0 = \left(1 + a\|u_0\|^2\right) u_0.$$

⇀ Comme $u_0 \neq 0_E$, u_0 est vecteur propre pour la valeur propre $\lambda = 1 + a\|u_0\|^2 \neq 0$ (car $a \geqslant 0$).
⇀ De plus, pour tout $u \in \mathrm{Vect}(u_0)^\perp$, on a

$$\varphi_a(u) = u + a\overbrace{\langle u, u_0\rangle}^{=0} u_0 = u.$$

Le réel 1 est donc une seconde valeur propre pour φ_a. Précisons que $\mathrm{Vect}(u_0)^\perp$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$ car $\dim E \geqslant 2$. De plus,
$$\dim \mathrm{Vect}(u_0) = 1 \quad \text{et} \quad \dim \mathrm{Vect}(u_0)^\perp = n - 1.$$

D'où $$\dim E_1(\varphi_a) + \dim E_\lambda(\varphi_a) \geqslant n.$$

Nécessairement, il y a égalité des dimensions et même $E_\lambda(\varphi_a) \oplus E_1(\varphi_a) = E$. L'endomorphisme φ_a est diagonalisable dans une b.o.n de E. Pour trouver un telle base, on peut ajouter le vecteur normée $u_0/\|u_0\|$ à une b.o.n de $E_1(\varphi_a)$.

Exercice 4

✦✦ *Les questions sont indépendantes.*

Soit φ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

1. Que dire de φ si pour tout $u \in E$, $\langle u, \varphi(u)\rangle = 0$?
2. Justifier que $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \mathbb{R}^+$ si et seulement si φ vérifie

$$\forall u \in E, \quad \langle u, \varphi(u)\rangle \geqslant 0 \quad (\bullet)$$

p. 17

En mathématiques, les noms sont arbitraires. Libre à chacun d'appeler un opérateur auto-adjoint un éléphant" et une décomposition spectrale une "trompe". On peut alors démontrer un théorème suivant lequel "tout éléphant a une trompe". Mais on n'a pas le droit de laisser croire que ce résultat a quelque chose à voir avec de gros animaux gris.

GERALD SUSSMAN
spécialiste en intelligence artificielle (1947).

2.2 Diagonalisation des matrices symétriques réelles

Théorème spectral dans le cas matriciel

THÉORÈME — **spectral, version matricielle**

Si A *est une matrice symétrique réelle,*

alors
- *La matrice* A *est diagonalisable.*
- *Il existe une matrice orthogonale* P *et une matrice diagonale réelle* D *telles que*

$$D = P^{-1}AP = {}^tPAP.$$

Preuve. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Comme la base canonique est une b.o.n pour le produit scalaire canonique, φ est un endomorphisme symétrique en dimension finie. D'après ce qui précède φ est diagonalisable dans une b.o.n. (notée $\mathscr{C}$). Précisons que la matrice de passage, notée P, entre la base canonique et la base $\mathscr{C}$ est orthogonale (puisque les deux bases sont orthonormées). La formule de changement de base donne alors

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(\varphi) = P\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi)P^{-1} = P\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi)\,{}^tP.$$

D'où le résultat avec $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi)$ qui est bien diagonale. ■

Remarques.
- Les colonnes de la matrice P forment une b.o.n de vecteurs propres de A.
- La réciproque, qui est bien moins utile, est vraie. S'il existe P orthogonale et D diagonale telles que $A = PD{}^tP$ alors la matrice A est symétrique puisque

$${}^tA = {}^t\left(P{}^tDP\right) = {}^t\left({}^tP\right){}^tD{}^tP = PD{}^tP = A.$$

Exercice 5

Les questions sont indépendantes.

1. ✦ On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Justifier que A est diagonalisable. Calculer A^2. En déduire que $\mathrm{Sp}(A) = \{-1; 1\}$.
2. ✦ Soient A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n dont les valeurs propres sont positives ou nulles. Montrer l'équivalence p. 18

$$A = B \iff A^2 = B^2.$$

3. ✦✦ Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M + {}^tM$ soit nilpotente.
Montrer que la matrice M est antisymétrique.

Exercice 6

✦ Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1;n]\!]}$ une matrice symétrique réelle, et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres comptées sans multiplicité (c'est-à-dire que l'on prend en compte les éventuelles répétitions). Grâce au calcul de $\mathrm{Tr}\left({}^tAA\right)$, démontrer que p. 18

$$\sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} {a_{i,j}}^2 = \sum_{i=1}^n {\lambda_i}^2.$$

Proposition — **décomposition d'une matrice symétrique**

Soit A *une matrice symétrique de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Notons
- $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ *les valeurs propres de* A.
- $(X_1,\ldots,X_n)$ *une b.o.n de vecteurs propres de* A *telle que* $AX_i = \lambda_i X_i$ *pour tout* $i \in [\![1;n]\!]$.

Alors
$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i {}^tX_i = \lambda_1 X_1 {}^tX_1 + \cdots + \lambda_n X_n {}^tX_n.$$

Preuve. Posons $B = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i {}^tX_i$ de sorte que, pour $j \in [\![1;n]\!]$,
$$BX_j = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i {}^tX_i\right) X_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \left({}^tX_i X_j\right).$$
Or la famille $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est orthonormée
$${}^tX_i X_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
La somme précédente se simplifie, et on obtient
$$BX_j = \lambda_j X_j = AX_j.$$
Les endomorphismes canoniquement associés à A et B sont donc égaux sur la base $(X_1,\ldots,X_n)$, ils sont donc égaux et A = B. ■

Remarque. En particulier, A est combinaison linéaire de n matrices de projecteurs de rang 1.

Exercice 7

✦ Justifier que les matrices $X_i {}^tX_i$ pour $i \in [\![1;n]\!]$ sont des matrices de projection dont on déterminera les éléments caractéristiques (ici, une base du noyau et de l'image).

p. ??

Exercice 8

✦ On reprend les notations de l'énoncé précédent et on suppose en plus les réels λ_i positifs.

1. Montrer que la matrice $L = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} X_i {}^tX_i$ est symétrique à valeurs propres positive et vérifie l'égalité $L^2 = A$. Prouver que L commute avec A.
2. On admet que c'est la seule matrice symétrique avec des valeurs propres dont le carré vaut A et on la note $\sqrt{A}$. Montrer que si A est de plus inversible, alors on a $(\sqrt{A})^{-1} = \sqrt{A^{-1}}$.

p. 18

Pratique de la réduction des matrices symétriques

Méthode

Comment obtenir une b.o.n de vecteurs propres d'une matrice/endomorphisme symétrique ?

- Déterminer les valeurs propres.
  (Par un calcul du rang, un polynôme annulateur, le déterminant ...)
- Pour chaque valeur propre, déterminer une base de vecteurs propres.
- À l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt, déterminer une base orthonormée pour chacun des sous-espaces propres.
- On obtient une base de vecteurs propres par concaténation des bases orthonormées de chacun des sous-espaces propres.

Exemple. Partons de la matrice symétrique
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Le spectre est donné par $\mathrm{Sp}(A) = \{1;4\}$. Pour s'en convaincre, on remarque que $\mathrm{rg}(A - I_3) = 2$, donc 1 est valeur propre, l'espace propre associé est de dimension 2. Pour trouver la dernière valeur propre, on considère la trace.
- On vérifie que $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est une base de E_4 et une base de E_1 est donnée par les deux vecteurs colonnes

$$X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Comme E_4 est de dimension 1, il suffit de renormaliser X_1 pour obtenir une base orthonormée de E_4.

$$\|X_1\|^2 = 3 \quad \text{et} \quad E_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} X_1.$$

Par contre, X_2 et X_3 ne sont pas orthogonaux. On pose donc

$$E_2 = \frac{X_2}{\|X_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} X_2.$$

Puis $$V_2 = X_3 - \langle X_3, E_2\rangle\, E_2 = X_3 - \frac{\langle X_3, X_2\rangle}{\|X_2\|^2} X_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Et $$E_3 = \frac{V_2}{\|V_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- Finalement, une b.o.n de vecteurs propres de A est donnée par la famille

$$(E_1, E_2, E_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

Exercice 9

✦ Diagonaliser dans une b.o.n chacune des matrices symétriques suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

p. 18

Exercice 10

✦ On considère la matrice carrée d'ordre 3 : *d'après EMLyon 2007 E*

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

p. 18

1. Montrer, sans calcul, que A est diagonalisable.
2. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible et symétrique P, de première ligne $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et de deuxième ligne $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ telles que $A = PDP^{-1}$.

3 Formes quadratiques associées à une matrice

Définition et exemples

DÉFINITION **forme quadratique d'une matrice symétrique**

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*, symétrique. La* ***forme quadratique associée à*** A *est l'application définie sur* $\mathbb{R}^n$ *par*

$$q(h) = {}^t\mathrm{HAH}$$

où H *est la matrice des coordonnées de* h *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^n$*.*

Exemple. Si on pose $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, la forme quadratique associée est définie pour tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\begin{aligned} q(h) &= \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2h_1 + 3h_2 \\ 3h_1 - h_2 \end{bmatrix} \\ &= h_1(2h_1 + 3h_2) + h_2(3h_1 - h_2) = 2{h_1}^2 + 6h_1h_2 - {h_2}^2 = \begin{array}{cc} \mathbf{2}{h_1}^2 + & \mathbf{3}h_1h_2 \\ +\mathbf{3}h_2h_1 + & -\mathbf{1}{h_2}^2 \end{array}. \end{aligned}$$

Remarque. En généralisant le calcul précédent, on constate que pour $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$ et $h = (h_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$

$$q(h) = \sum_{i,j\in[\![1;n]\!]} a_{ij}\, h_i h_j.$$

Par symétrie de A, on peut réécrire cette expression

$$q(h) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}{h_i}^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}h_ih_j.$$

En particulier, si A est diagonale avec $\mathrm{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, on a simplement

$$q(h) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {h_i}^2.$$

Exercice 11

✦ **Forme quadratique associée à un endomorphisme symétrique**
On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. Soient φ un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ et A la matrice de φ dans la base canonique.
Justifier que si q est la forme quadratique associée à A alors

p. 18

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad q(h) = \langle h, \varphi(h) \rangle.$$

Expression de la forme quadratique dans une b.o.n

THÉORÈME **expression dans une b.o.n**

Soit q*, une forme quadratique associée à une matrice symétrique* A*. Alors il existe une base orthonormée* $\mathscr{B}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *telle que si* h *a pour coordonnées* $\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_n$ *dans* $\mathscr{B}$*, on a*

$$q(h) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{h}_i^{\,2}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *sont les valeurs propres de* A*.*

Preuve. D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = PD{}^tP$. Ainsi, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} q(h) &= {}^tHAH \\ &= {}^tHPD{}^tPH. \\ q(h) &= {}^t\tilde{H}D\tilde{H} \qquad \text{où} \quad \tilde{H} = {}^tPH. \end{aligned}$$

Il existe une base $\mathscr{B}$ telle que ${}^tP$ soit la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$. Si $\left(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \ldots, \tilde{h}_n\right)$ sont les coordonnées de H dans cette nouvelle base

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_2 \\ \vdots \\ \tilde{h}_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad q(h) = \begin{bmatrix} \tilde{h}_1, \tilde{h}_2 & \ldots & \tilde{h}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_2 \\ \vdots \\ \tilde{h}_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{h}_i^{\,2}.$$

■

Application. ✎ **L'encadrement de Rayleigh**
Si on pose $\alpha = \min \mathrm{Sp}(A)$ et $\beta = \max \mathrm{Sp}(A)$, montrons que

$$\forall\, h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \qquad \alpha \leqslant \frac{q(h)}{\|h\|^2} \leqslant \beta.$$

Il suffit de reprendre l'expression obtenue précédemment

$$q(h) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{h}_i^{\,2} \quad \text{puis,} \quad \alpha \sum_{i=1}^n \tilde{h}_i^{\,2} \leqslant q(h) \leqslant \beta \sum_{i=1}^n \tilde{h}_i^{\,2}.$$

On conclut en rappelant que pour une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ orthonormée, on a $\sum_{i=1}^n \tilde{h}_i^{\,2} = \sum_{i=1}^n \langle h, e_i\rangle^2 = \|h\|^2$.

Signe d'une forme quadratique

Exercice 12

✧ ✎ À quelles conditions nécessaires et suffisantes sur le spectre de A, a-t-on

i) $\forall\, u \in E, \qquad q(u) \geqslant 0$?

ii) $\forall\, u \in E, \qquad q(u) \leqslant 0$?

iii) $\forall\, u \in E \setminus \{0_E\}, \qquad q(u) > 0$?

iv) $\forall\, u \in E \setminus \{0_E\}, \qquad q(u) < 0$?

p. 18

Exercices - TD

Matrices symétriques

Exercice 13. ✦ Soit $n \geqslant 3$. On note $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1 sauf le coefficient en position (n, n) qui vaut 0.

1. Justifier que A est diagonalisable.
2. Vérifier que A est semblable à une matrice diagonale de la forme $D = \text{diag}(0, \ldots, 0, a, b)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
3. En calculant de deux manières la trace de A et celle de A^2, déterminer a et b.

≫ Solution p. ??

Exercice 14. ✦✦ 🔍 Soient A et B deux matrice symétriques réelles telles que les formes quadratiques associées q_A et q_B soient égales. Justifier que A = B.

≫ Solution p. 18

Exercice 15. ✦ **Rayon spectral, exemple de convergence de suite de matrices**
On munit $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique défini par $\langle M, N \rangle = {}^t MN$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit A, une matrice symétrique de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. On pose $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$.

1. Justifier que pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\| \leqslant \rho(A)\|X\|$.
2. Établir l'équivalence entre les énoncés :

i) $\rho(A) < 1$ **ii)** Pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $\left\|A^n X\right\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

≫ Solution p. 18

Matrices symétriques positives, définies positives

Exercice 16. ✦ ✎ **Définitions des symétriques définies positives et équivalences**
On dit qu'une matrice symétrique M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, on a ${}^t XMX > 0$. Montrer l'équivalence des quatre énoncés suivants :

i) M est définie positive.

ii) Les valeurs propres de M sont strictement positives.

iii) Il existe P orthogonale, D diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telles que $M = PD\,{}^t P$.

iv) Il existe une matrice R inversible et symétrique telle que $M = R^2$.

≫ Solution p. 19

Exercice 17. ✦✦✦ **Racine carrée d'une matrice de $\mathscr{S}_n^+$**
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives. Soit $A \in \mathscr{S}_n^+$.

1. Montrer qu'il existe $R \in \mathscr{S}_n^+$ telle que $A = R^2$. On dit que R est une racine carrée de A.
2. Soient R_1 et R_2 deux racines carrées de A appartenant à $\mathscr{S}_n^+$.
   Montrer que R_1 et R_2 ont les mêmes valeurs propres et les mêmes vecteurs propres. En déduire que la matrice A admet une unique racine carrée dans $\mathscr{S}_n^+$ notée dans la suite $\sqrt{A}$.
3. *Expression de $\sqrt{A}$ via les polynômes de Lagrange.*
   Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, les p valeurs propres de A deux à deux distinctes. Pour tout $j \in [\![1; p]\!]$, on définit le polynôme :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i \in [\![1;p]\!] \\ i \neq j}} \frac{x - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}.$$

   a) Montrer que $\mathscr{B} = (L_1, \ldots, L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[x]$. En déduire l'existence d'un unique polynôme P de $\mathbb{R}_{p-1}[x]$ tel que, pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, $P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$.

   b) Exprimer $\sqrt{A}$ comme un polynôme en A.

4. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. vérifier que A est dans S_n^+ et déterminer $\sqrt{A}$.

≫ Solution p. 19

Exercice 18. ✦✦✦ **Matrices symétriques positives et définies positives**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $S = \left(a_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, \quad a_{ij} > 0.$$

On note β la plus grande valeur propre de S et V le sous-espace propre de S associé à β. On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique et de la norme associée $\|\cdot\|$.

1. Soit $X_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in V\backslash\{0\}$. On note $|X_0| = \begin{bmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{bmatrix}$.
   - **a)** Montrer ${}^tX_0SX_0 \leqslant {}^t|X_0|\,S\,|X_0|$ et en déduire : $|X_0| \in V$.
   - **b)** Montrer que les coordonnées de $S|X_0|$ sont toutes strictement positives et en déduire que X_0 n'a aucune coordonnée nulle.
   - **c)** Montrer : ${}^tX_0SX_0 = {}^t|X_0|\,S\,|X_0|$ et en déduire que les coordonnées de X_0 sont toutes de même signe.
2. - **a)** En déduire qu'il n'existe pas deux vecteurs de $V\backslash\{0\}$ orthogonaux entre eux.
   - **b)** Conclure : $\dim(V) = 1$.

≫ Solution p. ??

Endomorphismes symétriques

Exercice 19. ✦ Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et φ un endomorphisme symétrique de E. Démontrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont supplémentaires orthogonaux.

≫ Solution p. 20

Exercice 20. ✧ **Vrai ou faux ?**
Si $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la décomposition en sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien, alors $\mathscr{B}$ est une base orthogonale.

≫ Solution p. 20

Exercice 21. ✦✦ **La symétrie implique la linéarité**
Soit $\varphi : E \to E$ tel que, pour tous $u, v \in E$, on a $\langle \varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle$. Justifier que φ est un endomorphisme.

≫ Solution p. 20

Exercice 22. ✦ **Exemple d'endomorphisme symétrique en dimension infinie** *D'après EMLyon 2011*
On note $E = \mathscr{C}^\infty([0;1];\mathbb{R})$, muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par :

$$\forall f, g \in E, \qquad \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

et, pour toute fonction $f \in E$, on pose

$$T(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(x^2 - x\right)f''(x) + (2x-1)f'(x). \end{array} \right.$$

Montrer que T est un endomorphisme symétrique de E.

≫ Solution p. 20

Exercice 23. ✦ **Endomorphisme symétrique et produit scalaire** *d'après EDHEC 2015*
On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ qui est orthonormée pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, symétrique, dont les valeurs propres sont toutes strictement positives.

1. Justifier l'existence d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, formée de vecteurs propres de f.
2. - **a)** Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on a : $\langle x, f(x)\rangle \geqslant 0$.
   - **b)** Vérifier que l'égalité $\langle x, f(x)\rangle = 0$ a lieu si et seulement si $x = 0$.
   - **c)** En déduire que l'application φ, de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, définie par $\varphi(x,y) = \langle x, f(y)\rangle$, est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

3. a) En utilisant $\mathscr{B}'$, montrer qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^n$, symétrique pour le produit scalaire canonique, dont les valeurs propres sont strictement positives, et tel que $g^2 = f$.
   b) Établir que g est bijectif.
   c) Montrer que la famille $\left(g^{-1}(e_1), g^{-1}(e_2), \ldots, g^{-1}(e_n)\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire φ.

≫ Solution p. 21

Exercice 24. ✦✦ *D'après ESCP 2011.*

Soit n un entier naturel non nul. On désigne par E un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout vecteur x de E, on pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

1. a) L'application f est-elle un endomorphisme de E ?
   b) L'application f est-elle injective ? surjective ?
   c) L'application f est-elle un endomorphisme symétrique de E ?
   d) Caractériser les bases $(e_1, \ldots, e_n)$ telles que f soit un projecteur.
2. a) Montrer que les valeurs propres de f sont strictement positives.
   b) Montrer qu'il existe un isomorphisme symétrique s de E à valeurs propres strictement positives tel que $s = (s \circ f)^{-1}$.
   c) Montrer que $(s(e_1), \ldots, s(e_n))$ est une base orthonormée de E.
   d) Que dire de f si la matrice de s dans $\mathscr{B}$ est une matrice orthogonale ?

≫ Solution p. 21

Exercice 25. ✦✦ ✎

Soient $\left(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ un espace euclidien de dimension n, et f un endomorphisme symétrique de E. En notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres telles que $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_p$, montrer que

$$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad \lambda_1 \|x\|^2 \leqslant \langle f(x), x \rangle \leqslant \lambda_p \|x\|^2.$$

≫ Solution p. 22

Exercice 26. ✦✦✦ *Oraux HEC 2009*

Soient $\left(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ un espace euclidien de dimension n et f, g deux endomorphismes de E symétriques et ayant des valeurs propres strictement positives.

1. Prouver qu'il existe un endomorphisme φ de E ayant des valeurs propres positives tel que $f = \varphi^2 = \varphi \circ \varphi$.
2. Montrer que : $\operatorname{Ker}(f+g) = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$.

≫ Solution p. 22

Endomorphismes particuliers d'un espace euclidien

Exercice 27. ✦ **Et le cas antisymétrique ?**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire usuel. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1. Montrer que la seule valeur propre réelle possible de A est 0.
2. Montrer que $\mathrm{B} = \mathrm{A}^2$ est une matrice symétrique réelle.
3. Quel est le signe des valeurs propres non nulles de B ?

≫ Solution p. 23

Exercice 28. ✦ **Un exemple d'endomorphisme antisymétrique**

Soit n un entier au moins égal à 3. On travaille dans l'espace $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. On considère deux vecteurs a et b de $\mathbb{R}^n$ de norme 1 et orthogonaux. On définit sur E l'application f par :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad f(x) = \langle a, x \rangle b - \langle b, x \rangle a.$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E.
2. a) Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.
   b) Vérifier que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.

3. Montrer que :
$$\forall (x,y)\in E^2,\quad \langle f(x),y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$$
4. En déduire que $f\circ f$ est un endomorphisme symétrique.
5. À quelle condition sur l'entier naturel k, l'endomorphisme f^k est diagonalisable.

≫ Solution p. 23

Exercice 29. ✦✦ Soit E un espace euclidien de dimension n. Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f\circ g = g\circ f$. On note S (resp. T) la matrice de f (resp. g) dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E. On suppose que S est symétrique et T antisymétrique. Montrer que :
$$\forall x\in E,\qquad \|(f-g)(x)\| = \|(f+g)(x)\|.$$

≫ Solution p. 24

Exercice 30. ✦ ✎ **Adjoint u^* d'un endomorphisme u et endomorphismes normaux** *d'après EDHEC 2019*
Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension n. On note $\mathscr{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E.

Partie A. Définition de l'adjoint d'un endomorphisme de E
Dans toute cette partie, u désigne un endomorphisme de E. On se propose de montrer qu'il existe un unique endomorphisme de E, noté u^*, qui à tout vecteur y de E associe le vecteur $u^*(y)$ vérifiant :
$$\forall x\in E,\quad \langle u(x),y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle.$$
Montrer que si u^* existe, alors on a, pour tout y de E :
$$u^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i$$
En déduire que si u^* existe, alors u^* est unique.

1. Vérifier que l'application u^* définie par l'égalité établie à la question 1a) est effectivement un endomorphisme de E.
2. Conclure que cette application est solution du problème posé, c'est-à-dire que c'est l'unique endomorphisme de E, appelé adjoint de u, vérifiant :
$$\forall (x,y)\in E^2,\quad \langle u(x),y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

Partie B. Étude des endomorphismes normaux
On dit que u est un endomorphisme normal quand on a l'égalité :
$$u\circ u^* = u^*\circ u.$$

3. Soit f un endomorphisme symétrique de E. Donner son adjoint et vérifier que f est normal.

   Dans la suite, u désigne un endomorphisme normal.
4. a) Montrer que : $\forall x\in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
   b) En déduire que $\mathrm{Ker}(u)=\mathrm{Ker}(u^*)$.
5. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.
6. On suppose que u possède une valeur propre λ et on note E_λ le sous espace propre associé.
   a) Montrer que E_λ est stable par u^*.
   b) Établir que $(u^*)^* = u$ puis en déduire que $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

≫ *Pour aller plus loin, HEC 2019 Maths I, Essec 2014*
≫ Solution p. 24

Compléments

Exercice 31. ✦✦✦ **Une descente de gradient** *D'après ESCP 2012*
Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et $\|\cdot\|$, la norme associée, et $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique réelle dont les valeurs propres sont toutes strictement positives.
On confond vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice colonne canoniquement associée et on pose, pour tout $X\in\mathbb{R}^n$,
$$\Phi(X) = {}^tXAX.$$

1. Soit B un élément de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'équation $AX=B$ d'inconnue $X\in\mathbb{R}^n$ admet une unique solution qu'on notera R.

2. Montrer qu'il existe deux réels α et β strictement positifs tels que pour tout X de $\mathbb{R}^n$

$$\alpha\|X\|^2 \leqslant \Phi(X) \leqslant \beta\|X\|^2.$$

3. Dans la suite de l'exercice, on pose pour $X \in \mathbb{R}^n$: $F(X) = \Phi(X) - 2\,{}^tBX$.

   a) Déterminer le gradient ∇F_X de F en X.

   b) Soient X et H deux éléments de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

   $$F(X+H) = F(X) + \langle \nabla F_X, H\rangle + \Phi(H).$$

   c) En déduire que F possède un minimum sur $\mathbb{R}^n$. En quel point est-il atteint ?

4. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ fixé, $X \neq 0$. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ de façon à ce que $F\left(X - \alpha\nabla F_X\right)$ soit minimal. Calculer ce minimum.

5. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$. On définit une suite $\left(X_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ par, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$X_{k+1} = X_k - \alpha_k \nabla F_{X_k}, \text{ où } \alpha_k = \frac{\left\|\nabla F_{X_k}\right\|^2}{2\Phi\left(X_k\right)} \text{ si } X_k \neq R \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

   a) Montrer que la suite $\left(F\left(X_k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

   b) Exprimer $F\left(X_{k+1}\right) - F\left(X_k\right)$ en fonction de α_k et de ∇F_{X_k}.

6. Une suite $\left(Y_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sera dite convergente vers un vecteur $Z \in \mathbb{R}^n$ si $\lim\limits_{k\to+\infty} \left\|Y_k - Z\right\| = 0$, ce qui revient à dire que les coordonnées de Y_k convergent vers les coordonnées correspondantes de Z.

   a) Montrer que la suite $\left(\nabla F_{X_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   b) En déduire la limite de la suite $\left(X_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

≫ Solution p. 24

Exercice 32. ✦✦✦ **Exemple d'endomorphisme symétrique**

On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire définie par

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

1. Montrer que la relation

$$u(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)\,dt$$

   définit un endomorphisme u de l'espace E.

2. Vérifier que l'endomorphisme u est symétrique.

≫ Solution p. 24

Indications et solutions

Indication de l'exercice 16 p. 12

Vérifier que la matrice $A-B$ est symétrique réelle et avec une forme quadratique nulle. En déduire que $A-B$ est la matrice nulle.

Exercice 1 p. 1

Notons E_{ij}, les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Une base de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est donnée par

$$E_{ii} \quad \text{où} \quad i \in [\![1;n]\!],$$

$$E_{ij}+E_{ij} \quad \text{où} \quad (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \text{ avec } i<j.$$

D'où $$\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = n + \binom{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 2 p. 2

1. Soient $u, v \in E$

$$\begin{aligned}
\langle f\circ g(u), v\rangle &= \langle f(g(u)), v\rangle \\
&= \langle g(u), f(v)\rangle && f \text{ est symétrique} \\
&= \langle u, g\circ f(v)\rangle && g \text{ est symétrique} \\
&= \langle u, f\circ g(v)\rangle && f, g \text{ commutent.}
\end{aligned}$$

Donc $f\circ g$ est symétrique.

2.a) On a

$$\langle x, f\circ g(y) - g\circ f(y)\rangle = \langle x, f\circ g(y)\rangle - \langle x, g\circ f(y)\rangle.$$

Or $f\circ g$ est symétrique donc

$$\langle x, f\circ g(y)\rangle = \langle f\circ g(x), y\rangle$$

et en reprenant le calcul de la question 1,

$$\langle x, g\circ f(y)\rangle = \langle g(x), f(y)\rangle = \langle f\circ g(x), y\rangle.$$

Finalement $$\langle x, f\circ g(y) - g\circ f(y)\rangle = 0.$$

2.b) Soit $y \in E$. Le vecteur $(f\circ g - g\circ f)(y)$ est donc orthogonal à tout vecteur $x \in E$, il est donc nul. D'où

$$\forall y \in E, \quad (f\circ g - g\circ f)(y) = 0,$$

c'est-à-dire $$f\circ g - g\circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

puis $f\circ g = g\circ f$, les endomorphismes commutent.

Exercice 3 p. 4

1. L'application nulle $x \in E \mapsto 0_E \in E$ est symétrique.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathscr{S}(E)$. Soient $u, v \in E$

$$\begin{aligned}
\langle (\lambda f + \mu g)(u), v\rangle &= \lambda\langle f(u), v\rangle + \mu\langle g(u), v\rangle \\
&= \lambda\langle u, f(v)\rangle + \mu\langle u, g(v)\rangle \\
&= \langle u, (\lambda f + \mu g)(v)\rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi $\lambda f + \mu g \in \mathscr{S}(E)$.
$\mathscr{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

2. Fixons $\mathscr{B}$, une base orthonormée de E. Rappelons que l'application

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ \varphi & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.
Posons $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. D'après ce qui précède, l'application suivante est bien définie

$$\tilde{\Phi} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{S}(E) & \to & \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \\ \varphi & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi). \end{array} \right.$$

D'après le rappel et par restriction, $\tilde{\Phi}$ est linéaire et injective.
Prouvons la surjectivité : soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. PAr surjectivité de Φ, il existe un endomorphisme φ tel que

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi).$$

Comme A est symétrique, le théorème précédent permet d'affirmer que $\varphi \in \mathscr{S}(E)$.
Concluons en reprenant l'exercice 1 :

$$\dim \mathscr{S}(E) = \dim \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 4 p. 6

1. Appliquons le théorème spectral. Il existe $\mathscr{B}$ une base orthonormée constituée de vecteurs propres. Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi)$ et e, un vecteur propre

$$\varphi(e) = \lambda e \quad \text{et} \quad e \neq 0_E.$$

Par hypothèse sur φ

$$0 = \langle e, \varphi(e)\rangle = \langle e, \lambda e\rangle = \lambda \underbrace{\|e\|^2}_{\neq 0}.$$

D'où $\lambda = 0$. Ensuite, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = 0$ et φ est l'endomorphisme nul.
Réciproquement, ce dernier est bien symétrique et vérifie bien la condition.

2. Raisonnons par double implication.
Si (•) est vérifiée, en reprenant le raisonnement précédent, on a

$$\lambda \underbrace{\|e\|^2}_{>0} = \langle e, \varphi(e)\rangle \geqslant 0.$$

D'où $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \mathbb{R}^+$.
Réciproquement, supposons que $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \mathbb{R}^+$.
Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée constituée de vecteurs propres $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Soit $(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^n$ tel que

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad \varphi\left(e_i\right) = \lambda_i e_i.$$

Soit $u \in \mathrm{E}$, par définition d'une base, il existe des réels $\mu_1, \cdots, \mu_n$ tels que

$$u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i.$$

(on a même $\mu_i = \langle u, e_i\rangle$). Puis, par linéarité de φ

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \varphi\left(e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i e_i.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\langle u, \varphi(u)\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i e_i \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_k \lambda_i \mu_i \underbrace{\langle e_k, e_i\rangle}_{=0 \text{ si } k \neq i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_k \underbrace{\mu_k{}^2}_{\geqslant 0} \geqslant 0.
\end{aligned}$$

La condition (•) est vérifiée.

Exercice 5 — p. 7

1. La matrice A est symétrique donc diagonalisable. On a

$$\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_3.$$

Le polynôme $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ est annulateur. D'où

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \{-1; 1\}.$$

Comme A est diagonalisable, $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \neq \varnothing$. De plus, le cas $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(\mathrm{A})) = 1$ est à exclure car A serait diagonalisable avec une seule valeur propre, donc semblable à une matrice $\lambda \mathrm{I}_n$, et même égale à une matrice $\lambda \mathrm{I}_n$. Absurde. Finalement, $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(\mathrm{A})) = 2$ et l'égalité s'en déduit.

2.

3. La matrice ${}^t\mathrm{M} + \mathrm{M}$ est une matrice symétrique, donc diagonalisable. De plus, par hypothèse, ${}^t\mathrm{M} + \mathrm{M}$ est nilpotente, il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ tel que le polynôme x^p soit annulateur de ${}^t\mathrm{M} + \mathrm{M}$. Le réel 0 est donc la seule valeur possible pour ${}^t\mathrm{M} + \mathrm{M}$. Finalement ${}^t\mathrm{M} + \mathrm{M}$ est semblable à la matrice nulle, c'est la matrice nulle et ${}^t\mathrm{M} = -\mathrm{M}$.

Exercice 6 — p. 7

D'une part, on a vu (voir exercice **??**) que

$$\mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{AA}\right) = \sum_{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2} a_{ij}{}^2.$$

D'autre part, le théorème spectral justifie l'existence d'une matrice orthogonale P et d'une matrice diagonale D telles que

$$\mathrm{A} = \mathrm{PD}{}^t\mathrm{P} \quad \left(\text{avec } {}^t\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}\right).$$

D'où

$$\begin{aligned}
{}^t\mathrm{AA} &= \left(\mathrm{PD}{}^t\mathrm{P}\right)\mathrm{PD}{}^t\mathrm{P} \\
&= \mathrm{PD}{}^t\mathrm{PPD}{}^t\mathrm{P} \\
&= \mathrm{PD}^2{}^t\mathrm{P} = \mathrm{PD}^2\mathrm{P}^{-1}.
\end{aligned}$$

Or deux matrices semblables ont même trace

$$\mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{AA}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{D}^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i{}^2$$

car on rappelle que les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A.

Exercice 8 — p. 8

Exercice 9 — p. 9

Exercice 10 — p. 9

Exercice 11 — p. 10

D'une part, on vient de voir que

$$q(h) = \sum_{i,j \in [\![1;n]\!]} a_{i,j} h_i h_j.$$

D'autre part, en notant $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\langle h, \varphi(h)\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} h_i e_i, \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} h_j e_j\right)\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} h_i h_j \left\langle e_i, \varphi\left(e_j\right)\right\rangle.
\end{aligned}$$

Or par construction de la matrice A_i, $a_{i,j}$ représente la coordonnée de $\varphi\left(e_j\right)$ suivant e_i. Comme $(e_1, \ldots, e_n)$ est une b.o.n, cette dernière est justement $\left\langle e_i, \varphi\left(e_j\right)\right\rangle$. Ce qui conclut.

Exercice 12 — p. 11

Vérifier que

i)	$\Longleftrightarrow$	$\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \mathbb{R}^+$
ii)	$\Longleftrightarrow$	$\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \mathbb{R}^-$
iii)	$\Longleftrightarrow$	$\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \mathbb{R}^+_*$
iv)	$\Longleftrightarrow$	$\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \mathbb{R}^-_*$.

Exercice 15 — p. 12

1. Soient $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_p \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ une base de vecteurs propres de A. D'après le théorème spectral, il existe $\left(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_p\right)$ une base orthonormée constituée de vecteurs propres de A. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, les valeurs propres associées :

$$\forall\, i \in [\![1; p]\!], \qquad \mathrm{AX}_i = \lambda_i \mathrm{X}_i.$$

Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, il existe des réels $\mu_1, \ldots, \mu_p$ tels que

$$X = \sum_{i=1}^{p} \mu_i X_i,$$

puis
$$AX = \sum_{i=1}^{p} \mu_i AX_i = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \lambda_i X_i,$$

ensuite, par bilinéarité du produit scalaire

$$\begin{aligned}
\|AX\|^2 = \langle AX, AX\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{p} \mu_i \lambda_i X_i, \sum_{j=1}^{p} \mu_j \lambda_j X_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \mu_i \lambda_i \mu_j \lambda_j \underbrace{\left\langle X_i, X_j \right\rangle}_{\delta_{i,j}} \\
&= \sum_{i=1}^{p} (\mu_i \lambda_i)^2 \leqslant \rho(A) \sum_{i=1}^{p} {\mu_i}^2 \\
&\leqslant \rho(A) \|X\|^2.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Raisonnons par double implication.

i)⇒ii) On monte par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant \left\|A^n X\right\| \leqslant \rho(A)^n \cdot \|X\|.$$

Or $\rho(A) \in]-1;1[$, $\rho(A)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Par le théorème d'encadrement

$$\left\|A^n X\right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On dit alors que la suite de matrices $(A^n)_n$ converge vers la matrice nulle.

ii)⇒i). Prouvons la réciproque par contraposée. Supposons donc $\rho(A) \geqslant 1$. Il existe donc une valeur propre λ avec $|\lambda| \geqslant 1$ et $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ tels que :

$$AX = \lambda X \quad \text{et} \quad X \neq 0_{p,1}.$$

Puis pour $n \in \mathbb{N}$

$$\left\|A^n X\right\| = |\lambda|^n \cdot \|X\| \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0.$$

Ce qui prouve la seconde implication.

Exercice 16

p. 12

i)⇒ii) Supposons M définie positive. Soit X un vecteur propre associé à λ. On a donc

$$MX = \lambda X \quad \text{et} \quad X \neq 0_{n,1}$$

puis
$$0 \leqslant {}^t XMX = \lambda\, {}^t XX = \lambda \underbrace{\|X\|^2}_{\neq 0}$$

Nécessairement, $\lambda > 0$ et $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_*^+$.

ii)⇒iii) Supposons que $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_*^+$. Comme M est symétrique, il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, D diagonale telles que $M = PD^tP$ (théorème spectral). Comme les coefficients diagonaux de D correspond aux valeurs propres de M, ces coefficients sont bien strictement positifs. L'énoncé **iii**)est prouvé.

iii)⇒iv) Supposons **iii**). Posons

$$\tilde{D} = \mathrm{diag}\left(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \ldots, \sqrt{d_n}\right) \text{ où } D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$$

et
$$R = P\tilde{D}P^t = P\tilde{D}P^{-1}.$$

Ainsi
$$\begin{aligned}
R^2 &= P\tilde{D}P^{-1} \cdot P\tilde{D}P^{-1} = P\tilde{D}^2 P^{-1} \\
&= PDP^{-1} = M.
\end{aligned}$$

Précisons que R est symétrique

$${}^t R = {}^t(P\tilde{D}P^t) = {}^t({}^t P)\, {}^t\tilde{D}\, {}^t P = P\tilde{D}\, {}^t P = R$$

et R est inversible par produit de matrices inversibles. L'énoncé **iv**)est vérifié.

iv)⇒i) Supposons **iv**). Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$.

$$\begin{aligned}
{}^t XMX &= {}^t XR^2 X = {}^t X\, {}^t\, {}^t R \cdot RX \\
&= {}^t(RX)(RX) = \|RX\|^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

Si de plus $\|RX\|^2 = 0$ alors $RX = 0$, et $X \in \mathrm{Ker}\, R$. Comme R est inversible, $\mathrm{Ker}\, R = \{0_{n,1}\}$, $X = 0_{n,1}$. Cas exclu au début. Dès lors

$${}^t XMX > 0.$$

La matrice M est définie positive.

Exercice 17

p. 12

1. Il suffit de reprendre l'implication **iii**)⇒**iv**)de l'exercice précédent.

2. Soit X un vecteur propre de R_1 associé à une valeur propre λ. On a donc

$$R_1 X = \lambda X \quad \text{et} \quad X \neq 0_{n,1}.$$

On en déduit que

$${R_2}^2 X = A^2 X, \quad {R_1}^2 X = \lambda^2 X.$$

Dès lors

$$(R_2 - \lambda I_n)(R_2 + \lambda I_n) X = {R_2}^2 X - \lambda^2 X = 0_{n,1}$$

La matrice $(R_2 - \lambda I_1)(R_2 + \lambda I_n)$ n'est pas inversible. Comme $-\lambda < 0$, $-\lambda$ n'appartient pas au spectre de R_2 et $R_2 + \lambda I_n$ est inversible. En multipliant par $(R_2 + \lambda I_n)^{-1}$, il vient

$$(R_2 - \lambda I_n) X = 0_{n,1} \quad \text{et} \quad X \neq 0_{n,1}.$$

Ainsi X est vecteur propre de R_2 et λ est une valeur propre de R_2. On vient de montrer que tout vecteur propre de R_1 est un vecteur propre de R_2 et toute valeur propre de R_2 est valeur propre de R_2.
Par symétrie des rôles entre R_1 et R_2, on obtient bien l'énoncé demandé.

3.a) On a $L_i(x) \in \mathbb{R}_{p-1}[x]$.
Soient $\mu_1 \ldots \mu_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_i L_i(x) = 0.$$

En évaluant en λ_j (pour j fixé), on a directement $\mu_j L_j\left(\lambda_j\right) = \mu_j = 0$. La famille $\mathscr{B}$ est donc libre. Comme elle contient autant de vecteurs que la dimension, $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[x]$.

- Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons qu'il existe un polynôme P solution du problème. Soient $\mu_1 \cdots \mu_p \in \mathbb{R}$, les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$:

$$\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \mathrm{L}_i.$$

En évaluant en λ_j pour j fixé, on a :

$$\sqrt{\lambda_j} = \mathrm{P}\left(\lambda_j\right) = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \mathrm{L}_i\left(\lambda_j\right) = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \delta_{ij} = \mu_j.$$

En particulier, on a montré ici que si P existe alors il est unique et donné par $\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{p} \sqrt{\lambda_i} \mathrm{L}_i$.

Synthèse. Posons $\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{p} \sqrt{\lambda_i} \mathrm{L}_i \in \mathbb{R}_{p-1}[x]$. On vérifie que pour tout $j \in [\![1;p]\!]$

$$\mathrm{P}\left(\lambda_j\right) = \sqrt{\lambda_j}.$$

Ceci prouve l'existence.

3.b) Comme A est symétrique, il existe Q orthogonale, D diagonale telles que :

$$\mathrm{A} = \mathrm{QD}{}^t\mathrm{Q} \quad \left({}^t\mathrm{Q} = \mathrm{Q}^{-1}\right).$$

La racine carrée est donnée par

$$\sqrt{\mathrm{A}} = \mathrm{Q}\sqrt{\mathrm{D}}{}^t\mathrm{Q}.$$

où $\sqrt{\mathrm{D}}$ est la matrice diagonal

$$\sqrt{\mathrm{D}} = \mathrm{diag}\left(\sqrt{d_1}, \ldots, \sqrt{d_n}\right) \quad \text{si } \mathrm{D} = \mathrm{diag}\,(d_1 \ldots, d_n)$$

Or pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $d_i \in \mathrm{Sp(A)}$ et $\mathrm{P}\left(d_i\right) = \sqrt{d_i}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathrm{P(D)} &= \mathrm{diag}\,(\mathrm{P}\,(d_1), \ldots, \mathrm{P}\,(d_n)) \\ &= \mathrm{diag}\left(\sqrt{d_1}, \ldots, \sqrt{d_n}\right) = \sqrt{\mathrm{D}}. \end{aligned}$$

Or on démontre que (par exemple à l'exercice **??**)

$$\begin{aligned} \mathrm{P(A)} &= \mathrm{P}\left(\mathrm{QDQ}^{-1}\right) \\ &= \mathrm{QP(D)Q}^{-1} \\ &= \mathrm{Q}\sqrt{\mathrm{D}}\mathrm{Q}^{-1} = \sqrt{\mathrm{A}}. \end{aligned}$$

La racine carrée $\sqrt{\mathrm{A}}$ est bien un polynôme en A.

4.

Exercice 19 p. 13

Soient $u \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ et $v \in \mathrm{Im}\,\varphi$. On a donc $\varphi(u) = 0$ et l'existence de $w \in \mathrm{E}$ tel que $\varphi(w) = v$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle &= \langle u, \varphi(w)\rangle \\ &= \langle \varphi(u), w\rangle \quad \varphi \text{ symétrique} \\ &= \langle 0, w\rangle = 0. \end{aligned}$$

Ce calcul étant valable pour tous $v \in \mathrm{Ker}\,\varphi$, $u \in \mathrm{Im}\,\varphi$, les sous-espaces $\mathrm{Ker}\,\varphi$ et $\mathrm{Im}\,\varphi$ sont orthogonaux. En particulier

$$\mathrm{Ker}\,\varphi \cap \mathrm{Im}\,\varphi = \{0_{\mathrm{E}}\}.$$

De plus, par la formule du rang :

$$\dim \mathrm{Ker}\,\varphi + \dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim \mathrm{E}.$$

Ces espaces sont aussi supplémentaires dans E.

Exercice 20 p. 13

Faux. D'après le théorème spectral, on peut choisir une b.o.n mais toute base n'est pas forcement orthogonale. L'endomorphisme id_{E} donne un contre-exemple car toutes les bases de E sont adaptées à la décomposition.

Exercice 21 p. 13

Soient u, $v \in \mathrm{E}$. Soients λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Pour $w \in \mathrm{E}$

$$\begin{aligned} \langle \varphi(\lambda u + \mu v), w\rangle &= \langle \lambda u + \mu v, \varphi(w)\rangle \\ &= \lambda\langle u, \varphi(w)\rangle + \mu\langle v, \varphi(w)\rangle \\ &= \lambda\langle \varphi(u), w\rangle + \mu\langle \varphi(v), w\rangle \\ &= \langle \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v), w\rangle. \end{aligned}$$

Il vient $\quad \left\langle \underbrace{\varphi(\lambda u + \mu v) - \left(\lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v)\right)}_{=\mathrm{X}}, w\right\rangle = 0.$

Autrement dit, le vecteur X est orthogonal à tout vecteur w de E. C'est nécessairement le vecteur nul et

$$\varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v).$$

L'application φ est linéaire.

Exercice 22 p. 13

- Précisons que pour tout $f \in \mathrm{E}$, f'', $f' \in \mathrm{E}$ et par produit de fonctions $\mathscr{C}^\infty$, $\mathrm{T}(f) \in \mathrm{E}$. Justifions que T est bien linéaire en utilisant la linéarité de la dérivation.

Soient $f, g \in \mathrm{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que

$$\mathrm{T}(f + \lambda g) = \mathrm{T}(f) + \lambda\mathrm{T}(g).$$

C'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{T}(f + \lambda g)(x) = \mathrm{T}(f)(x) + \lambda\mathrm{T}(g)(x).$$

Or, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(f + \lambda g)(x) &= \left(x^2 - x\right)(f + \lambda g)'(x) + (2x - 1)\left(f + \lambda g\right)'(x) \\ &= \left(x^2 - x\right) f''(x) + (2x - 1) f'(x) \\ &\quad + \lambda\left(\left(x^2 - x\right) g''(x) + (2x - 1) g'(x)\right) \\ &= \mathrm{T}(f)(x) + \lambda\mathrm{T}(g)(x). \end{aligned}$$

L'application T est donc un endomorphisme de E.

• Soient $f, g \in \mathrm{E}$

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{T}(f), g\rangle &= \int_0^1 \mathrm{T}(f)(x) g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(x^2 - x\right) f''(x) g(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (2x-1) f'(x) g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Intégrons par parties (les fonctions considérées sont de classe $\mathscr{C}^1$)

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \left(x^2 - x\right) g(x) f''(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\left(x^2 - x\right) g(x) f'(x)\right]_0^1 \\ &\quad - \int_0^1 \left[(2x-1) g(x) + \left(x^2 - x\right) g'(x)\right] f'(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

D'où $$\langle \mathrm{T}(f), g\rangle = -\int_0^1 g'(x) f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

On constate que cette expression est symétrique en f et g. On peut intervertir les rôles et obtenir :

$$\langle \mathrm{T}(g), f\rangle = -\int_0^1 f'(x) g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

On en déduit que

$$\langle f, \mathrm{T}(g)\rangle = \langle \mathrm{T}(f), g\rangle.$$

L'endomorphisme T est symétrique.

Exercice 23 p. 13

1. C'est une conséquence directe du théorème spectral avec f symétrique.

2.a,b) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_*^+$ tels que

$$\forall i \in [\![1; n]\!], \quad f\left(u_i\right) = \lambda u_i.$$

On vérifie que pour $x = \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k$, on a

$$\langle x, f(x)\rangle = \sum_{k=1}^{n} {\mu_k}^2 \lambda_k \geqslant 0$$

avec égalité si et seulement si, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, ${\mu_k}^2 \lambda_k = 0$, c'est-à-dire, $\mu_k = 0$. Finalement $\langle x, f(x)\rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

2.c) L'application φ est :

→ Symétrique. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \langle x, f(y)\rangle \\ &= \langle f(x), y\rangle \quad \text{symétrie de } f \\ &= \langle y, f(x)\rangle = \varphi(y, x).\end{aligned}$$

→ Bilinéaire. Pour tous $z, x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda x + \mu y, z) &= \langle \lambda x + \mu y, f(z)\rangle \\ &= \lambda\langle x, f(z)\rangle + \mu\langle y, f(z)\rangle\end{aligned}$$

On en déduit la linéarité à gauche et donc, par symétrie, la linéarité à droite.

→ Définie positive. C'est prouvé à la question précédente.

3.a) Rappelons que pour définir un endomorphisme g de $\mathbb{R}^n$, il suffit de donner l'image d'une base de $\mathbb{R}^n$. Dans notre cas , il suffit de préciser $g(u_i$ pour tout indice i.
On sait que

$$\forall i \in [\![1; n]\!], \quad f\left(u_i\right) = \lambda_i u_i.$$

Comme les réels λ_i sont positifs, on peut poser

$$g\left(u_i\right) = \sqrt{\lambda_i}\, u_i \in \mathbb{R}^n.$$

On définit ainsi un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
Par construction, $\mathscr{B}$ est une base orthonormée constituée de vecteurs propres de g. On en déduit que g est un endomorphisme symétrique. Enfin, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$

$$\begin{aligned}g \circ g\left(u_i\right) &= g\left(\sqrt{\lambda_i} u_i\right) \\ &= \sqrt{\lambda_i} g\left(u_i\right) \\ &= \lambda_i u_i = g\left(u_i\right).\end{aligned}$$

Les applications linéaires $g \circ g$ et f prennent les mêmes valeurs sur une base, ils sont donc égaux : $g^2 = f$.

3.b) Par construction

$$\mathrm{Sp}(g) = \left\{\sqrt{\lambda_i} \;\middle|\; i \in [\![1; n]\!]\right\}$$

et $0 \notin \mathrm{Sp}(g)$. Donc g est un isomorphisme.

3.c) Soient $i, j \in [\![1; n]\!]$

$$\begin{aligned}\varphi\left(g^{-1}\left(e_i\right), g^{-1}\left(e_j\right)\right) &= \left\langle g^{-1}\left(e_i\right), f\left(g^{-1}\left(e_j\right)\right)\right\rangle \\ &= \left\langle g^{-1}\left(e_i\right), g^2 \circ g^{-1}\left(e_j\right)\right\rangle \\ &= \left\langle g^{-1}\left(e_i\right), g\left(e_j\right)\right\rangle \\ &= \left\langle g \circ g^{-1}\left(e_i\right), e_j\right\rangle \quad \text{car } g \text{ est symétrique} \\ &= \left\langle e_i, e_j\right\rangle.\end{aligned}$$

Comme $\mathscr{B}$ est une b.o.n pour le produit scalaire canonique

$$\varphi\left(g^{-1}\left(e_i^-\right), g^{-1}\left(e_j\right)\right) = \begin{cases}1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

D'où le résultat.

Exercice 24 p. 14

1.a) Oui. La linéarité de f découle de la linéarité à gauche du produit scalaire. De plus, pour tout $x \in \mathrm{E}$, $f(x) \in \mathrm{E}$.

1.b) Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. Comme la famille $\left(e_k\right)_{k \in [\![1; n]\!]}$ est libre, la condition

$$0 = f(x) = \sum_{k=1}^{n} \left\langle x, e_k\right\rangle e_k$$

donne : $$\forall k \in [\![1; n]\!], \quad \left\langle x, e_k\right\rangle = 0.$$

Comme $\left(e_k\right)_{k\in[[1;n]]}$ est génératrice, on en déduit que

$$x \in \operatorname{Vect}(e_1,\ldots,e_n)^{\perp} = \mathrm{E}^{\perp}.$$

Or $\mathrm{E}^{\perp} = \{0_{\mathrm{E}}\}$, il vient $x = 0_{\mathrm{E}}$. L'endomorphisme est injectif. En dimension finie, il est aussi surjectif.

1.c) Soient x, $y \in \mathrm{E}$

$$\begin{aligned}\langle f(x), y\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k, y \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle \langle e_k, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, \langle e_k, y\rangle e_k\rangle = \left\langle x, \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, y\rangle e_k \right\rangle\end{aligned}$$

$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$.

L'endomorphisme est bien symétrique.

1.d) Le seul projecteur bijectif est l'application identité id_{E}.
Si $\mathscr{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ est une base orthonormée, on sait que

$$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k = x$$

donc $\mathscr{B}$ est bien solution.
On vérifie la réciproque en testant l'égalité pour chaque indice i en remplaçant x par e_i.
Finalement, f est un projecteur si et seulement si la famille est une base orthonormée.

2.a) Soit e un vecteur propre associé à une valeur propre λ de f. D'une part

$$\langle f(e), e\rangle = \langle \lambda e, e\rangle = \lambda \cdot \underbrace{\|e\|^2}_{>0}$$

et

$$\begin{aligned}\langle f(e), e\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle e, e_k\rangle e_k, e \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle e, e_k\rangle \langle e_k, e\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e, e_k\rangle^2.\end{aligned}$$

2.b) La condition est équivalente à

$$s = f^{-1} \circ s^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad s^2 = f^{-1}.$$

Comme f^{-1} est un endomorphisme symétrique, en reprenant par exemple la première question de l'exercice 26, on prouve bien l'existence de s.

2.c) On a pour i, $j \in [[1;n]]$

$$\begin{aligned}\left\langle s(e_i), s(e_j)\right\rangle &= \left\langle s\circ s(e_i), e_j\right\rangle \text{ symétrie} \\ &= \left\langle f^{-1}(e_i), e_j\right\rangle\end{aligned}$$

Or $$e_i = f\left(f^{-1}(e_i)\right) = \sum_{k=1}^{n} \left\langle f^{-1}(e_i), e_k\right\rangle e_k.$$

La famille étant libre pour tout $k \neq i$

$$\left\langle f^{-1}(e_i), e_k\right\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \left\langle f^{-1}(e_i), e_i\right\rangle = 1$$

ce qui permet d'avoir :

$$\left\langle s(e_i), s(e_j)\right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Exercice 25 — p. 14

C'est la version "endomorphisme" de l'encadrement de Rayleigh.

Comme f est un endomorphisme symétrique, f est diagonalisable dans une base orthonormée. Soient $(e_1,\ldots,e_n)$ une telle base. Il existe donc $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall i \in [[1;n]], \qquad f(e_i) = \mu_i e_i.$$

Par hypothèse de l'énoncé

$$\forall i \in [[1;n]], \qquad \lambda_1 \leqslant \mu_i \leqslant \lambda_n.$$

Ensuite, la base étant orthonormée et f linéaire

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$$

et

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \left\langle x, e_j\right\rangle f\left(e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \left\langle x, e_j\right) \mu_j e_j.$$

Puis, par bilinéarité du produit scalaire

$$\begin{aligned}\langle f(x), x\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \left\langle x, e_j\right\rangle \mu_j \underbrace{\left\langle e_i, e_j\right\rangle}_{\delta_{i,j}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i \langle x, e_i\rangle^2.\end{aligned}$$

En minorant (respectivement majorant) chaque μ_i par λ_1 (resp. λ_n) il vient

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu_i \langle x, e_i\rangle^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_n \langle x, e_i\rangle^2.$$

C'est-à-dire

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leqslant \langle f(x), x\rangle \leqslant \lambda_n \|x\|^2$$

car $(e_1,\ldots,e_n)$ est une b.o.n.

Exercice 26 — p. 14

1. L'endomorphisme f est diagonalisable dans une b.o.n $(e_1 \ldots e_n)$. Il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall i \in [[1;n]], \qquad f(e_i) = \lambda_i e_i.$$

Comme le spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$, $\sqrt{\lambda_i}$ a un sens et on peut définir l'endomorphisme uniquement en donnant l'image d'une base. Vérifier que φ défini par

$$\forall i \in [[1;n]], \qquad \varphi(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$$

convient.

2. Procédons par double inclusion.

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $v \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$, on a

$$(f+g)(u) = f(u) + g(u) = 0_E + 0_E = 0_E$$

puis $u \in \operatorname{Ker}(f+g)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $u \in \operatorname{Ker}(f+g)$, on a donc $f(x)+g(x) = 0_E$. Calculons de deux manières différentes la quantité $\langle f(x), x\rangle$. D'une part, en utilisant le fait que φ est symétrique

$$\begin{aligned}\langle f(x), x\rangle &= \left\langle \varphi^2(x), x\right\rangle \\ &= \langle \varphi(x), \varphi(x)\rangle = \|\varphi(x)\|^2.\end{aligned}$$

On a aussi (en notant ψ un endomorphisme tel que $\psi^2 = g$)

$$\begin{aligned}\langle f(x), x\rangle &= -\langle g(x), x\rangle \\ &= -\left\langle \psi^2(x), x\right\rangle \\ &= -\langle \psi(x), \psi(x)\rangle = -\|\psi(x)\|^2\end{aligned}$$

D'où $$\underbrace{\|\varphi(x)\|^2}_{\geqslant 0} = -\underbrace{\|\psi(x)\|^2}_{\leqslant 0}.$$

Nécessairement $\|\varphi(x)\| = \|\psi(x)\| = 0$ et $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ puis

$$f(x) = \varphi^2(x) = \varphi(\varphi(x)) = \varphi\left(0_E\right) = 0_E \quad \text{et} \quad g(x) = 0_E.$$

C'est-à-dire

$$x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g.$$

Le résultat s'en déduit par double inclusion.

Exercice 27 p. 14

1. Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$ et X un vecteur propre associé à λ

$$AX = \lambda X \quad \text{et} \quad X \neq 0_{n,1}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\langle AX, X\rangle &= \lambda\langle X, X\rangle = \lambda\|X\|^2 \\ \text{et} \quad \langle AX, X\rangle &= {}^t(AX)X \\ &= {}^tX\,{}^tAX = \langle X, {}^tAX\rangle \\ &= -\langle X, AX\rangle = -\langle AX, X\rangle.\end{aligned}$$

D'où $\langle AX, X\rangle = 0$ et comme $\|X\| \neq 0$, $\lambda = 0$. Ce qui conclut.

2. On a

$${}^tB = {}^t\left(A^2\right) = {}^tA \cdot {}^tA = (-A)\cdot(-A) = A^2 = B.$$

La matrice B est donc symétrique.

3. Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(B)$ et X un vecteur propre $BX = \lambda X$ et $X \neq 0_{n,1}$. On a d'une part

$$\langle BX, X\rangle = \lambda\langle X, X\rangle = \lambda\|X\|^2$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}\langle BX, X\rangle &= \left\langle A^2X, X\right\rangle \\ &= {}^t\left(A^2X\right)X \\ &= {}^tX\,{}^tA\,{}^tAX \\ &= -{}^t(AX)(AX) \\ &= -\|AX\|^2.\end{aligned}$$

D'où $\lambda\|X\|^2 = -\|AX\|^2$. Puis $\operatorname{Sp}(B) \subset \mathbb{R}^-$.

Exercice 28 p. 14

1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$. Par linéarité à droite du produit scalaire

$$\begin{aligned}f(\lambda x + \mu y) &= \langle a, \lambda x + \mu y\rangle b - \langle b, \lambda x + \mu y\rangle a \\ &= \lambda\langle a, x\rangle b + \mu\langle a, y\rangle b - \lambda\langle b, x\rangle a - \mu\langle b, y\rangle a \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y).\end{aligned}$$

Ce qui prouve la linéarité de f.

2.(a) Notons que

$$\begin{aligned}f(a) &= \langle a, a\rangle b - \langle b, a\rangle a \\ &= \|a\|^2 b \neq 0 \\ f(b) &= \langle a, b\rangle b - \langle b, b\rangle a \\ &= -\|b\|^2 a \neq 0\end{aligned}$$

et pour tout $x \in \operatorname{Vect}(a, b)^\perp$

$$f(x) = \underbrace{\langle a, x\rangle}_{=0} b + \underbrace{\langle b, x\rangle}_{=0} a = 0.$$

On a donc

$$\operatorname{Vect}(a, b) \subset \operatorname{Im} f \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{Im} f \geqslant 2.$$

$$\operatorname{Vect}(a, b)^\perp \subset \operatorname{Ker} f \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{Ker} f \geqslant n-2.$$

Par la formule du rang, on a aussi

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = n$$

On a donc

$$\dim \operatorname{Im} f = 2, \quad \dim \operatorname{Ker} f = n-2$$

et les égalités

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(a, b) \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(a, b)^\perp.$$

2.(b) Pour F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien $\left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$, on a

$$F \oplus F^\perp = E.$$

En appliquant ce résultat à $F = \operatorname{Vect}(a, b)$ et on utilisant la question précédente, on montre que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans E.

3. Soit $(x, y) \in E^2$

$$\begin{aligned}\langle f(x), y\rangle &= \langle\langle a, x\rangle b - \langle b, x\rangle a, y\rangle \\ &= \langle a, x\rangle\langle b, y\rangle - \langle b, x\rangle\langle a, y\rangle \\ &= \langle\langle b, y\rangle a, x\rangle - \langle\langle a, y\rangle b, x\rangle. \\ &= \langle\langle b, y\rangle a - \langle a, y\rangle b, x\rangle = -\langle f(y), x\rangle\end{aligned}$$

4. Soient $x, y \in E$. En appliquant deux fois la question 3

$$\begin{aligned}\langle f\circ f(x), y\rangle &= \langle f(f(x)), y\rangle \\ &= -\langle f(x), f(y)\rangle \\ &= -(-\langle x, f(f(y))\rangle) \\ &= \langle x, f\circ f(y)\rangle.\end{aligned}$$

Finalement, $f \circ f$ est symétrique.

5. L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si k est un entier pair.

Exercice 29 p. 15

Soit $x \in \mathrm{E}$

$$\begin{aligned}\|(f-g)(x)\|^2 &= \|f(x)-g(x)\|^2\\ &= \|f(x)\|^2+\|g(x)\|^2-2\langle f(x),g(x)\rangle\\ \|(f+g)(x)\|^2 &= \|f(x)\|^2+\|g(x)\|^2+2\langle f(x),g(x)\rangle.\end{aligned}$$

On constate que l'égalité est prouvée si on montre que

$$\langle f(x),g(x)\rangle = 0.$$

Or, par symétrie de f et le fait que f et g commutent

$$\langle f(x),g(x)\rangle = \langle x, f\circ g(x)\rangle = \langle x, g\circ f(x)\rangle$$

et par « antisymétrie » de g

$$\langle f(x),g(x)\rangle = \langle -g\circ f(x), x\rangle = -\langle x, g\circ f(x)\rangle.$$

D'où $\langle f(x),g(x)\rangle = 0$ et l'égalité.

Exercice 30 p. 15

Exercice 31 p. 15

Exercice 32 p. 16

1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, P, Q $\in$ E. Par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}u(\lambda \mathrm{P}+\mu \mathrm{Q})(x) &= \int_0^1 (x+t)^n(\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q})(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 (x+t)^n\big(\lambda\mathrm{P}(t)+\mu\mathrm{Q}(t)\big)\,\mathrm{d}t\\ &= \lambda\int_0^1 (x+t)^n\mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t+\mu\int_0^1(x+t)^n\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \lambda u(\mathrm{P})(x)+\mu u(\mathrm{Q})(x)\end{aligned}$$

L'application u est linéaire.
Soit $k \in [\![0;n]\!]$.

$$\begin{aligned}u(e_k)(x) &= \int_0^1 (x+t)^n t^k\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i t^{n-i+k}\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{i=0}^n \int_0^1 \binom{n}{i} x^i t^{n-i+k}\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}\frac{1}{n-i+k+1}x^i.\end{aligned}$$

D'où

$$u(e_k) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}\frac{1}{n+k-i+1}e_i.$$

On constate que $u(e_k) \in \mathrm{E}$. Par linéarité, u endomorphisme de E.

2. On a pour $k, j \in [\![1;n]\!]$

$$\begin{aligned}\left\langle u(e_k), e_j\right\rangle &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}\frac{1}{n+k-i+1}\left\langle e_i,e_j\right\rangle\\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}\frac{1}{(n+k-i+1)}\cdot\frac{1}{i+j+1}.\\ &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell}\frac{1}{k+\ell+1}\cdot\frac{1}{n-\ell+j+1}\end{aligned}$$

à l'aide du changement de variable $\ell = n-i$. On en déduit que

$$\left\langle u(e_k), e_j\right\rangle = \left\langle u(e_j), e_k\right\rangle.$$

On en déduit que u est symétrique.