Nom :

Mathématiques approfondies

Cours ECG 2

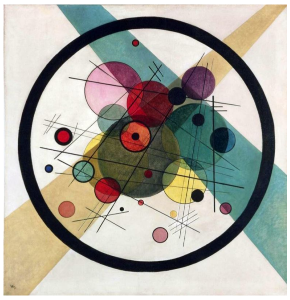
Partie VII

Chapitres

Lycée Saint Louis 2025/2026

CHAPITRE 14

Endomorphismes symétriques



Cercles dans un cercle, 1923, VASSILY KANDINSKY

1 Matrices et endomorphismes symétriques

1.1 Les définitions et exemples

Définition 1 (matrice symétrique)

On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est **symétrique** si ${}^t\!A = A$.
Autrement dit, si $(a_{i,j})_{i,j}$ sont les coefficients de la matrice A : $\forall\,(i,j) \in [\![1;n]\!]^2, \qquad a_{i,j} = a_{j,i}.$

Exercice 1

✦ ✎ Donner la dimension de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ défini comme le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

AS1

Définition 2 (endomorphisme symétrique)

Soient, E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. On dit que φ est un **endomorphisme symétrique** si

$$\forall\, u, v \in E, \qquad \langle \varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle.$$

Exemples.

- L'application $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-6y,\,-6x-7y) \end{array}\right.$ est symétrique sur $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique.

- Soient E, un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et $u_0 \in E \setminus \{0_E\}$. Pour tout réel $a \in \mathbb{R}^+$, on définit l'endomorphisme $\varphi_a : E \to E$ par $\varphi_a(u) = u + a\,\langle u, u_0\rangle\, u_0$. On vérifie que φ_a est symétrique.

Exercice 2

✦✦ Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et f, g deux endomorphismes symétriques de E.

1. Justifier que si f et g commutent alors $f \circ g$ est symétrique.
2. On souhaite prouver la réciproque. On suppose donc $f \circ g$ symétrique.
   a) Simplifier pour tous u, $v \in E$, $\langle u, f \circ g(v) - g \circ f(v) \rangle$.
   b) En déduire que f et g commutent.

AS2

1.2 Premières propriétés

Proposition 3 (caractérisation via une base)

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Les deux énoncés suivants sont équivalents.

i) L'endomorphisme φ est symétrique.

ii) $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \qquad \langle \varphi(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, \varphi(e_j) \rangle$.

Théorème 4 (lien avec les matrices)

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ où $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien. Les trois énoncés suivants sont équivalents.

i) L'endomorphisme φ est un endomorphisme symétrique de E.

ii) Il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ soit une matrice symétrique.

iii) Pour toutes les bases orthonormées $\mathscr{B}$ de E, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ est une matrice symétrique.

Exercice 3

✦✦

1. Justifier que l'ensemble $\mathscr{S}(E)$ des endomorphismes symétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
2. Si E est de dimension finie, pouvez-vous préciser sa dimension ?

AS3

2 Réduction

2.1 Diagonalisation des endomorphismes symétriques

Premières propriétés

Proposition 5 (espace stable)

Soient φ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et F un sous-espace vectoriel de E.

Si F est stable par φ,

alors $F^{\perp}$ est également stable par φ.

Proposition 6 (vecteurs propres orthogonaux)

Soit φ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Si u et v sont deux vecteurs propres de φ associés à des valeurs propres distinctes,

alors les vecteurs u et v sont orthogonaux.

Remarque. On a la généralisation suivante. Si $e_1, \ldots, e_p$ sont des vecteurs propres de f associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, alors la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est orthogonale.

Corollaire 7 (espaces propres orthogonaux)

Soit φ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.
Alors les sous-espaces propres de φ sont deux à deux orthogonaux.

Exemple. Soit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{AB})$. On vérifie que $\varphi : \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^t\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un endomorphisme symétrique. φ possède deux valeurs propres : -1 et 1 où $\mathrm{E}_1(\varphi)$, $\mathrm{E}_{-1}(\varphi)$ désigne respectivement l'ensemble des matrices symétriques et antisymétriques. Ces sous-espaces sont donc orthogonaux.

Le théorème spectral

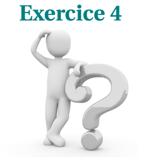
Théorème 8 (spectral)

Si φ est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$,

alors
- L'endomorphisme φ est diagonalisable, les valeurs propres sont réelles.
- Il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de φ.

⚠ **Attention.** Il ne faut pas oublier que la base des vecteurs propres peut être choisie orthonormée.

Exercice 4



✦✦ ✎ *Les questions sont indépendantes.*

Soit φ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

1. Que dire de φ si pour tout $u \in \mathrm{E}$, $\langle u, \varphi(u)\rangle = 0$?
2. Justifier que $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \mathbb{R}^+$ si et seulement si φ vérifie

$$\forall u \in \mathrm{E}, \quad \langle u, \varphi(u)\rangle \geqslant 0 \quad (\bullet)$$

AS4

Exercice 5

✧ Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Justifier que l'application linéaire

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \mapsto & \mathrm{AM} \end{array} \right.$$

est aussi diagonalisable.
On pourra introduire le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

AS5

2.2 Diagonalisation des matrices symétriques réelles

Théorème spectral dans le cas matriciel

Théorème 9 (spectral, version matricielle)

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique,

alors
- A est diagonalisable, les valeurs propres sont réelles.
- Il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale réelle D telles que

$$A = PDP^{-1} = PD{}^tP.$$

Remarque. Les colonnes de la matrice P forment une b.o.n de vecteurs propres de A. Pour rappel, une matrice est orthogonale si et seulement si les matrices colonnes forment une base orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 6

Les questions sont indépendantes.

1. ✦ On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   Justifier que A est diagonalisable. Calculer A^2. En déduire que $\mathrm{Sp}(A) = \{-1; 1\}$.
2. ✦✦ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M + {}^tM$ soit nilpotente.
   Montrer que la matrice M est antisymétrique.

AS6

Proposition 10 (décomposition d'une matrice symétrique)

Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Notons
- $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les valeurs propres de A.
- $(X_1, \ldots, X_n)$ une b.o.n de vecteurs propres de A telle que $AX_i = \lambda_i X_i$ pour tout $i \in [\![1; n]\!]$.

Alors
$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i {}^tX_i = \lambda_1 X_1 {}^tX_1 + \cdots + \lambda_n X_n {}^tX_n.$$

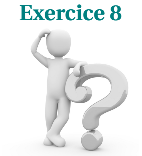
Exercice 7

✦ Justifier que les matrices $X_i {}^tX_i$ pour $i \in [\![1; n]\!]$ sont des matrices de projection dont on déterminera les éléments caractéristiques (ici, une base du noyau et de l'image).

AS8

Remarque. En particulier, A est combinaison linéaire de n matrices de projecteurs de rang 1.

Exercice 8



✦ On reprend les notations de l'énoncé précédent et on suppose en plus les réels λ_i positifs.

1. Montrer que la matrice $L = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} X_i {}^tX_i$ est symétrique à valeurs propres positive et vérifie l'égalité $L^2 = A$. Prouver que L commute avec A.
2. On admet que c'est la seule matrice symétrique avec des valeurs propres dont le carré vaut A et on la note $\sqrt{A}$. Montrer que si A est de plus inversible, alors on a $(\sqrt{A})^{-1} = \sqrt{A^{-1}}$.

AS9

Pratique de la réduction des matrices symétriques

Méthode

Comment obtenir une b.o.n de vecteurs propres d'une matrice/endomorphisme symétrique ?

- Déterminer les valeurs propres.
  (Par un calcul du rang, un polynôme annulateur, le déterminant ...)
- Pour chaque valeur propre, déterminer une base de vecteurs propres.
- À l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt, déterminer une base orthonormée pour chacun des sous-espaces propres.
- On obtient une base de E par concaténation des bases orthonormées des sous-espaces propres.

Exercice 9

✦ Diagonaliser dans une b.o.n chacune des matrices symétriques suivantes :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

AS10

3 Formes quadratiques associées à une matrice

Définitions

Définition 11 (forme quadratique d'une matrice symétrique)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique. La **forme quadratique associée à** A est l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$q(h) = {}^t\mathrm{HAH}$$

où H est la matrice des coordonnées de h dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Remarque. On constate que pour $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$ et $h = (h_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$, $q(h) = \sum\limits_{i,j\in[\![1;n]\!]} a_{ij}\, h_i h_j$.

Par symétrie de A, on peut réécrire cette expression

$$q(h) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} {h_i}^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij} h_i h_j.$$

En particulier, si A est diagonale avec $\mathrm{A} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, on a simplement $q(h) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i {h_i}^2$.

Exercice 10

✦ **Forme quadratique associée à un endomorphisme symétrique**
On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. Soient φ un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ et A la matrice de φ dans la base canonique.
Justifier que si q est la forme quadratique associée à A alors

$$\forall\, h \in \mathbb{R}^n, \quad q(h) = \langle h, \varphi(h) \rangle.$$

AS12

Expression dans une b.o.n

Théorème 12 (expression dans une b.o.n)

Soit q, une forme quadratique associée à une matrice symétrique A. Alors il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que si h a pour coordonnées $\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_n$ dans $\mathscr{B}$, on a

$$q(h) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{h}_i^{\,2},$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A.

Exemple. ✎ L'encadrement de Rayleigh.

Signe d'une forme quadratique

Exercice 11

✧ ✎ À quelles conditions nécessaires et suffisantes sur le spectre de A, a-t-on

i) $\forall\, u \in \mathrm{E}, \qquad q(u) \geqslant 0$?

ii) $\forall\, u \in \mathrm{E}, \qquad q(u) \leqslant 0$?

iii) $\forall\, u \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}, \qquad q(u) > 0$?

iv) $\forall\, u \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}, \qquad q(u) < 0$?

AS13

Exercices

Matrices symétriques

TD Exercice 12. ✦ Soit $n \geqslant 3$. On note $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1 sauf le coefficient en position (n,n) qui vaut 0. # AS14

1. Justifier que A est diagonalisable.
2. Vérifier que A est semblable à une matrice diagonale de la forme $D = \operatorname{diag}(0,\dots,0,a,b)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
3. En calculant de deux manières la trace de A et celle de A^2, déterminer a et b.

Exercice 13. ✦✦ Soient A et B deux matrice symétriques réelles telles que les formes quadratiques associées q_A et q_B soient égales. Justifier que A = B. # AS15

Exercice 14. ✦ **Rayon spectral, exemple de convergence de suite de matrices** # AS16

On munit $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique défini par $\langle M, N\rangle = {}^tMN$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit A, une matrice symétrique de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. On pose $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$.

1. Justifier que pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\| \leqslant \rho(A)\|X\|$.
2. Établir l'équivalence entre les énoncés :

   i) $\rho(A) < 1$ **ii)** Pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $\left\|A^n X\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Matrices symétriques positives, définies positives

Exercice 15. ✦ ✎ **Définitions des symétriques définies positives et équivalences** # AS18

On dit qu'une matrice symétrique M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, on a ${}^tXMX > 0$. Montrer l'équivalence des quatre énoncés suivants :

i) M est une matrice symétrique définie positive.

ii) Les valeurs propres de M sont strictement positives.

iii) Il existe P orthogonale, D diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telles que $M = PD\,{}^tP$.

iv) Il existe une matrice R inversible et symétrique telle que $M = R^2$.

TD Exercice 16. ✦✦✦ **Racine carrée d'une matrice de $\mathscr{S}_n^+$** # AS19

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives. Soit $A \in \mathscr{S}_n^+$.

1. Montrer qu'il existe $R \in \mathscr{S}_n^+$ telle que $A = R^2$. On dit que R est une racine carrée de A.
2. Soient R_1 et R_2 deux racines carrées de A appartenant à $\mathscr{S}_n^+$.
   Montrer que R_1 et R_2 ont les mêmes valeurs propres et les mêmes vecteurs propres. En déduire que la matrice A admet une unique racine carrée dans $\mathscr{S}_n^+$ notée dans la suite $\sqrt{A}$.
3. *Expression de $\sqrt{A}$ via les polynômes de Lagrange.*
   Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_p$, les p valeurs propres de A deux à deux distinctes. Pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, on définit le polynôme :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i\in[\![1;p]\!]\\ i\neq j}} \frac{x-\lambda_i}{\lambda_j-\lambda_i}.$$

   a) Montrer que $\mathscr{B} = \left(L_1,\dots,L_p\right)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[x]$. En déduire l'existence d'un unique polynôme P de $\mathbb{R}_{p-1}[x]$ tel que, pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $P\left(\lambda_i\right) = \sqrt{\lambda_i}$.

   b) Exprimer $\sqrt{A}$ comme un polynôme en A.

4. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. vérifier que A est dans S_n^+ et déterminer $\sqrt{A}$.

Exercice 17. ✦✦ Soient A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n dont les valeurs propres sont strictement positives. # AS20

1. Montrer l'équivalence : $A = B \iff A^2 = B^2$.
2. Est-ce encore vrai si on suppose les valeurs propres positives ou nulles ?

Endomorphismes symétriques

Exercice 18. ✦ Soient $\left(\mathrm{E},\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ un espace euclidien et φ un endomorphisme symétrique de E. Démontrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont supplémentaires orthogonaux. # AS22

Exercice 19. ✧ **Vrai ou faux?** # AS23

Si $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la décomposition en sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien, alors $\mathscr{B}$ est une base orthogonale.

Exercice 20. ✦✦ **La symétrie implique la linéarité** # AS24

Soit $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ tel que, pour tous u, $v \in \mathrm{E}$, on a $\langle\varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle$. Justifier que φ est un endomorphisme.

Exercice 21. ✦ **Exemple d'endomorphisme symétrique en dimension infinie** *D'après EMLyon 2011* # AS25

On note $\mathrm{E} = \mathscr{C}^\infty([0;1];\mathbb{R})$, muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par :

$$\forall f, g \in \mathrm{E}, \qquad \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

et, pour toute fonction $f \in \mathrm{E}$, on pose

$$\mathrm{T}(f) : \left\{\begin{array}{ccl} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(x^2 - x\right) f''(x) + (2x-1) f'(x). \end{array}\right.$$

Montrer que T est un endomorphisme symétrique de E.

Exercice 22. ✦ **Endomorphisme symétrique et produit scalaire** *d'après EDHEC 2015* # AS27

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ qui est orthonormée pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, symétrique, dont les valeurs propres sont toutes strictement positives.

1. Justifier l'existence d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, formée de vecteurs propres de f.
2. a) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on a : $\left\langle x, f(x)\right\rangle \geqslant 0$.
   b) Vérifier que l'égalité $\langle x, f(x)\rangle = 0$ a lieu si et seulement si $x = 0$.
   c) En déduire que l'application φ, de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, définie par $\varphi(x, y) = \langle x, f(y)\rangle$, est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
3. a) En utilisant $\mathscr{B}'$, montrer qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^n$, symétrique pour le produit scalaire canonique, dont les valeurs propres sont strictement positives, et tel que $g^2 = f$.
   b) Établir que g est bijectif.
   c) Montrer que la famille $\left(g^{-1}(e_1), g^{-1}(e_2), \ldots, g^{-1}(e_n)\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire φ.

Exercice 23. ✦✦ ✎ # AS36

Soient $\left(\mathrm{E},\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ un espace euclidien de dimension n, et f un endomorphisme symétrique de E. En notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres telles que $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_p$, montrer que

$$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad \lambda_1 \|x\|^2 \leqslant \langle f(x), x\rangle \leqslant \lambda_p \|x\|^2.$$

Exercice 24. ✦✦✦ *Oraux HEC 2009* # AS29

Soient $\left(\mathrm{E},\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ un espace euclidien de dimension n et f, g deux endomorphismes de E symétriques et ayant des valeurs propres strictement positives.

1. Prouver qu'il existe un endomorphisme φ de E ayant des valeurs propres positives tel que $f = \varphi^2 = \varphi \circ \varphi$.
2. Montrer que : $\mathrm{Ker}(f+g) = \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g$.

Endomorphismes particuliers d'un espace euclidien

TD **Exercice 25.** ✦ **Un exemple d'endomorphisme antisymétrique** # AS31

Soit n un entier au moins égal à 3. On travaille dans l'espace $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. On considère deux vecteurs a et b de $\mathbb{R}^n$ de norme 1 et orthogonaux. On définit sur E l'application f par :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad f(x) = \langle a, x\rangle b - \langle b, x\rangle a.$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E.
2. a) Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et une base de $\mathrm{Im}\, f$.
   b) Vérifier que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires.
3. Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$$

4. En déduire que $f \circ f$ est un endomorphisme symétrique.
5. À quelle condition sur l'entier naturel k, l'endomorphisme f^k est diagonalisable.

Exercice 26. ✦✦ Soit E un espace euclidien de dimension n. Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. On note S (resp. T) la matrice de f (resp. g) dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E. On suppose que S est symétrique et T antisymétrique. Montrer que : # AS32

$$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad \left\|(f-g)(x)\right\| = \left\|(f+g)(x)\right\|.$$

TD **Exercice 27.** ✦ ✎ **Adjoint u^* d'un endomorphisme u et endomorphismes normaux** *d'après EDHEC 2019* # AS33

Soient $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension n et φ un endomorphisme de E. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

- *Définition de l'adjoint d'un endomorphisme de* E

  Pour tout $y \in \mathrm{E}$, on pose $\varphi^*(y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle \varphi(e_i), y\rangle e_i$.

1. Vérifier que φ^* est un endomorphisme de E et : $\quad \forall x, y \in \mathrm{E}, \qquad \langle \varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi^*(y)\rangle$.
2. Que dire de $(\varphi^*)^*$?
3. Comparer les matrices de φ et φ^* dans la base $\mathscr{B}$. En déduire que $\varphi \circ \varphi^*$ est diagonalisable.

- *Étude des endomorphismes normaux*

  Dans la suite, on suppose que φ est un endomorphisme normal, c'est-à-dire φ commute avec φ^* :

$$\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi.$$

4. Montrer que : $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \|\varphi(x)\| = \left\|\varphi^*(x)\right\|$.
5. En déduire que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}\left(\varphi^*\right)$.
6. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par φ, alors $\mathrm{F}^{\perp}$ est stable par φ^*.
7. On suppose que φ possède une valeur propre λ et on note $\mathrm{E}_\lambda(\varphi)$ le sous espace propre associé. Montrer que $\mathrm{E}_\lambda(\varphi)$ est stable par φ^*, puis en déduire que $\mathrm{E}_\lambda^{\perp}$ est stable par φ.

≫ *Pour aller plus loin, HEC 2019 Maths I, Essec 2014*

Compléments

Exercice 28. ✦✦✦ **Une descente de gradient** *D'après ESCP 2012* # AS34

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et $\|\cdot\|$, la norme associée, et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique réelle dont les valeurs propres sont toutes strictement positives.
On confond vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice colonne canoniquement associée et on pose, pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$,

$$\Phi(\mathrm{X}) = {}^t\mathrm{X}\mathrm{A}\mathrm{X}.$$

1. Soit B un élément de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'équation $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$ admet une unique solution qu'on notera R.
2. Montrer qu'il existe deux réels α et β strictement positifs tels que pour tout X de $\mathbb{R}^n$

$$\alpha\|\mathrm{X}\|^2 \leqslant \Phi(\mathrm{X}) \leqslant \beta\|\mathrm{X}\|^2.$$

3. Dans la suite de l'exercice, on pose pour $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$: $\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \Phi(\mathrm{X}) - 2\,{}^t\mathrm{B}\mathrm{X}$.
   a) Déterminer le gradient $\nabla\mathrm{F}_\mathrm{X}$ de F en X.
   b) Soient X et H deux éléments de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}+\mathrm{H}) = \mathrm{F}(\mathrm{X}) + \langle \nabla\mathrm{F}_\mathrm{X}, \mathrm{H}\rangle + \Phi(\mathrm{H}).$$

   c) En déduire que F possède un minimum sur $\mathbb{R}^n$. En quel point est-il atteint?
4. Soit $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$ fixé, $\mathrm{X} \neq 0$. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ de façon à ce que $\mathrm{F}\left(\mathrm{X} - \alpha\nabla\mathrm{F}_\mathrm{X}\right)$ soit minimal. Calculer ce minimum.
5. Soit $\mathrm{X}_0 \in \mathbb{R}^n$. On définit une suite $(\mathrm{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ par, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{X}_{k+1} = \mathrm{X}_k - \alpha_k \nabla\mathrm{F}_{\mathrm{X}_k}, \text{ où } \alpha_k = \frac{\left\|\nabla\mathrm{F}_{\mathrm{X}_k}\right\|^2}{2\Phi\left(\mathrm{X}_k\right)} \text{ si } \mathrm{X}_k \neq \mathrm{R} \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

   a) Montrer que la suite $\left(\mathrm{F}\left(\mathrm{X}_k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.
   b) Exprimer $\mathrm{F}\left(\mathrm{X}_{k+1}\right) - \mathrm{F}\left(\mathrm{X}_k\right)$ en fonction de α_k et de $\nabla\mathrm{F}_{\mathrm{X}_k}$.
6. Une suite $(\mathrm{Y}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sera dite convergente vers un vecteur $\mathrm{Z} \in \mathbb{R}^n$ si $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \left\|\mathrm{Y}_k - \mathrm{Z}\right\| = 0$, ce qui revient à dire que les coordonnées de Y_k convergent vers les coordonnées correspondantes de Z.

a) Montrer que la suite $\left(\nabla F_{X_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

b) En déduire la limite de la suite $\left(X_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

TD Exercice 29. ✦✦✦ **Décomposition spectrale, calcul et application** # ASp1

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible.

- **Existence de la décomposition**

1. Montrer que ${}^t MM$ est une matrice symétrique de valeurs propres strictement positives. En déduire qu'il existe une matrice symétrique à valeurs propres strictement positives S telle que ${}^t MM = S^2$.

2. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale O telle que $M = OS$.

- **Unicité de la décomposition**

Il existe un unique couple (O, S)*,* O *orthogonale,* S *symétrique à valeurs propres strictement positives, tel que* $M = OS$*. Pour s'en convaincre, on a vu en exercice que la matrice* S *est unique (le refaire si besoin). La matrice* O *l'est donc tout autant et on a bien l'unicité du couple* (O, S).

- **Algorithme par la méthode de Newton**

Dans la suite, on dit qu'une suite de matrices $(A_k)_k$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ converge vers une matrice A si pour tout couple $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, la suite des coefficients $([A_k]_{i,j})_k$ converge vers le coefficient $[A]_{i,j}$. On admet [1] le résultat suivant :
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. La suite $\left(M_k\right)_k$ de matrices de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$M_0 = M \quad \text{et} \quad M_{k+1} = \frac{1}{2}M_k\left(I_n + \left({}^t M_k M_k\right)^{-1}\right)$$

est bien définie, converge vers O, où $M = OS$ est la décomposition polaire de M. De plus, la suite $\left({}^t M_k M\right)_k$ converge vers S.

3. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice M_k est inversible.

4. Proposer un programme python qui prend en argument M et renvoie une approximation du couple (O, S) obtenue par décomposition polaire.

- **Application**

Soit $\left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ un espace euclidien et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
Un endomorphisme f de E est appelé *contraction* si pour tout x de E, $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$.

5. Donner un exemple de contraction de E.

6. On suppose dans cette question que l'endomorphisme f est symétrique.

a) Montrer que f est une contraction si et seulement si pour toute valeur propre λ de f, on a $|\lambda| \leqslant 1$.

b) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$. Montrer que pour tout x de E :

$$\|P(f)(x)\| \leqslant \sup_{\lambda\in \mathrm{Sp}(f)} |P(\lambda)| \cdot \|x\|$$

où $\mathrm{Sp}(f)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de f.

- On suppose désormais que f est un endomorphisme bijectif de E, et on note M sa matrice associée dans une base $\mathcal{B}$ orthonormée de E.

7. Montrer que f est une contraction si et seulement si pour toute valeur propre λ de S, on a $|\lambda| \leqslant 1$.

- **Exemple**

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on pose $\qquad M_{a,b} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

On note $(S_{a,b}, O_{a,b})$ le couple obtenue dans la décomposition polaire.

8. **a)** Expliciter la matrice $S_{a,b}$ dans cet exemple.

b) Justifier ensuite que $\det(O_{a,b}) = 1$ et qu'il existe un réel θ tel que $O_{a,b} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$.

9. On pose $J = M(0, 1)$. On pose ensuite $\exp(\theta J) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k!}(\theta J)^k$.

Démontrer que $\qquad O_{a,b} = \exp(\theta J)$.

TD Exercice 30. ✦✦✦ **Lemme du théorème spectral** # ASp2

On se propose dans la suite d'établir le résultat préliminaire et admis dans la preuve du théorème spectral : toute matrice symétrique réelle admet un valeur propre [2].

1. mais on pourrait le démontrer (DS11 de l'année dernière).
2. La preuve classique utilise les nombres complexes. Ces derniers sont hors-programme en ECG.

- **Résultat 1**
  Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique et $\delta \in \mathbb{R}_*^+$.

1. Justifier que $A^2 + \delta I_n$ est une matrice inversible.
2. Soit R, un polynôme de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif. Déduire de la question 1 que $R(A)$ est inversible.

- **Résultat 2 - Polynôme minimal**

3. Justifier que toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet un polynôme annulateur non nul.
4. Démontrer qu'il existe un polynôme non nul annulateur de A de degré minimal et unitaire. Notons Π_A, un tel polynôme.
5. *(facultatif)*. Montrer que pour tout polynôme P annulateur de A, il existe Q polynôme tel que $P = \Pi_A \cdot Q$. En déduire que le polynôme Π_A est unique.
6. Justifier que si λ est une racine de Π_A, alors λ est une valeur propre de A.

- **Résultat 3**
  On rappelle que pour tout polynôme P, il existe :
  - a, un réel ;
  - des réels $(\lambda_i)_{i \in [\![1;r]\!]}$ et des entiers naturels $(m_i)_{i \in [\![1;r]\!]}$;
  - des polynômes $\left(R_j\right)_{j \in [\![1;p]\!]}$ de degré 2, unitaire et de discriminant négatif

  tels que
  $$P = a \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i) \cdot \prod_{j=1}^{p} R_j.$$

7. À l'aide des trois résultats, montrer que pour toute matrice A symétrique admet une valeur propre réelle.

On montre ainsi que la matrice admet un polynôme annulateur non nul scindé à racines simples. On a vu en exercice que cela prouve la diagonasabilité de la matrice. C'est le théorème spectral.

> *Algebra is like sheet of music. The important thing isn't can you read music, it's can you hear it. Can you hear the music, Robert?*
>
> NIELS BOHR TO J. ROBERT OPPENHEIMER,
> 2023, Oppenheimer (film)

CHAPITRE 15

Projections orthogonales

L'art des mathématiques consiste à trouver le cas particulier qui contient tous les germes de la généralité.

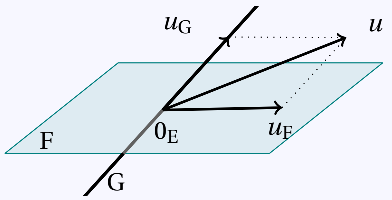
DAVID HILBERT
Mathématicien allemand (1862-1943)

1 Rappels

1.1 Les projecteurs

Définition 13 (projecteur)

Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.



Ainsi, pour tout $u \in E$, il existe une unique décomposition $u = u_F + u_G$ où $(u_F, u_G) \in F \times G$. On pose

$$p : \begin{cases} E & \to & E \\ u & \mapsto & u_F. \end{cases}$$

Cette application est linéaire, elle est appelée le **projecteur** sur F parallèlement à G.

Remarque. Rappelons que $F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}\left(p - \mathrm{id}_E\right)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$. En particulier, on a $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$. De plus, $\mathrm{id}_E - p$ est le projecteur sur G parallèlement à F.

Théorème 14 (caractérisation d'un projecteur)

Soit $p : E \to E$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) L'application p est un projecteur.

ii) L'application p est linéaire et $p \circ p = p$.

Exercice 31

✦

1. Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E.
   a) Donner les puissances de p, puis celles de $2\,\mathrm{id}_E + p$.
   b) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, simplifier $\left(\lambda p + \mu \mathrm{id}_E\right) \circ \left(2\mathrm{id}_E + p\right)$. En déduire que $2\,\mathrm{id}_E + p$ est un isomorphisme.
2. Considérons deux projecteurs p et q qui commutent.
   Montrer que $p \circ q$ est un projecteur et justifier que $\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p \circ q)$.

PO1

1.2 Rappels sur les sous-espaces orthogonaux

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle orthogonal de F, et on note $F^\perp$, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à F, c'est-à-dire :

$$F^\perp = \{u \in E \mid \forall\, v \in F,\ \langle u, v\rangle = 0\}.$$

Proposition 15 (espaces supplémentaires orthogonaux)

Soit F, un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Alors

$$E = F \oplus F^\perp.$$

En particulier $$\dim F + \dim F^\perp = \dim E.$$

Remarque. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F que l'on complète par $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$, une base orthonormée de E. On a

$$F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p), \quad F^\perp = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n).$$

Exercice 32

✦ *Les questions sont indépendantes.*

1. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère les plans F et G d'équations respectives :
$$x + 2y + 3z = 0 \quad \text{et} \quad x - y - z = 0.$$
Déterminer une base de $F^\perp$ puis de $(F \cap G)^\perp$.
2. Soit $\mathbb{R}_3[x]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$. On pose $F = \mathbb{R}_1[x]$.
Déterminer une base de $F^\perp$.

PO2

Exercice 33

✦✦ Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et F, G deux sous-espaces vectoriels.
Justifier que F et G sont supplémentaires si et seulement si $F^\perp$ et $G^\perp$ sont supplémentaires.

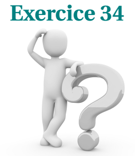
PO3

Proposition 16 (condition nécessaire et suffisante d'appartenance à l'orthogonal)

Soit $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ un sous-espace vectoriel de E. On a

$$u \in F^\perp \iff \forall\, i \in [\![1, k]\!], \quad \langle u, e_i\rangle = 0.$$

Exercice 34



✦ **Vecteur normal à un hyperplan**
Soit F un hyperplan d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

1. Montrer qu'il existe $u_0 \in E$ tel que pour tout $v \in E$: $v \in F \iff \langle u_0, v\rangle = 0$.
2. *Exemples*
   a) On considère $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et l'hyperplan $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 0\}$. Déterminer un vecteur normal à F.
   b) Soit maintenant $E = \mathbb{R}_3[x]$ et le produit scalaire défini par $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,dt$. Déterminer un vecteur normal à $\mathbb{R}_2[x]$.

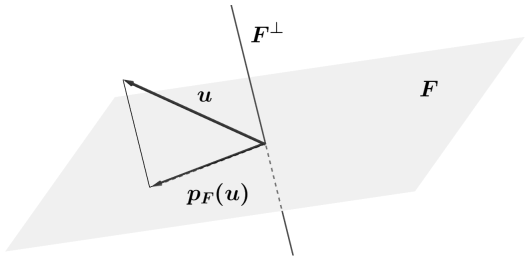
PO4

2 Projecteurs orthogonaux

2.1 Définitions et exemples

Définition 17 (projecteur orthogonal)

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, un espace euclidien.
On appelle **projection orthogonale** sur F, notée p_F, la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.
Pour tout $u \in E$, $p_F(u)$ est appelé le **projeté orthogonal de** u **sur** F.



Retenons

$$v = p_F(u) \iff \begin{cases} v \in F \\ u - v \in F^\perp. \end{cases}$$

D'après le rappel du début de chapitre, un projecteur p est orthogonal si et seulement si $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires orthogonaux, si et seulement si $E_0(p)$ et $E_1(p)$ sont des supplémentaires orthogonaux de E.

Exercice 35

✦ ✎ **Exemple**
Soit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\left({}^tAB\right)$. On définit l'application

$$p : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \qquad p(M) = \frac{M + {}^tM}{2}.$$

1. Vérifier que p est un projecteur. Préciser le noyau et l'image de p.
2. Est-ce que p est un projecteur orthogonal ?

PO6

Proposition 18 (caractérisation)

Soit p, un projecteur d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. On a l'équivalence entre les énoncés suivants.

i) Le projecteur p est orthogonal.
ii) L'endomorphisme p est symétrique.

Proposition 19 (caractérisation matricielle)

Soient E un espace euclidien, $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E, p un endomorphisme et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$.
On a l'équivalence entre :

i) L'endomorphisme p est un projecteur orthogonal.
ii) La matrice A est symétrique et $A^2 = A$.

⚠ **Attention.** Il ne faut pas oublier la condition : $\mathscr{B}$ est une base orthonormée.

Exemple. La matrice $U\,{}^tU$ où U est une matrice colonne de norme 1.

2.2 Expression et calcul explicite du projeté

Théorème 20 (expression du projeté dans une b.o.n)

Soit F, un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien $\left(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ et p_{F}, le projecteur orthogonal sur F.

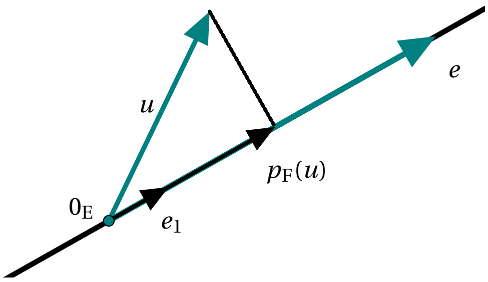
Si $\mathscr{B}_{\mathrm{F}} = \left(e_1, \dots, e_p\right)$ est une base orthonormée de F,

alors $$\forall\, u \in \mathrm{E}, \quad p_{\mathrm{F}}(u) = \sum_{i=1}^{p} \langle u, e_i\rangle\, e_i.$$

- **Projection sur une droite vectorielle**

Considérons le cas où F est une droite vectorielle. Il existe donc $e \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$ tel que $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e)$. La famille constituée d'un unique vecteur $(e_1) = (e/\|e\|)$ est une base de F et d'après ce qui précède

$$p_{\mathrm{F}}(u) = \langle u, e_1\rangle\, e_1 = \frac{\langle u, e\rangle}{\|e\|^2}\, e.$$



- **Projection sur un hyperplan.**

Remarque. Retour sur le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.
Soient $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E non nécessairement orthonormée. Pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$, posons p_k, le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$. On définit ensuite la famille $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E par la récurrence

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![2; k-1]\!], \quad e_{k+1} = \frac{u_{k+1} - p_k(u_{k+1})}{\left\|u_{k+1} - p_k(u_{k+1})\right\|}.$$

La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est bien définie, elle constitue une base orthonormée de E avec

$$\forall\, k \in [\![1; n]\!], \qquad \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k).$$

Méthode

Comment calculer en pratique un projeté ?

Soient $u \in \mathrm{E}$ et F, un sous-espace vectoriel de E. Calculons $p_{\mathrm{F}}(u)$, le projeté orthogonal de u sur F.

- *Étape 1*
  On trouve une base $\left(u_1, \dots, u_p\right)$ de F (non nécessairement orthonormée).
- *Étape 2*
  Comme $p_{\mathrm{F}}(u) \in \mathrm{F}$, il existe un unique p-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que $p_{\mathrm{F}}(u) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$. On remarque ensuite que

$$\begin{cases} \left\langle u - p_{\mathrm{F}}(u), u_1\right\rangle = 0 \\ \left\langle u - p_{\mathrm{F}}(u), u_2\right\rangle = 0 \\ \qquad \vdots \\ \left\langle u - p_{\mathrm{F}}(u), u_p\right\rangle = 0 \end{cases}$$

  On explicite alors le système linéaire d'inconnues $(\lambda_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$

$$\begin{cases} \langle u, u_1\rangle = \left\langle p_{\mathrm{F}}(u), u_1\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle u_i, u_1\rangle \\ \langle u, u_2\rangle = \left\langle p_{\mathrm{F}}(u), u_2\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle u_i, u_2\rangle \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \left\langle u, u_p\right\rangle = \left\langle p_{\mathrm{F}}(u), u_p\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left\langle u_i, u_p\right\rangle \end{cases}$$

Méthode

- *Étape 3*
  On résout le système linéaire précédent à p équations pour trouver les p inconnues $(\lambda_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$. On conclut par le calcul de $p_F(u)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i u_i$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, calcul du projeté de $u=(0,-1,4)$ sur l'espace vectoriel $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-2y+3z=0\right\}$.

Exercice 36

✦ **Exemple**
Soient $\mathbb{R}_2[x]$ muni du produit scalaire $\langle P,Q\rangle=\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ et $F=\mathbb{R}_1[x]$.
Donner l'expression du projeté orthogonal de $Q(x)=1+x+x^2$ sur F.

PO7

3 Applications à l'optimisation

3.1 Distance à un sous-espace vectoriel

Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien $\left(E,\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ et $u\in E$. On définit (sous réserve d'existence), la distance du vecteur u à F par

$$d(u,F)=\min_{v\in F}\|u-v\|.$$

Notons que $u\in F$ si et seulement si $d(u,F)=0$.

Théorème 21 (caractérisation du projeté par minimisation de la norme)

Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien $\left(E,\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$, p_F la projection orthogonale sur F et $u\in E$. Alors la distance $d(u,F)$ est bien définie et

$$d(u,F)=\min_{v\in F}\|u-v\|=\left\|u-p_F(u)\right\|.$$

De plus, le minimum est atteint seulement pour $v=p_F(u)$.

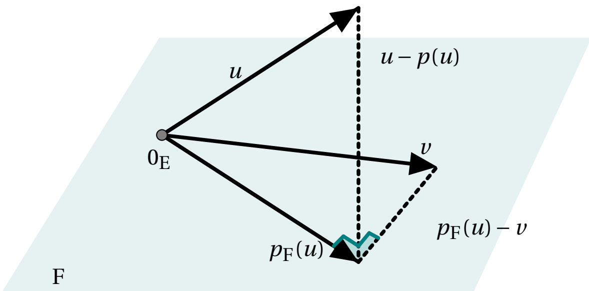
Remarques.

- Le projeté orthogonal de u sur F est caractérisé par

$$\forall\, v\in F,\quad \|u-v\|\geqslant\|u-p(u)\|.$$

Autrement dit : pour tout $u\in E$,

$$v=p_F(u)\quad\Longleftrightarrow\quad\left(v\in F\quad\text{et}\quad\|u-v\|=\min_{w\in F}\|u-w\|\right).$$



- $d(u,F)^2=\|u-p(u)\|^2=\|u\|^2-\|p(u)\|^2$.

Exercice 37

✦ **Exemples**
Soient $\left(E,\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$, un espace euclidien, $u_0\in E\setminus\{0_E\}$ et un hyperplan H.

1. Exprimer la distance d'un vecteur x à la droite $\mathrm{Vect}(u_0)$.
2. Faire de même avec la distance à H. On exprimera le résultat à l'aide d'un vecteur $u_0\in H^\perp$ (un vecteur normal, exercice 34).

PO8

Exemple. On montre que la fonction de deux variables

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=4(x-1)^2+(x+y)^2+(x-2y+1)^2$$

admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ en considérant dans $\mathbb{R}^3$, le produit scalaire canonique de sorte que

$$f(x,y)=\left\|\left(2(x-1),\,x+y,\,x-2y+1\right)\right\|^2=\left\|(2x,\,x+y,\,x-2y)-(2,0,-1)\right\|^2.$$

Exercice 38

✦✦ ✎ Justifier que la quantité

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_{-1}^{1}\left(t^2-at-b\right)^2\,\mathrm{d}t$$

est bien définie et la calculer.

PO9

3.2 Problème des moindre carrés, droite de régression

Projeté sur l'image et moindre carrés

Soit f une application linéaire $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, b un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$. Lorsque f n'est pas surjective ($p<n$), il se peut que b n'appartienne pas à l'image de f et l'équation $f(x)=b$, d'inconnue $x\in\mathbb{R}^p$, n'admette pas de solution. On cherche alors un vecteur x dont l'image « est la plus proche » de b. Plus précisément, on munit l'espace d'arrivée de sa structure euclidienne canonique et on veut justifier l'existence de

$$\min_{x\in\mathbb{R}^p}\|f(x)-b\|$$

et trouver un (le ?) vecteur x réalisant le minimum. On constate qu'il s'agit de rechercher

$$\min_{y\in\operatorname{Im} f}\|y-b\|.$$

Comme $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de E, le théorème de minimisation prouve l'existence du minimum qui est atteint en un unique point :

$$y=p(b)\quad \text{où } p \text{ désigne le projeteur orthogonal sur } \operatorname{Im} f.$$

Théorème 22 (problème des moindre carrés, pseudo-solution)

Soient $n,\,p\in\mathbb{N}^*$ avec $n\geqslant p$, $\mathrm{A}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $\mathrm{B}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Alors il existe un unique vecteur $\mathrm{X}_0\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ minimisant la quantité $\|\mathrm{AX}-\mathrm{B}\|$ où $\|\cdot\|$ désigne ici la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Remarque. L'exercice suivant permet de justifier que le vecteur X_0 est l'unique solution du système de Cramer ${}^t\mathrm{AAX}={}^t\mathrm{AB}$. On parle alors de **pseudo-solution**.

Exercice 39

✧ **Exemple**

On pose
$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&2\\2&0\\1&1\end{bmatrix}\quad\text{et}\quad \mathrm{B}=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$$

Justifier et calculer l'unique matrice colonne X telle que la norme $\|\mathrm{AX}-\mathrm{B}\|$ soit minimale.

PO10

Exercice 40

✦✦ Reprenons les notations du théorème et justifions la remarque précédente.

1. **a)** Justifier que $\operatorname{Ker}\left({}^t\mathrm{AA}\right)=\operatorname{Ker}(\mathrm{A})$, puis $\operatorname{rg}({}^t\mathrm{AA})=\operatorname{rg}(\mathrm{A})$.
   b) En déduire que ${}^t\mathrm{AA}$ est une matrice inversible.
2. **a)** Vérifier que pour tout $\mathrm{X}\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $\left\langle \mathrm{X},{}^t\mathrm{A}\,(\mathrm{AX}_0-\mathrm{B})\right\rangle=0$.
   b) En déduire que ${}^t\mathrm{AAX}_0={}^t\mathrm{AB}$.

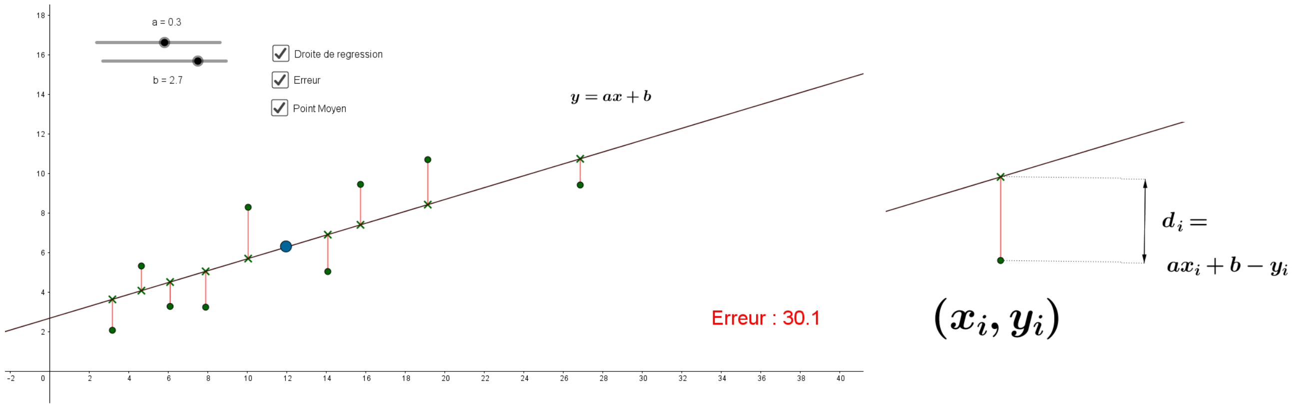
On a donc bien une unique solution donnée par $\mathrm{X}_0=\left({}^t\mathrm{AA}\right)^{-1}\mathrm{AB}$. *Pour une seconde démonstration, voir l'exercice* **??**, *p.***??**, *partie II.*

PO11

Régression linéaire

Considérons n points de $\mathbb{R}^2$, $\left(x_1,y_1\right),\ldots,\left(x_n,y_n\right)$ non alignés verticalement. On cherche la droite qui « approxime » au mieux ces n points. Si on note $y=ax+b$, l'équation d'une droite, on cherche à minimiser l'erreur

$$\mathrm{E}_r=\sum_{i=1}^{n}{d_i}^2=\sum_{i=1}^{n}\left(ax_i+b-y_i\right)^2.$$



Traduisons matriciellement le problème. Posons

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \mathrm{A} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{de sorte que} \quad \mathrm{AX} - \mathrm{B} = \begin{bmatrix} ax_1 + b - y_1 \\ ax_2 + b - y_2 \\ \vdots \\ ax_n + b - y_n \end{bmatrix}.$$

Si on considère le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et la norme associée

$$\mathrm{E}_r = \|\mathrm{AX} - \mathrm{B}\|^2.$$

Les deux colonnes de la matrice A forment une famille libre (les points ne sont pas alignés verticalement). La matrice A est donc de rang 2. D'après le théorème précédent, il existe un seul vecteur minimisant $\|\mathrm{AX} - \mathrm{B}\|$. Calculons ce vecteur X_0 à l'aide de la remarque. On a

$${}^t\!\mathrm{AA} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n {x_i}^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$$

On montre que ${}^t\!\mathrm{AA}$ est inversible et l'inverse est donné par

$$\left({}^t\!\mathrm{AA}\right)^{-1} = \frac{1}{n \sum_{i=1}^n {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \begin{bmatrix} n & -\sum_{i=1}^n x_i \\ -\sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n {x_i}^2 \end{bmatrix}.$$

De plus, on calcule

$${}^t\!\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix}.$$

Ceci permet d'expliciter le vecteur X, puis ses composantes a et b :

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{n \sum_{i=1}^n {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\right)}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n {x_i}^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)^2}.$$

Si $\bar{x}$ (resp. $\bar{y}$) et σ_x (resp. σ_y) désignent la moyenne et l'écart-type empirique de la série statistique $\{x_i \mid i \in [\![1;n]\!]\}$ (resp. $\{y_i \mid i \in [\![1;n]\!]\}$), $\mathrm{Cov}(x,y)$ désigne la covariance empirique de x et y et $\rho_{x,y}$ désigne le coefficient de corrélation empirique, alors la droite de régression linéaire de y en x a pour équation :

$$y - \bar{y} = \rho_{x,y} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}) = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\sigma_x^2}(x - \bar{x}).$$

Remarque. Nous verrons une seconde démonstration de ce résultat par le calcul différentiel.

Exercices

Exercice 41. ✦ ✎ Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel # PO12

$$\mathrm{H} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}.$$

Exercice 42. ✦ On place dans $\mathbb{R}^5$ muni de son produit scalaire canonique et on note $\mathscr{B}$, la base canonique de $\mathbb{R}^5$. Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ où # PO13

$$f_1 = e_1 + e_2 - e_3, \quad f_2 = e_3 + e_5 \quad \text{et} \quad f_3 = e_2 - e_3.$$

Donner la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur F.

TD Exercice 43. ✦✦ ✎ **À bonne distance d'Attila** # PO14

On considère $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle = \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{AB}\right) \in \mathbb{R}.$$

Soit H, le sous-espace vectoriel des matrices de trace nulle.

1. Donner la dimension de $\mathrm{H}^{\perp}$. Préciser une base.
2. Soit J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer $\min\limits_{\mathrm{A} \in \mathrm{H}} \|\mathrm{A} - \mathrm{J}\|$.

TD Exercice 44. ✦✦✦ **CNS pour un projecteur orthogonal** # PO15

Soient $(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et p, un projecteur de E.

1. Montrer l'équivalence entre les énoncés :

   i) Le projecteur p est orthogonal **ii)** $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \langle x, p(x) \rangle \geqslant 0.$

   Indication. On pourra considérer $\lambda x + y$ *où* $x \in \mathrm{Ker}\, p$, $y \in \mathrm{Im}\, p$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Même question avec les énoncés :

   i) Le projecteur p est orthogonal **iii)** $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$

TD Exercice 45. ✦✦✦ ✎ **Deux approches pour un même problème de minimisation** # PO17

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\mathrm{F}(x, y, z) = 24x^2 + 2y^2 + z^2 + 12xy + 2yz + 4zx - 240x - 48y - 12z.$$

1. **a)** Vérifier que F admet un unique point critique, noté A.

   b) On admet (par le calcul) que $\mathrm{F}(x, y, z) = (2x + y + z - 6)^2 + (4x + y - 18)^2 + 4(x - 9)^2 - 684$. En déduire que F admet un minimum sur $\mathbb{R}^3$. Préciser la valeur du minimum.

   c) Calculer $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^n \,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   d) Justifier la convergence et exprimer en fonction de F, l'intégrale :

   $$\mathrm{I}(a, b, c) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \left(t^3 - at^2 - bt - c\right)^2 \mathrm{d}t.$$

   e) En déduire l'existence et la valeur de

   $$\mathrm{I} = \inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \mathrm{I}(a, b, c).$$
2. Pour tous $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_3[x]$, on pose

   $$\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{P}(t) \mathrm{Q}(t) \,\mathrm{d}t$$

   On vérifie que cela définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[x]$.

   a) En utilisant la question 1, calculer la distance du polynôme $\mathrm{P}_0(x) = x^3$ au sous-espace $\mathbb{R}_2[x]$.

   b) Comment retrouver ce résultat en calculant le projeté orthogonal de P_0 sur $\mathbb{R}_2[x]$?

Exercice 46. ✦✦✦ **Partition de l'unité** # PO18

Soit $(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

1. Soient p, q deux projecteurs orthogonaux tels que

$$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad \|p(x)\|^2 + \|q(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

   a) Justifier que $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$.

   b) En déduire que $p + q$ est un projecteur orthogonal.

2. Soient maintenant p_1, p_2, …, p_n des projecteurs orthogonaux tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{id}_\mathrm{E}$.

   a) Montrer que pour tout $x \in \mathrm{E}$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\|p_i(x)\right\|^2 = \|x\|^2.$$

   b) En déduire que pour toute partie non vide I de $[\![1;n]\!]$ l'endomorphisme $\sum_{i\in \mathrm{I}} p_i$ est un projecteur orthogonal.

Exercice 47. ✦✦✦ **Sujet de révision** *extrait de ESSEC 2012* # PO19

Soient m, $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. Ainsi si

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R}),$$

le produit scalaire de X et Y s'obtient par la relation ${}^t\mathrm{XY} = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$ et la norme euclidienne de Y par : $\|\mathrm{Y}\|_m^2 = {}^t\mathrm{YY} = \sum_{i=1}^{m} {y_i}^2$.

1. *Question préliminaire.*
   Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension k non nulle et $(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \ldots, \mathrm{U}_k)$ une base orthonormée de vecteurs colonnes de F.
   On envisage la projection orthogonale sur F représentée par sa matrice P dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   Montrer que $\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{U}_i^t \mathrm{U}_i$ et vérifier que P est une matrice symétrique.

2. **Partie I.** *Décomposition spectrale de la matrice* ${}^t\mathrm{AA}$ *associée à une matrice* A *de* $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
   On envisage dans toute cette partie une matrice A appartenant à $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

   a) Préciser la taille de la matrice ${}^t\mathrm{AA}$ et vérifier que $\mathrm{Ker\,A} \subset \mathrm{Ker}\,{}^t\mathrm{AA}$.

   b) Montrer que si $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}\,{}^t\mathrm{AA}$ alors $\|\mathrm{AX}\|_m = 0$ et établir que $\mathrm{Ker\,A} = \mathrm{Ker}\,{}^t\mathrm{AA}$. Montrer que A et ${}^t\mathrm{AA}$ sont nulles simultanément.

   c) Justifier l'égalité : $\mathrm{Im}\,{}^t\mathrm{A} = \mathrm{Im}\,{}^t\mathrm{AA}$.

3. a) Établir que la matrice ${}^t\mathrm{AA}$ est diagonalisable et en calculant $\|\mathrm{AX}\|_m^2$ pour X vecteur propre de la matrice ${}^t\mathrm{AA}$, montrer que ses valeurs propres sont des réels positifs.

   b) On désigne par $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ la liste des valeurs propres distinctes de la matrice ${}^t\mathrm{AA}$, classée dans l'ordre croissant.
   On rappelle que

$$\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{E}_{\lambda_i}\left({}^t\mathrm{AA}\right) \text{ où } \mathrm{E}_{\lambda_i}\left({}^t\mathrm{AA}\right) = \mathrm{Ker}\left({}^t\mathrm{AA} - \lambda_i \mathrm{I}_n\right).$$

   Pour i entier naturel compris entre 1 et p, on note P_i la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{E}_{\lambda_i}\left({}^t\mathrm{AA}\right)$ dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   Vérifier que pour i et j distincts compris entre 1 et p, $\mathrm{P}_i\mathrm{P}_j$ est la matrice nulle.
   Justifier les relations : $\mathrm{I}_n = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{P}_i$ et ${}^t\mathrm{AA} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathrm{P}_i$. Cette dernière écriture s'appelle la décomposition spectrale de ${}^t\mathrm{AA}$.

4. *Exemples*

   a) Déterminer la décomposition spectrale de ${}^t\mathrm{AA}$ lorsque A est la matrice 3,3 égale à

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   b) On envisage la matrice ligne $\mathrm{A} = (a_1 a_2 \cdots a_n)$ où les réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont fixés, non tous nuls simultanément. Ainsi, $\mathrm{A}^t\mathrm{A}$ est un réel. Montrer que le polynôme $\mathrm{X}^2 - \left(\mathrm{A}^t\mathrm{A}\right)\mathrm{X}$ est annulateur pour la matrice ${}^t\mathrm{AA}$. Préciser la liste des valeurs propres et la décomposition spectrale de la matrice ${}^t\mathrm{AA}$.

   Partie II. *Pseudo solution d'une équation linéaire.*
   On s'intéresse dans cette partie à l'équation $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ où $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. Une matrice X appartenant à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite solution de cette équation si elle vérifie la relation $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$. Elle est dite pseudo solution de cette équation si elle vérifie :

$$\forall \mathrm{Z} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \|\mathrm{AX} - \mathrm{B}\|_m \leqslant \|\mathrm{AZ} - \mathrm{B}\|_m$$

5. On suppose que l'équation $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet au moins une solution. Montrer que X est une pseudo solution si et seulement si elle est solution de l'équation.

6. On suppose que X est une pseudo solution de l'équation. Montrer que, pour tout réel λ et toute matrice Y de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\lambda^2 \|AY\|_m^2 + 2\lambda\, {}^tY{}^tA(AX - B) \geqslant 0.$$

En déduire que ${}^tAAX = {}^tAB$.

7. Montrer que tout X de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant la relation ${}^tAAX = {}^tAB$ est pseudo solution et en déduire qu'il existe toujours au moins une pseudo-solution de l'équation.

8. *Exemple*
Déterminer toutes les pseudo-solutions de l'équation AX = B lorsque :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Parmi celles-ci, préciser celle dont la norme euclidienne est minimale.

9. Donner une condition sur le rang de A pour que l'équation admette une unique pseudo solution.

Les exotiques

Exercice 48. ✦✦✦ Dans la suite, on identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec les matrices colonnes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. # PO20
Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires centrées et admettant un moment d'ordre 2. On pose

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C_X = \Big(\mathrm{Cov}\big(X_i, X_j\big)\Big)_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Soit $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. Exprimer la variance $\mathbf{V}\big(\langle u, X\rangle\big)$ à l'aide de C_X et u.
($\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne ici le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$).

2. Soient H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et $u \in H^{\perp}$.
Montrer que l'événement $[X \in H]$ est presque sûr si et seulement si $u \in \operatorname{Ker} C_X$.

Exercice 49. ✦✦✦ Soient X_1, X_2, deux variables aléatoires indépendantes et suivant une loi normale centrée réduite. Soit M, un point de coordonnées (X_1, X_2). Soient $a \in \mathbb{R}$ et Δ_a la droite d'équation $y = ax$. On pose # PO21

$$Y = \inf_{u \in \Delta_a} \|M - u\|^2.$$

Justifier que Y admet une espérance et la calculer.

CHAPITRE 16

Convergences et approximations

Ce calcul délicat s'étend aux questions les plus importantes de la vie, qui ne sont en effet, pour la plupart, que des problèmes de probabilité.

PIERRE-SIMON, MARQUIS DE LAPLACE
Mathématicien, physicien français (1749-1827)

1 Inégalités de concentration

Proposition 23 (inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev)

- Soit Z une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \mathbf{P}\big([Z \geqslant \lambda]\big) \leqslant \frac{\mathbf{E}(Z)}{\lambda}.$$

- Soit X une variable aléatoire réelle admettant une variance, alors

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \mathbf{P}\big(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Exercice 50

✦ En moyenne, une personne sur 100 sait placer dans le bon ordre les pays baltes sur une carte. On choisit au hasard n personnes et de manière indépendante, notons Y_n le pourcentage des personnes capables de donner le bon ordre.

1. Donner l'espérance et la variance de Y_n.
2. Par application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une valeur de n à partir de laquelle Y_n se trouve dans l'intervalle

$$I =]0,009; 0,011[$$

avec une probabilité supérieure à 0,9.

CVA2

Remarque. Ces inégalités ont peu d'applications pratiques, car la majoration qu'elles fournissent est la plupart du temps excessive, mais elles sont valables quelle que soit la loi de X, pourvu que l'on puisse définir une espérance ou une variance. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous permettra toutefois de démontrer la loi faible des grands nombres (voir théorème page 27).

Exercice 51

✦✦ ✎ Soit X une variable à densité dont une densité f est nulle sur $\mathbb{R}^-$. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $\int_0^{+\infty} f(t)e^{\lambda t}\,dt$ soit convergente. Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}_*^+, \quad \forall x \in]0,\lambda[, \qquad \mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant e^{-ax}\mathbf{E}\left(e^{xX}\right).$$

\# CVA4

Exercice 52

✦ Soit X une variable aléatoire possédant une espérance de 6 et une variance de 2. Appliquer, lorsque cela est possible, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour majorer ou minorer les probabilités des événements suivants. Préciser si le résultat obtenu est intéressant.

1. $[2 \leqslant X \leqslant 10]$;
2. $[5 < X < 7]$;
3. $[X \leqslant 7]$;
4. $[|X-6| \geqslant 1]$;
5. $[X \geqslant 11]$;
6. $[X \geqslant 4]$.

\# CVA3

2 Convergence en probabilité

2.1 Définition et exemples

Définition 24 (Convergence en probabilité)

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et X une variable aléatoire définie aussi sur cet espace.
On dit que la suite $(X_n)_n$ **converge en probabilité** vers la variable aléatoire X, noté $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} X$ si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \mathbf{P}\left(|X_n - X| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0..$$

Exemple. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme continue sur $[0;1]$. On montre que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire presque surement constante à 1.

Exercice 53

✧ ✎ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Reprendre le calcul précédent pour justifier la convergence en probabilité de $(Z_n)_n$ vers une variable aléatoire que l'on précisera.

\# CVA5

2.2 Les théorèmes de convergence en probabilité

Règles de calcul

⚠ **Attention.** Contrairement au cas des suites réelles ou des fonctions numériques, il n'y a pas unicité de la limite (si elle existe). Plus précisément, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et X, X′ des variables aléatoires définies sur le même espace et telles que

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} X \quad \text{et} \quad X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} X' \quad \text{alors} \quad \mathbf{P}\left(X \neq X'\right) = 0.$$

Proposition 25 (convergence en probabilité et combinaisons linéaires)

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Si $\quad X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} X$ et $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} Y$

Alors $\quad$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad \lambda X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} \lambda X$ et $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} X + Y$.

Exercice 54

✦ Prouver cet énoncé. *Pour le second point, on pourra utiliser l'encadrement*

$$\left[|X_n - X| < \frac{\varepsilon}{2}\right] \cap \left[|Y_n - Y| < \frac{\varepsilon}{2}\right] \subset \left[\left|X_n + Y_n - (X+Y)\right| < \varepsilon\right].$$

CVA6

Proposition 26 (composition par une fonction continue)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Si
- La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X.
- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Alors
$$f(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} f(X).$$

Remarque. On peut affiner le théorème en ne supposant seulement que f est continue sur un intervalle I tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_n \in I) = 1$.

Exercice 55

✦✦ **Preuve dans deux cas particuliers**

Soient $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ tel que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \alpha|x-y|$.
   Montrer que $f(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} f(X)$.
2. Justifier que si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec les variables X_n à valeurs dans $[a; b]$, alors $f(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} f(X)$.

CVA7

Loi faible des grands nombres

Théorème 27 (loi faible des grands nombres)

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et X une variable aléatoire définie aussi sur cet espace.

Si
- La variable X admet un moment d'ordre 2.
- Les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes et de même loi que X.

Alors la suite des variables aléatoires $\overline{X_n}$, moyenne arithmétique des n variables X_1, X_2, $\cdots$, X_n, converge en probabilité vers son espérance mathématique $\mathbf{E}(X)$. Autrement dit,

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} \mathbf{E}(X).$$

Remarque. **Cas de la loi binomiale**
Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ avec $Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n; p)$. Alors

$$\frac{Y_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} Z, \qquad \text{où Z est une variable aléatoire certaine égale à } p.$$

Application. Considérons une expérience aléatoire, et un événement A de probabilité théorique p associé à cette expérience. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Répétons n fois l'expérience de manière indépendante et désignons par X_n le nombre de succès (c'est-à dire le nombre de fois où A est réalisé). Y_n suit donc une loi binomiale de paramètres n, p.
Posons de plus,

$$F_n(A) = \frac{Y_n}{n}, \text{ la fréquence empirique d'apparition de l'événement A.}$$

Par la loi faible des grands nombres, on en déduit l'énoncé suivant :

Corollaire 28 (interprétation d'une probabilité)

Lorsque le nombre d'expériences aléatoires augmente indéfiniment, la fréquence d'apparition $F_n(A)$ d'un événement A converge en probabilité vers sa probabilité théorique p. Autrement dit

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \mathbf{P}\Big(\big|F_n(A) - p\big| > \varepsilon\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a une première formulation mathématique de l'interprétation intuitive d'une probabilité d'un événement.

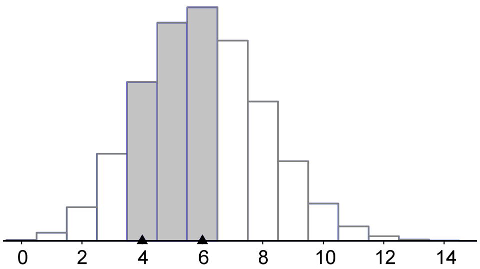
La probabilité d'un événement est la fréquence que l'on observerait si on effectuait une infinité de fois l'expérience dans « des conditions parfaitement identiques ».

3 Convergence en loi

3.1 Rappels : représentations graphiques des lois

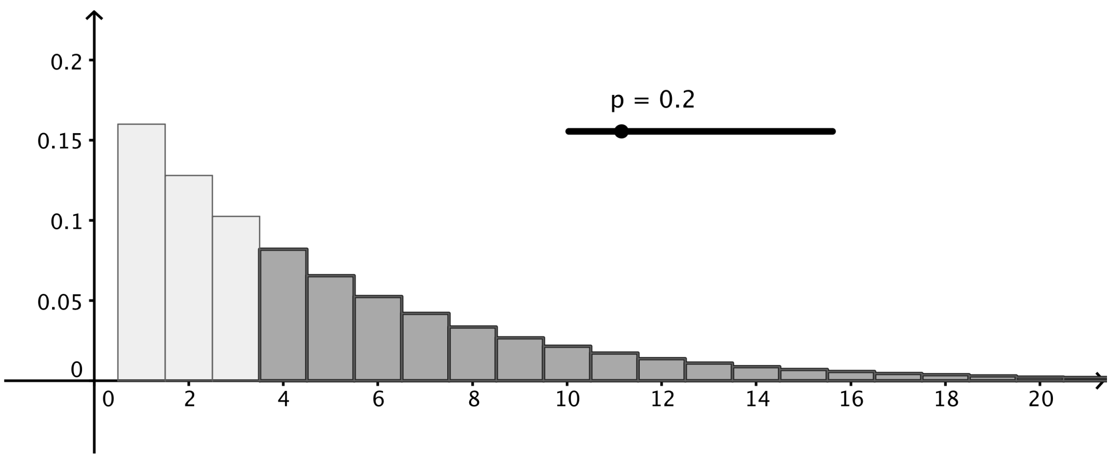
Cas des variables aléatoires discrètes

• Soit X une variable finie avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$.
Nous avons vu que l'on peut résumer une loi d'une variable finie par un tableau. Pour chaque indice i, on indique la probabilité $\mathbf{P}(X = x_i)$.
On peut aussi utiliser les diagrammes en bâtons, en abscisse, on place les valeurs x_i. Dans la suite, on s'arrange pour que la hauteur du bâton partant de x_i soit telle que l'aire du rectangle s'identifie à $\mathbf{P}(X = x_i)$.



Exemple. Ci-contre, le cas de la loi binomiale de paramètres $n = 20$, $p = 0,3$.
Notons que pour avoir la probabilité $\mathbf{P}\Big([X \in [a;b]]\Big)$, il suffit de sommer les aires des rectangles compris entre les abscisses a et b. En particulier, la somme des aires totales des rectangles est $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.
Ici, la partie grisée a pour aire $\mathbf{P}\Big([X \in [4;6]]\Big)$.

• Lorsque X est une variable aléatoire discrète dénombrable ($X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$), on ne considère qu'un nombre fini de valeurs $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. En géneral, les valeurs où la probabilité n'est pas négligeable.
Donnons l'exemple de la loi géométrique de paramètre $p = 0,2$ où on s'est limité à $[\![0;20]\!]$.

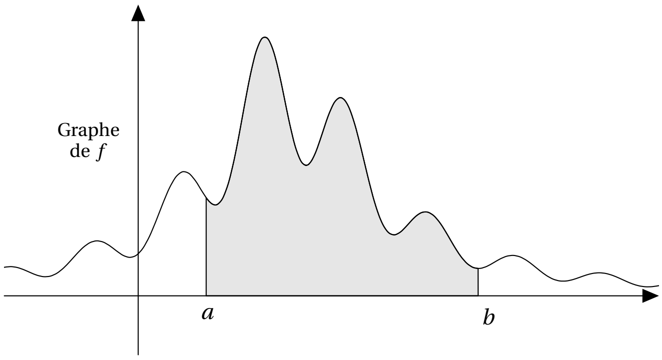


L'aire de la partie la plus grisée correspond à une approximation de $\mathbf{P}([X \geq 4])$.

Graphe des densités des variables aléatoires à densité

Soit X une variable aléatoire à densité dont f, est une densité.
L'aire de la partie grisée comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$, $x = b$ correspond exactement à la probabilité que X prenne les valeurs entre a et b.

$$\text{Aire} = \mathbf{P}\big([a \leqslant X \leqslant b]\big) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$



3.2 Définition et exemples

Définition 29 (convergence en loi)

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire toutes définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Notons
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n, la fonction de répartition de la variable X_n,
- F, la fonction de répartition de la variable X.

On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers X, noté $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$, si en tout point x de continuité de F :

$$F_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(x).$$

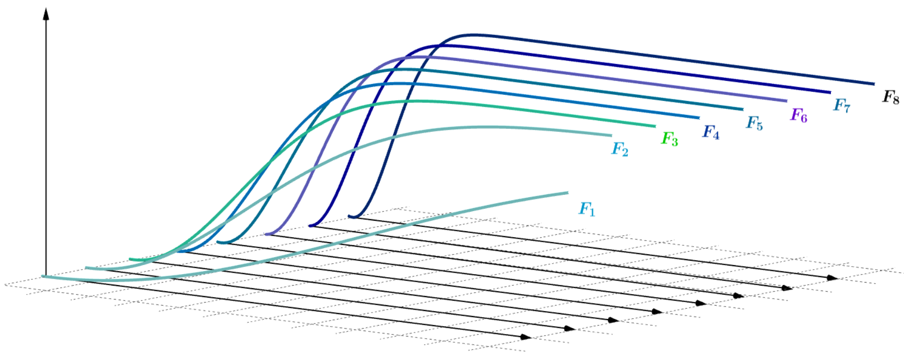
⚠ **Attention.** Il n'y a pas unicité de la limite lors d'une convergence en loi. Si X et Y ont même loi, alors

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X \iff X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Y.$$

Exemples.

- *Exemple 1.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on vérifie que la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(t) = n^2 t \exp\left(-n^2 t^2/2\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ est une densité de probabilité. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à densité où f_n est une densité de X_n. On montre que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X où X est une variable presque surement constante à 0.

  Ci-dessous, une représentation des courbes des premières fonctions de répartition dans des plans séparés.



- *Exemple 2.* Reprenons le cas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{U}([0;1])$. On montre que la suites de variables $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ converge en loi vers une variable presque surement constante en 1.

- L'exercice suivant donne un exemple où la suite converge vers une variable non presque surement constante.

Exercice 56

✦ ✎ Reprenons les notations de l'exemple précédent et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M_n = n(1 - Y_n).$$

Étudier la convergence en loi de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

CVA8

Proposition 30 (convergence en loi)

La convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers X impose pour tous points a, b de continuité de F

$$\mathbf{P}\Big(\big[a < X_n \leqslant b\big]\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}\Big(\big[a < X \leqslant b\big]\Big).$$

Proposition 31 (convergence en loi dans le cas discret)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad X_n(\Omega) \subset \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N},\quad \mathbf{P}\big([X_n = k]\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p_k \in [0;1].$$

Alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X avec

$$X(\Omega) \subset \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall\, k \in X(\Omega),\qquad \mathbf{P}\big([X = k]\big) = p_k.$$

Exemple. Si $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(p_n)$ avec $p_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p \in]0;1[$. On montre que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.

Exercice 57

✧ **Exemples** *Les questions 1 et 2 sont indépendantes*

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X_n une variable aléatoire de loi

$$X_n(\Omega) = \{0;1;2\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}\big([X_n = 0]\big) = \frac{n-\alpha}{3n},\quad \mathbf{P}\big([X_n = 1]\big) = \frac{n+\cos(n)^2}{3n} \quad \mathbf{P}\big([X_n = 2]\big) = \frac{n+\sin(n)^2}{3n}.$$

a) Déterminer la valeur de α.

b) Vérifier que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une loi usuelle.

2. Soit $X_n \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_n)$ avec $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{R}_*^+$.
Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

CVA9

3.3 Les théorèmes de convergence en loi

Règles de calculs sur les limites

⚠ **Attention.** Contrairement à la convergence en probabilité, la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers X et Y n'implique pas nécessairement la convergence de la suite $(X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $X + Y$.

Exercice 58

✦ **Contre-exemple**
Soit $X \in \mathscr{B}(1/2)$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = X$ et $Y_n = X$.
Vérifier que cela fournit bien un contre-exemple.

CVA10

Remarques. *Un peu de hors-programme*

- On montre que la convergence en probabilité implique la convergence en loi :

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X \qquad \text{(voir exercice ??, p.??).}$$

Il est à noter que la réciproque est fausse. Il suffit de reprendre le contre-exemple de l'exercice précédent.

Exercice 59

✧ Soient c un réel et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles convergeant en loi vers une variable aléatoire X. Alors la suite de variables aléatoires $(X_n + c)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $X + c$.

CVA11

- L'exercice s'étend avec le théorème de Slutsky :

Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$ et si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une constante c, alors :

- $(X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $X + c$
- $(X_n Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers cX.

Proposition 32 (composition et convergence en loi)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Si
- La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.
- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Alors
$$f(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} f(X).$$

Exercice 60

✦ **Cas particulier**
Justifier l'énoncé précédent dans le cas particulier où la fonction f est bijective croissante.

CVA12

Convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson

Théorème 33 (convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson)

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires binomiales $\mathscr{B}(n; p_n)$ telles que
$$np_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \in \mathbb{R}_*^+.$$
Alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.
$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z \quad \text{avec} \quad Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda).$$

Exercice 61

✦✦ Voici une preuve du théorème. Complétez-la.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $n \geqslant k$, on a $\quad \mathbf{P}([X_n = k]) = \binom{n}{k} {p_n}^k (1-p_n)^{n-k} = \binom{n}{k}(1-p_n)^n \left(\dfrac{p_n}{1-p_n}\right)^k.$

1. Justifier les équivalents de chacun des facteurs lorsque n tend vers $+\infty$ (k est fixé).

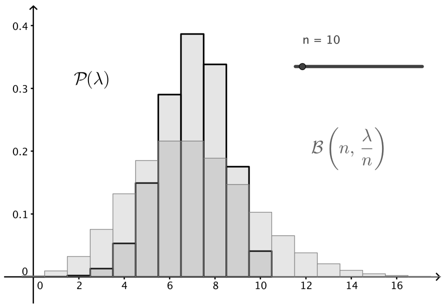
$(a)\quad \left(\dfrac{p_n}{1-p_n}\right)^k \underset{n+\infty}{\sim} \left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^k;\quad (b)\quad \ln(1-p_n) \underset{n+\infty}{\sim} -\dfrac{\lambda}{n},\ (1-p_n)^n \underset{n+\infty}{\sim} e^{-\lambda};\quad (c)\quad \binom{n}{k} \underset{n+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}.$

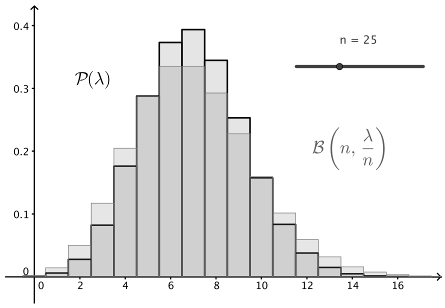
2. Conclure.

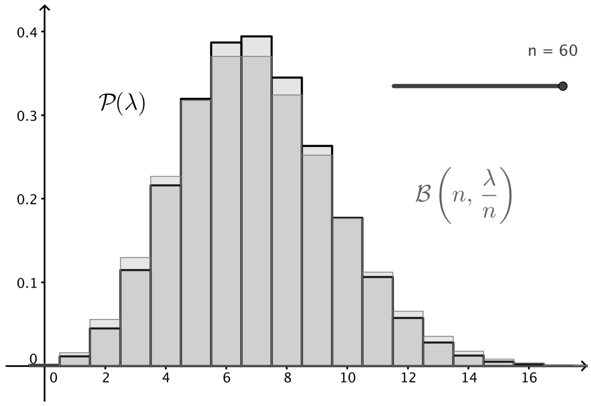
CVA13

Interprétation graphique

On trace les diagrammes représentant les lois binomiales $\mathscr{B}(n; \lambda/n)$ et de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. On constate que plus n est grand, plus les diagrammes associés aux lois $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{B}(n; \lambda/n)$ se confondent.







Application à l'approximation

Considérons $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n;p)$, on a pour tout $k \in [\![0;n]\!]$,

$$\mathbf{P}\big([X=k]\big) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ce produit peut être assez difficile à évaluer numériquement lorsque n est « très grand » et p « petit ».
L'idée est donc dans les cas limites (n est « très grand » et p « petit ») d'avoir une expression approchée plus simple de la probabilité en posant $\lambda = np$ et

$$\mathbf{P}\big([X=k]\big) \simeq \mathbf{P}\big([Z=k]\big) \quad \text{où} \quad Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda).$$

Remarque. Dans la pratique, dès que $n \geqslant 30$, $p \leqslant 0,1$ et $np < 15$, on approche $\mathscr{B}(n;p)$ par $\mathscr{P}(np)$.

Exemple. Nombre de fautes d'orthographe.

Exercice 62. Soit $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. # CVA14

1. a) Justifier que pour tout réel x, $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.
   b) En déduire $\mathbf{P}\big([Z \text{ est pair}]\big)$.
2. *Application.* Une ligne de transmission entre émetteur et récepteur transporte des données représentées par 10 000 bits (un bit est un élément de $\{0;1\}$). La probabilité que la transmission d'un bit soit erronée est estimée à 10^{-5} et on admet que les erreurs sont mutuellement indépendantes les unes des autres. On contrôle la qualité de la transmission avec un calcul de parité sur le nombre de « 1 » envoyés :
   - S'il y a un nombre impair d'erreurs, un message d'erreur apparaît.
   - Sinon, c'est-à-dire s'il y a un nombre pair d'erreurs, la transmission est acceptée.

   a) Considérons X la variable aléatoire associant à chaque envoi de données, le nombre d'erreurs lors de la transmission, c'est-à-dire le nombre de bits parmi les 10 000 dont la transmission est erronée. Quelle est la loi de X ?
   b) Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucune erreur sachant que la transmission est acceptée.
   On admettra que l'on peut approximer le problème par une loi de Poisson.

Exercice 63

✦ Proposer une méthode pour simuler une loi de Poisson $\mathscr{P}(5)$ uniquement à partir de la commande **rd.random()**.

CVA15

4 Théorème limite central

4.1 Le théorème

Théorème 34 (limite central)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Si
- Les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes.
- Les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont même loi et admettent une espérance m et une variance $\sigma^2 \neq 0$.
- On note $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\overline{X_n}^* = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X_n} - m)$.

Alors $$\left(\overline{X_n}^*\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z \quad \text{avec} \quad Z \hookrightarrow \mathscr{N}(0;1).$$

Autrement dit, pour tous $a < b$, $$\mathbf{P}\left(\left[a \leqslant \overline{X_n}^* \leqslant b\right]\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(b) - \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-t^2/2}\,dt,$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

L'énoncé du théorème central limite est parfois surprenant et n'a souvent rien à voir avec celui du programme.

Rapport de Jury : Oral HEC 2021

4.2 Cas particuliers

Rappelons que si X est une variable aléatoire admettant une variance σ^2 (et donc une espérance), on définit la variable aléatoire centrée réduite associée à X, notée X^* par

$$\boxed{X^* = \frac{X - \mathbf{E}(X)}{\sigma} \quad \text{avec} \quad \mathbf{E}(X^*) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X^*) = 1.}$$

$$\text{et, si} \quad Z \hookrightarrow \mathbf{P}(\lambda) \quad \text{alors} \quad Z^* = \frac{Z - \lambda}{\sqrt{\lambda}}.$$

Théorème 35 (de Moivre-Laplace)

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires suivant des lois binomiales $\mathscr{B}(n;p)$ avec $p \in]0;1[$, alors

$$X_n^* = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z \quad \text{avec} \quad Z \hookrightarrow \mathscr{N}(0;1).$$

Autrement dit, pour tous $a < b$, on a

$$\mathbf{P}\left(\left[a \leqslant X_n^* \leqslant b\right]\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(b) - \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-t^2/2}\,dt,$$

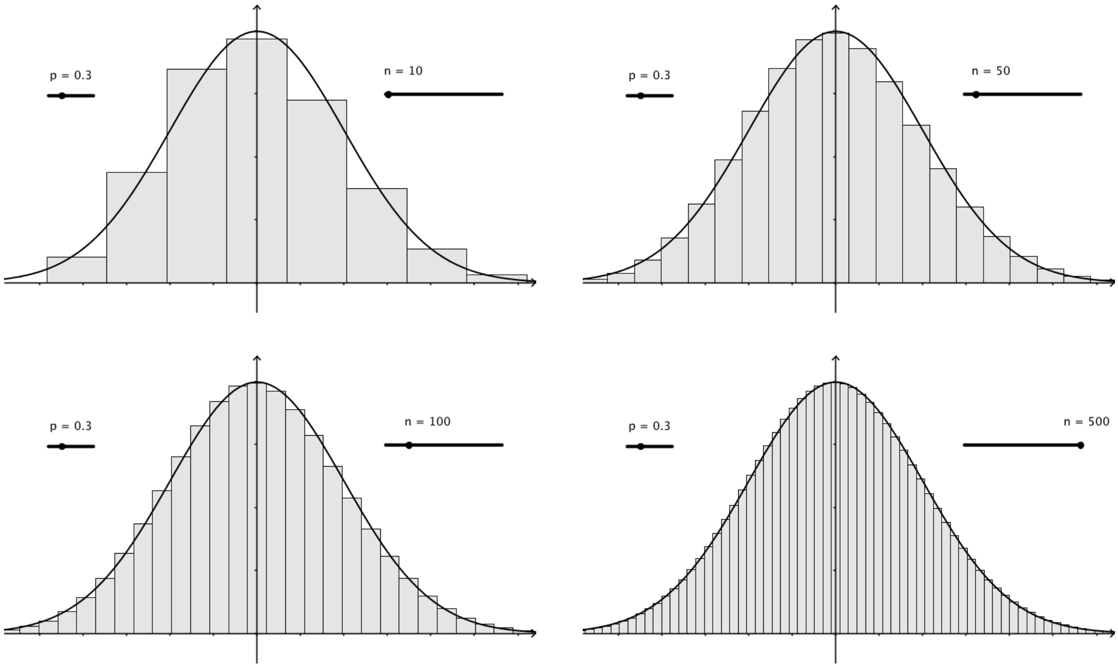
où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Remarque. Dans la pratique, dès que $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $nq \geqslant 5$, on approche $\mathscr{B}(n,p)$ par $\mathscr{N}(np, npq)$.

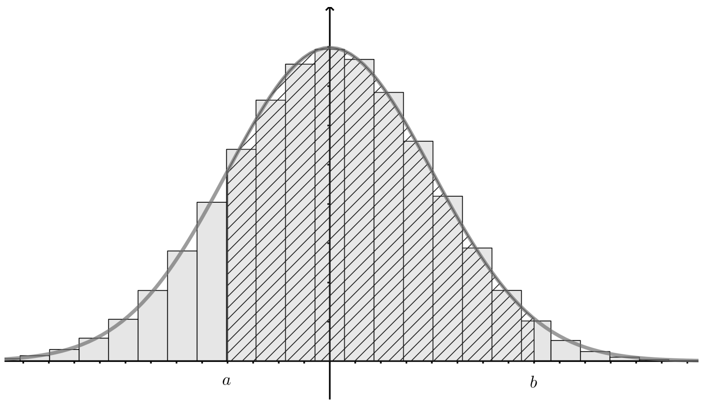
Attention. Il y a deux théorèmes de convergence impliquant des lois binomiales. Précisons la différence :
- Dans le cas de convergence vers une loi de Poisson : $n \to +\infty$ mais $np_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda > 0$, sous-entendu, $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
- Dans le cas de convergence vers une loi normale : $n \to +\infty$ mais p correspond à une probabilité fixée strictement positive.

Interprétation graphique

On trace les diagrammes associés aux lois de $X_n{}^*$ pour différentes valeurs de n (10, 50, 100 et 500). On superpose la courbe représentative de la densité de loi normale centrée réduite.



On constate que plus n est grand, plus les diagrammes épousent la forme de la courbe.



Interprétons.
Soit $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n;p)$. De nouveau, plaçons le diagramme associé à la loi $X_n{}^*$. L'aire hachurée est l'aire sous la courbe représentative de la densité. Elle vaut donc

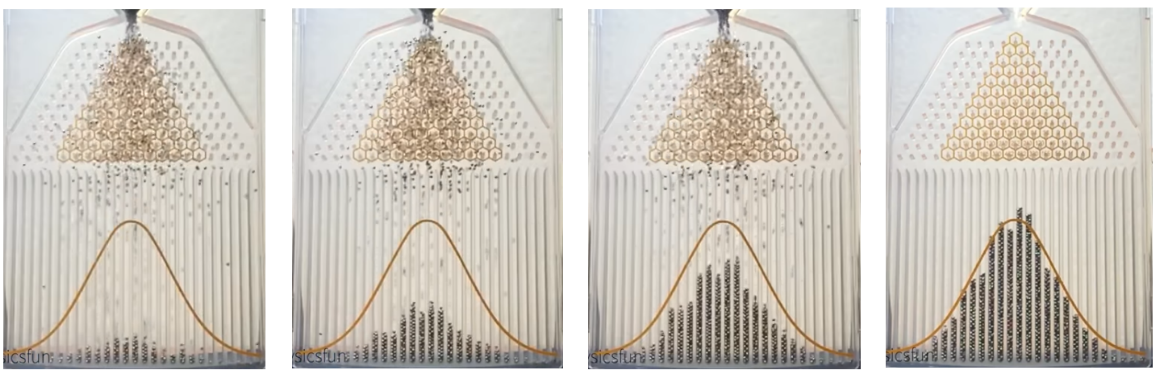
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{P}\big([a \leqslant Z \leqslant b]\big),$$

où $\quad f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-t^2) \quad$ et $\quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$.

Cette aire s'identifie approximativement à l'aire des rectangles compris entre les droites $x = a$ et $x = b$. Or, cette dernière est par construction $\mathbf{P}\big([a \leqslant X_n{}^* \leqslant b]\big)$. On en déduit l'approximation :

$$\mathbf{P}\Big(\big[a \leqslant X_n^* \leqslant b\big]\Big) \simeq \mathbf{P}\Big(\big[a \leqslant Z \leqslant b\big]\Big).$$

Exemple. *La planche de Galton.*



Théorème 36 (convergence des lois de Poisson)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que $X_n \hookrightarrow \mathscr{P}(n\lambda)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors la suite des variables aléatoires centrées réduites $({X_n}^*)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

$$ {X_n}^* = \frac{X_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z \quad \text{avec} \quad Z \hookrightarrow \mathscr{N}(0;1). $$

Remarque. Dans la pratique, dès que $\lambda \geqslant 18$, on approche la loi $\mathscr{P}(\lambda)$ par la loi normale $\mathscr{N}(\lambda, \lambda)$.

4.3 Applications à l'approximation

Méthode

Comment approximer une probabilité à l'aide d'une loi normale?

On lance une pièce équilibrée 10000 fois et on souhaite calculer la probabilité que le nombre de « PILE » soit compris dans l'intervalle $[4900;5100]$.
On suppose les lancers mutuellement indépendants.
Ainsi si X est la variable aléatoire qui compte le nombre de « PILE », X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10000$, $p = \frac{1}{2}$. L'espérance de X est $np = 5000$, l'écart type est $\sqrt{np(1-p)} = 50$. Évaluons $\mathbf{P}\big([4900 \leqslant X \leqslant 5100]\big)$.

- La première étape consiste à renormaliser en introduisant X^* :

$$ \begin{aligned} \mathbf{P}\big([4900 \leqslant X \leqslant 5100]\big) &= \mathbf{P}\big([np-100 \leqslant X \leqslant np+100]\big) = \mathbf{P}\big([-100 \leqslant X - np \leqslant 100]\big) \\ &= \mathbf{P}\left(\left[-2 \leqslant \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant 2\right]\right) = \mathbf{P}\big([-2 \leqslant X^* \leqslant 2]\big). \end{aligned} $$

- Puis, on applique le théorème précédent.

$$ \mathbf{P}\Big(\big[-2 \leqslant X^* \leqslant 2\big]\Big) \simeq \mathbf{P}\big([-2 \leqslant Z \leqslant 2]\big) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 \quad \text{avec} \quad Z \hookrightarrow \mathscr{N}(0;1). $$

À l'aide de Python ou de table de la loi normale (en fin de livret), on sait que $\Phi(2) \simeq 0,9772$.En conclusion : la probabilité recherchée vaut environ $0,9544$.

Exemple. Le Surbooking.

5 Compléments avec Python

5.1 Simulation d'une loi normale par la méthode des 12 uniformes

Le théorème limite central énonce que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0;1]$ alors

$$ \left(\overline{X}_n{}^*\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z \quad \text{avec} \quad Z \hookrightarrow \mathscr{N}(0;1). $$

Exercice 64

✦✦

1. En se limitant à douze variables $X_1, \ldots, X_{12}$ suivant des lois uniformes, écrire une fonction Python qui renvoie une simulation de la loi normale centrée réduite.
2. En déduire une seconde fonction qui prend en arguments μ, σ, m et renvoient m simulations d'une loi $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$.
3. Tester votre programme en superposant sur une même figure l'histogramme de 2000 simulations de loi $\mathscr{N}(1,4)$ et la densité de cette loi.

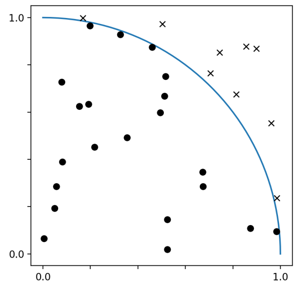
CVA16

5.2 Exemples de méthodes de Monte-Carlo

Les méthodes dites de Monte-Carlo sont toutes basées sur la loi (faible) des grands nombres.

Applications aux calculs d'aire

Commençons par un cas d'école : l'approximation de π.
On tire au hasard et uniformément un point dans le carré $[0;1]\times[0;1]$. La probabilité que le point soit situé dans le quart de disque est $\pi/4$ (aire du quart du disque $\pi\times 1^2/4$ sur l'aire du carré 1). Partant de ce constat, on peut simuler un grand nombre de tirages d'un point dans le carré et approximer la probabilité de $\pi/4$ par la fréquence empirique. En multipliant par 4, on obtient une approximation de π. Ce qui donne ici :



Editeur

```
def approxPI(m):
# m correspond au nombre de tirages
    Compteur=0
    for i in range(m):
        x=rd.random()
        y=rd.random()
        if x**2+y**2<1:
            Compteur+=1
    print('Approximation:',4*Compteur/m)
```

Console

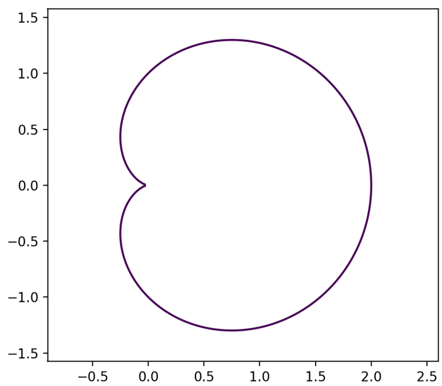
```
>>> approxPI(1000)    Approximation: 3.152
>>> approxPI(10000)   Approximation: 3.1412
>>> approxPI(50000)   Approximation: 3.14552
>>> approxPI(100000)  Approximation: 3.14632

# à comparer à :
3.141592653589793 ...
```

La convergence est assez mauvaise mais il ne faut pas pour autant écarter la méthode. Elle s'avère par exemple particulièrement efficace en grande dimension.

Exercice 65. ✦✦ **Aire d'une cardioïde**
L'objectif de cet exercice est d'obtenir une approximation de l'aire de la partie délimitée par la courbe d'équation

$$\left(x^2+y^2-x\right)^2 = x^2+y^2.$$

1. Comment tirer un point au hasard dans le carré $[-0.5;2.5]\times[-1.5;1.5]$ en utilisant la commande **rd.random**?
2. En déduire un programme qui tire au hasard un point dans le carré et déclare si le point est à l'intérieur de la cardioïde ou non.
3. À l'aide d'une méthode de Monte-Carlo, donner une approximation de l'aire de la cardioïde.
4. En remarquant que la courbe est la ligne de niveau L_0 d'une certaine fonction de deux variables, tracer la cardioïde.



Application à l'approximation d'intégrales

- **Principe**
  Considérons :

— $g:[0,1]\to[a;b]$ une fonction continue dont on souhaite calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$.
— $(U_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
— Pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, on pose $g(U_i)$. D'après les lemme d'égalité en loi et des coalitions, les variables sont indépendantes et de même loi.

Par le théorème de transfert, les variables $X_i = g(U_i)$ admettent toutes une même espérance donnée par

$$\mathbf{E}(X_i) = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t.$$

De même, ces variables admettent une variance et la loi faible des grands nombres donne

$$\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} \mathbf{E}(X_1) = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dès lors, pour calculer une valeur approchée de l'intégrale, on peut simuler un grand nombre de fois les variables U_i, calculer les images $g(U_i)$ et en faire leur moyenne arithmétique.

Exercice 66. ✦✦

- *La théorie : estimation de la probabilité de l'erreur*
  Soit X, une variable aléatoire à valeurs dans $[a;b]$.

1. Pour quelle valeur de m, $\mathbf{E}\left((X-m)^2\right)$ atteint son minimum ? Avec $m=\frac{a+b}{2}$, déduire : $\mathbf{V}(X) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$.

2. En reprenant les notations du début, justifier que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \mathbf{P}\left(\left|\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(U_k)\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4n\varepsilon^2} \quad (\bullet)$$

- *La pratique*

3. Calculer $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$. En déduire, une fonction avec en argument n et qui permet d'approcher π.

4. Déterminer n afin d'obtenir une valeur à 10^{-3} près de π avec une probabilité d'au moins 95%. Commenter.

Exercices

Révisions

Exercice 67. ✦ Soit X une variable aléatoire admettant une variance. Montrer que $x\mathbf{P}(X > x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. # CVA19

Exercice 68. ✦ **Estimation** # CVA20

Une urne contient une proportion p de boules blanches. On souhaite obtenir expérimentalement une approximation de p. Pour cela, on effectue $n \in \mathbb{N}^*$ tirages avec remise et on note X_n le nombres de boules blanches obtenues au cours de ces n tirages. On suppose les tirages mutuellement indépendants.

1. Donner la loi de X_n. Préciser l'espérance et la variance.
2. Justifier que pour tout réel $\varepsilon > 0$, $\quad \mathbf{P}\left(\left|\dfrac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.
3. Combien de tirages faut-il effectuer pour pouvoir affirmer, avec un risque inférieur à 5%, que la fréquence d'obtention de boules blanches au cours des n tirages diffère de p d'au plus 1% ?

Exercice 69. ✦✦ **Les souris mutantes** # CVA21

Un laboratoire élève des souris dont 1/4 sont mutantes. La durée de vie d'une souris mutante est une variable aléatoire dont la moyenne est de 3 ans avec un écart-type de 9 mois, mais elle ne vit jamais plus de 4 ans. La durée de vie d'une souris normale a une moyenne d'un an, avec un écart-type de 6 mois. On ne prend en compte que les souris dont la durée de vie est strictement positive.

Une souris est vivante au bout de deux ans. On note α la probabilité qu'elle soit mutante.

On considère l'événement M : « La souris est une souris mutante »et on note X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la souris.

1. Exprimer $\dfrac{\mathbf{P}(M \cap [X \geqslant 2])}{\mathbf{P}(\overline{M} \cap [X \geqslant 2])}$ en fonction de α.
2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une minoration de α.

TD **Exercice 70.** ✦✦ **Inégalité de Chernov** # CVA22

1. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Soit X une variable aléatoire discrète telle que e^{tX} admette une espérance. Montrer, à l'aide de l'inégalité de Markov, que pour tout $a \in \mathbb{R}$,
$$\mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbf{E}\left(e^{tX}\right)}{e^{ta}}.$$
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On suppose que $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.
   a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, e^{tX} admet une espérance et que :
   $$\mathbf{E}\left(e^{t\mathbf{X}}\right) = \left(1 - p + pe^t\right)^n.$$
   b) Étudier les variations de la fonction $f : t \mapsto (1-p)e^{-\frac{t}{2}} + pe^{\frac{t}{2}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que f admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$, égal à $2\sqrt{p(1-p)}$.
   c) À l'aide de la question 1, montrer que $\mathbf{P}\left(X \geqslant \frac{n}{2}\right) \leqslant 2^n\left(p(1-p)\right)^{\frac{n}{2}}$.

Exercice 71. ✦✦ **Comparaison entre la médiane et l'espérance** # CVA23

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On suppose que X admet une variance.

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$, $\beta \in \mathbb{R}^+$. Démontrer que $\quad \mathbf{P}\big([X \geqslant \mathbf{E}(X) + \alpha]\big) \leqslant \dfrac{\mathbf{E}\left(\left(X - \mathbf{E}(X) + \beta\right)^2\right)}{(\alpha+\beta)^2}$.
2. Avec $\beta = \mathbf{V}(X)/\alpha$, en déduire que $\quad \mathbf{P}\big([X \geqslant \mathbf{E}(X) + \alpha]\big) \leqslant \dfrac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{V}(X) + \alpha^2}$.
3. On suppose dans cette question que X est une variable aléatoire à densité avec une densité strictement positive.
   a) Justifier qu'il existe un unique réel m tel que $\quad \mathbf{P}\big([X \leqslant m]\big) = \dfrac{1}{2}$.
   Un tel réel m est la médiane de la variable X.
   b) À l'aide de la question 2 pour un réel α bien choisi, justifier que $\mathbf{E}(X) + \sigma(X) \geqslant m$ où $\sigma(X)$ désigne l'écart-type de la variable X.
   c) En considérant aussi la variable $-X$, conclure en montrant que $\left|m - \mathbf{E}(X)\right| \leqslant \sigma(X)$.

Convergences en probabilité et en loi

TD **Exercice 72.** ✦✦ ✎ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : # CVA36

$$Y_n = X_n + X_{n+1} \quad \text{et} \quad T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

1. Calculer l'espérance et la variance de T_n.
2. Peut-on appliquer la loi des grands nombres pour étudier la convergence en probabilité de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
3. Justifier que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire presque sûrement constante.

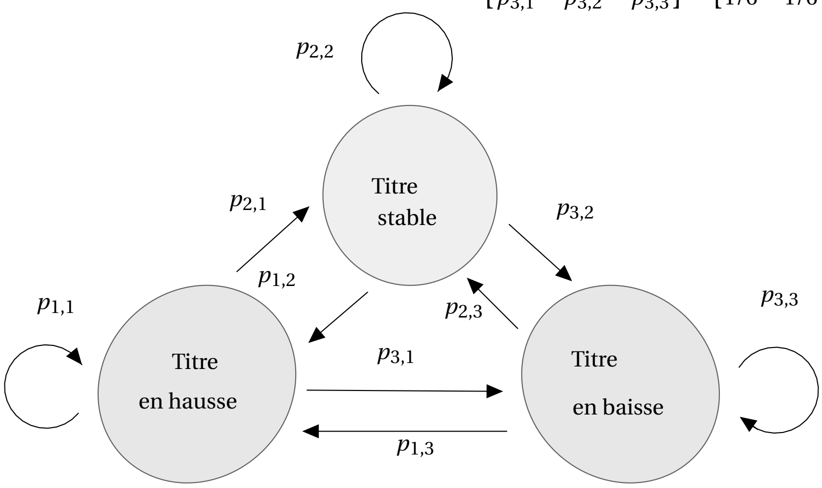
TD **Exercice 73.** ✦ ✎ **Chaîne de markov : évolution d'un titre boursier** # CVA37

Dans une bourse de valeurs, un titre peut monter, descendre ou rester stable. On modélise l'évolution du titre.

- Si un jour n, le titre monte, le jour suivant, il montera avec la probabilité $2/3$, restera stable avec la probabilité $1/6$, et baissera avec la probabilité $1/6$.
- Si un jour n, le titre est stable, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $1/6$, restera stable avec la probabilité $2/3$, et baissera avec la probabilité $1/6$.
- Si un jour n, le titre baisse, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $1/6$, restera stable la probabilité $1/6$, et baissera avec la probabilité $2/3$.

Le premier jour, le titre est stable.

Les probabilités sont spécifiées par une matrice dite de transition : $M = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{bmatrix}$.



On souhaite connaître l'évolution de ce titre. Pour cela, on introduit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire aléatoire X_n définie par

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si le titre donné monte le jour } n \\ 0 & \text{si le titre est stable le jour } n \\ -1 & \text{si le titre donné baisse le jour } n. \end{cases} \quad \text{et} \quad U_n = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(X_n = 1) \\ \mathbf{P}(X_n = 0) \\ \mathbf{P}(X_n = -1) \end{bmatrix}.$$

1. a) Vérifier que $U_{n+1} = MU_n$.
   b) En déduire U_n en fonction de M et U_1.
2. Donner la loi de X_n.
3. Justifier que $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire X.
4. Comparer MU et U où $U = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(X=1) \\ \mathbf{P}(X=0) \\ \mathbf{P}(X=-1) \end{bmatrix}$. Commenter.

Exercice 74. ✧ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable X_n dont la loi est donnée par : # CVA38

$$X_n(\Omega) = \{0, n\}, \quad \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}.$$

Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et la convergence de la suite numérique $\left(\mathbf{E}(X_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Commenter.

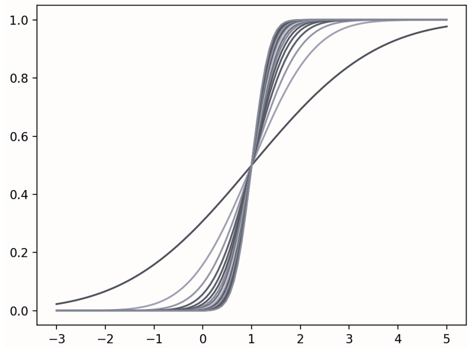
Exercice 75. ✦ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{N}(1; 1/n)$. # CVA39

1. Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. Expliquer et commenter le programme Python suivant.
La commande **sp.ndtr(x)** *renvoie* $\Phi(x)$ *où* Φ *est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.*

Editeur

```
import scipy.special as sp
import numpy as np

def Fnormal(x,k):
    return sp.ndtr(k**(1/2)*(x-1)/2)
x=np.linspace(-3,5,100)
for k in range(1,50,3) :
    y=Fnormal(x, k)
    plt.plot(x, y)
plt.show()
```



Exercice 76. ✦✦ ✎ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère X_n une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,{\sigma_n}^2)$ et X qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ avec σ_n, σ strictement positifs. On suppose de plus que les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes. Montrer l'équivalence entre : # CVA40

- *i)* La suite de variable aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.
- *ii)* La suite de réels $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers σ.

Exercice 77. ✦ Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. Soit $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$. On pose $Z_n = \min(U_1,\dots,U_n)$. # CVA41

1. Montrer que la suite (nZ_n) converge en loi vers Y.
2. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$. Déterminer la loi de $Z = e^{-X}$.
3. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoire indépendantes suivant toutes la même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Déterminer la limite en loi de la suite (nT_n) où $T_n = \min\left(e^{-\lambda X_1},\dots,e^{-\lambda X_n}\right)$.

Exercice 78. ✦✦ **Convergence en loi avec des lois de Cauchy** # CVA42
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \frac{n}{\pi\left(1+n^2t^2\right)}.$$

1. Justifier que f_n est une densité de probabilité. Soit X_n une variable aléatoire dont f_n est une densité.
2. Peut-on appliquer l'inégalité de Markov à X_n ?
3. Donner la fonction de répartition de X_n. En déduire la convergence en loi de la suite de variable aléatoire $(X_n)_n$.

Exercice 79. ✦✦ ✎ **Variante de la loi faible des grands nombres** # CVA43
Soit $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels appartenant à $[0,1]$ et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, X_k$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p_k. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad m_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k.$$

1. a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbf{V}\left(X_k\right) \leqslant \frac{1}{4}$. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une majoration de $\mathbf{V}(Y_n)$. On admet que la variance d'une somme de variables de Bernoulli indépendantes est la somme des variances.
   b) En déduire, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}\left(|Y_n - m_n| < \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

2. On suppose que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers m.
   a) Soit $\varepsilon > 0$. On suppose $|m_n - m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Comparer les événements $\left[|Y_n - m_n| < \frac{\varepsilon}{2}\right]$ et $[|Y_n - m| < \varepsilon]$. En déduire que

$$\mathbf{P}\left(|Y_n - m_n| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant \mathbf{P}\left(|Y_n - m| < \varepsilon\right).$$

   b) En déduire la convergence en probabilité de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 80. ✦✦ ✎ **Convergence de loi discrète vers une loi à densité** # CVA44
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire discrète $X_n \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1;n]\!])$. On pose $Y_n = X_n/n$.

Justifier que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire que l'on précisera.
Indication. On pourra utiliser l'expression de la fonction de répartition de X_n,

$$\forall\, x \in [0;n], \qquad F_n(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{n}.$$

TD Exercice 81. ✦✦ ✎ **Autour des lois de Cauchy** # CVA46

- *La fonction arctangente*

1. Rappeler la définition de la fonction arctangente. Donner son graphe avec l'équation de la tangente en 0.

2. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$. Que dire de cette expression si $x \in \mathbb{R}_*^-$?

3. Justifier le développement suivant lorsque $x \to +\infty$: $\quad \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right).$

- *Loi de Cauchy*

4. Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_a par : $f_a(x) = \dfrac{a}{\pi\left(a^2+x^2\right)}$. Montrer que f_a est une densité de probabilité.

Dans la suite, X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ admettant f_a pour densité. On dit alors que X suit une loi de Cauchy de paramètre a et on écrit $X \hookrightarrow \mathscr{C}(a)$.

5. Donner la fonction de répartition de X. Est-ce que X possède une espérance ?

6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. Reconnaître la loi de λX lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{C}(a)$. Que dire si $\lambda \in \mathbb{R}_*^-$?

- *Maximum et exemple de convergence en loi*
Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Cauchy de paramètre 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les variables aléatoires :

$$M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad N_n = n{M_n}^{-1}.$$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, préciser $\mathbf{P}(N_n \leqslant 0)$. Vérifier ensuite que pour tout $t \in \mathbb{R}_*^+$

$$\mathbf{P}\big([N_n \leqslant t] \cap [M_n \geqslant 0]\big) = 1 - \frac{1}{\pi^n}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{n}{t}\right)\right)^n.$$

8. Conclure en montrant que la suite $(N_n)_n$ converge en loi vers une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

9. Utiliser la question 6 pour reprendre la question précédente en supposant maintenant que les variables $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ suivent une loi de Cauchy $\mathscr{C}(a)$ avec $a \in \mathbb{R}_*^+$.

⋙ *Pour des versions similaires, voir EMLyon 2017, EDHEC 2019.*

Exercice 82. ✦✦ **Convergence en loi et fonctions génératrices** # CVA47

Soient une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X, définies sur le même espace probabilisé, à valeurs dans $\{x_0, \dots, x_m\}$. On définit les fonctions G_n sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad G_{X_n}(t) = \sum_{k=0}^{m} \mathbf{P}\left(X_n = x_k\right) \cdot t^k \quad \text{et} \quad G_X(x) = \sum_{k=0}^{m} \mathbf{P}(X = x_k) \cdot t^k.$$

1. Vérifier que, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X, alors :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad G_{X_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} G_X(t) \qquad (\bullet)$$

2. L'objectif de la question suivante est d'établir la réciproque. On suppose donc la propriété $(\bullet)$ vérifiée. On pose

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 & \dots & {x_0}^m \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 & \dots & {x_1}^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & {x_m}^2 & \dots & {x_m}^m \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{m+1}(\mathbb{R}).$$

a) 🔧 Justifier que les colonnes de A forment une famille libre. En déduire l'inversibilité de A.

b) 🔧 Soit $k \in [\![0; m]\!]$. En déduire que la suite $\left(\mathbf{P}\left(X_n = x_k\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ_k, la limite.

c) Montrer que les réels $\left(\ell_k\right)_{k\in[\![0;m]\!]}$ sont les coefficients d'une loi de probabilité.
C'est-à-dire que les réels ℓ_k sont compris dans $[0;1]$ *et leur somme vaut 1.*

d) En déduire que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi.

3. • *Application*
Soient $m \in \mathbb{N}^*$ fixé et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels de $[0;1]$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(m; p_n)$.

a) Expliciter $G_{X_n}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

b) En utilisant l'équivalence prouvée aux questions 1 et 2, montrer que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi si et seulement si la suite de réels $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Approximations

TD **Exercice 83.** ✦✦✦ ✎ **Approximation de π via la méthode de Monte Carlo** *d'après oraux ESCP 2014* # CVA49

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et toutes de même loi uniforme sur $[0,1]$. On suppose que toutes les variables U_n et V_n (pour $n\in\mathbb{N}^*$) sont indépendantes.

1. Pour tout réel $x\in]0,1]$, calculer l'intégrale :

$$J(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\,dt.$$

On pourra justifier et utiliser le changement de variable (à x fixé) :

$$\varphi :]-\pi/2,\pi/2[\to\mathbb{R}, \qquad \theta\mapsto t = \frac{x}{2}\sin\theta + \frac{x}{2}.$$

2. a) Déterminer la loi de U_n^2.

b) Justifier que la variable $U_n^2+V_n^2$ possède une densité h, que l'on exprimera sous forme d'une intégrale.

c) Déterminer $h(x)$ pour $x\in[0,1]$.

3. On pose :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } {U_n}^2+{V_n}^2\leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Déterminer la loi de X_n.

4. a) Prouver que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n\in\mathbb{N}^*, Z_n = \frac{4}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, converge en probabilité vers la constante π. C'est-à-dire, pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}_*^+$,

$$\mathbf{P}(|Z_n-\pi|\geqslant\varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) Soit $\alpha\in]0,1[$ et $\delta>0$.
Montrer qu'il existe un entier n_0, qu'on exprimera en fonction de α et δ, tel que

$$\forall n\geqslant n_0, \quad \mathbf{P}(|Z_n-\pi|>\delta)\leqslant\alpha$$

c) En déduire un programme Python qui donne une approximation de π.

Les inclassables

Exercice 84. ✦✦ **Application de la formule de Stirling** *D'après EDHEC 2007* # CVA51

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

1. Rappeler quelle est la loi suivie par S_n. Donner l'espérance et la variance de S_n.

2. À l'aide du théorème central limite, établir que $\mathbf{P}(S_n\leqslant n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

3. En déduire la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t}\,dt.$$

4. a) Utiliser le résultat précédent pour montrer que $\displaystyle\int_0^1 z^{n-1}e^{-nz}\,dz \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{2n^{n+1}}$.

b) On admet que $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$. En déduire un nouvel équivalent de $\displaystyle\int_0^1 z^{n-1}e^{-nz}\,dz$.

Exercice 85. **Amélioration de la méthode de Monte-Carlo, Réduction de la variance par méthode des variables antithétiques.** # CVA54

Soit f, une fonction continue dont on souhaite approcher

$$I = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

La méthode de Monte-Carlo part de l'égalité $I = \mathbf{E}\big(f(U)\big)$ où $U\hookrightarrow\mathscr{U}([0;1])$.
Dans la suite, on pose g définie sur $[0;1]$ par $g(t) = (f(t)+f(1-t))/2$.

1. Vérifier que $I = \mathbf{E}\big(g(U)\big)$.

2. Comparer les variances de $f(U)$ et $g(U)$.

3. Reprendre l'exemple précédent avec g. Comparer les deux méthodes.

Compléments théoriques sur les différentes convergences

Exercice 86. ✦✦✦ **Convergence presque sûr** # CVA55

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire. Toutes les variables sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On dit que la suite (X_n) converge presque sûrement vers X si :

$$\mathbf{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

L'objectif est de montrer que si la suite $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers X, alors elle converge aussi en probabilité vers X. Pour cela, on pose pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$A_{n,\varepsilon} = \left[|X - X_n| \leqslant \varepsilon\right], \quad B_{n,\varepsilon} = \bigcap_{m=n}^{+\infty} A_{m,\varepsilon} \quad \text{et} \quad A = \left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}.$$

On suppose donc que $\mathbf{P}(A) = 1$.

1. Comparer les événements A et $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_{n,\varepsilon}$.
2. En déduire que $\mathbf{P}(B_{n,\varepsilon}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.
3. Conclure sur la convergence en probabilité de $(X_n)_n$ vers X.

TD **Exercice 87.** ✦✦ ✎ *D'après Oraux HEC BL 2021* # CVA57

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.
On dit que la fonction f vérifie la propriété $\mathscr{L}_k$ sur I s'il existe un réel $k \in {\mathbb{R}^+}^*$ tel que

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

1. a) Montrer que les fonctions sinus et valeur absolue vérifient la propriété $\mathscr{L}_1$ sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que l'on ne peut pas trouver de réel $k \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que la fonction racine carrée vérifie la propriété $\mathscr{L}_k$ sur $[0, 1]$.
   c) Montrer que s'il existe un réel $k \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que f vérifie la propriété $\mathscr{L}_k$ sur I, alors f est continue sur I.
2. Soient un réel $k \in]0, 1, f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la propriété $\mathscr{L}_k$ sur $\mathbb{R}$ et (u_n) la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$
   a) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n |u_1 - u_0|.$$
   b) En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite notée ℓ et vérifiant $f(\ell) = \ell$.
3. Soient un réel $k \in]0, 1[$, f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la propriété $\mathscr{L}_k$ sur $\mathbb{R}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à densité définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et telles que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_{n+1} = f(T_n).$$
   Soit ℓ la limite trouvée à la question 2.
   a) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - *$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \left[k^n |T_0 - \ell| \geqslant \varepsilon\right]$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = 0.$$
   b) Montrer que
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(|T_n - \ell| \geqslant \varepsilon) = 0.$$
   c) Justifier que $(T_n)_n$ converge en loi. Reconnaître la loi limite.

Révisé ?

- **Endomorphismes symétriques**

→ Définition d'une matrice symétrique, antisymétrique. Dimension des s.e.v associés. ☐☐☐ √
→ Définition des endomorphismes symétriques. ☐☐☐ √
→ En dimension finie. φ est symétrique ssi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \langle \varphi(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, \varphi(e_j) \rangle$. ☐☐☐ √
→ En dimension finie. φ est symétrique ssi $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ dans une b.o.n est symétrique. ☐☐☐ √
→ Si φ est symétrique, les sous-espaces propres sont orthogonaux. Preuve. ☐☐☐ √
→ Théorème spectral (version « endomorphisme » et matricielle). ☐☐☐ √
→ Forme quadratique associée à une matrice symétrique. ☐☐☐ √
→ Encadrement de Rayleigh et signe d'une forme quadratique en fonction du spectre. ☐☐☐ √

- **Projecteurs orthogonaux**

→ Définition d'un projecteur orthogonal. ☐☐☐ √
→ Le projecteur est orthogonal ssi le projecteur est symétrique. traduction matricielle. ☐☐☐ √
→ Expression du projeté. Cas d'un projeté sur une droite ou sur un hyperplan. ☐☐☐ √
→ Distance à un sev. Théorème de minimisation par le projecteur orthogonal. ☐☐☐ √

- **Convergences et approximations**

→ Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev. ☐☐☐ √
→ Définition de la convergence en probabilité. ☐☐☐ √
→ Convergence en probabilité d'une somme. ☐☐☐ √
→ Convergence en probabilité et composition par une fonction continue. ☐☐☐ √
→ Loi faible des grands nombres. Preuve. ☐☐☐ √
→ Définition de la convergence en loi. ☐☐☐ √
→ Cas de la convergence en loi pour des variables aléatoires discrètes. ☐☐☐ √
→ Convergence en loi et composition par une fonction continue. ☐☐☐ √
→ Convergence en loi de lois binomiales vers une loi de Poisson. ☐☐☐ √
→ Énoncé du théorème limite central. ☐☐☐ √
→ Cas particulier des lois binomiales (théorème de Moivre-Laplace). ☐☐☐ √
→ Cas particulier des lois de Poisson. ☐☐☐ √