Rappels de cours

Sommaire

Chapitres

1. Les raisonnements mathématiques (psuivante)
2. Calculs et ordres sur $\mathbb{R}$ (p5)
3. Ensembles, cardinaux (p7)
4. Sommes et produits (p11)
5. Fonctions usuelles (p13)
6. Applications (p17)
7. Polynômes (p19)
8. Calculs matriciels (p23)
9. Systèmes linéaires (p27)
10. Introduction aux espaces vectoriels (p29)
11. Exemples de suites récurrentes (p33)
12. Étude globale des suites (p35)
13. Limites de fonctions (p39)
14. Continuité (p41)
15. Dérivabilité (p43)
16. Intégration sur un segment (p47)
17. Probabilités sur un univers fini (p51)
18. Variables aléatoires finies (p53)
19. Lois usuelles (p55)
20. Dimension d'un espace vectoriel (p57)
21. Compléments sur les espaces vectoriels (p59)
22. Applications linéaires (p61)
23. Applications linéaires en dimension finie (p63)
24. Comparaison des suites (p69)
25. Comparaison des fonctions (p71)
26. Séries numériques (p73)
27. Intégrales sur un intervalle quelconque (p75)
28. Dérivées successives (p77)
29. Formules de Taylor (p78)
30. Développements limités (p79)
31. Extrema, convexité (p81)
32. Généralités sur les espaces probabilisés (p85)
33. Variables aléatoires discrètes (p87)
34. Couples de variables aléatoires (p91)
35. Approximations et convergences des variables aléatoires (p93)

Les raisonnements

Donnons un exemple pour chacun des trois raisonnements classiques :

La récurrence

Le raisonnement s'articule en quatre parties :
I. L'introduction où l'on énonce clairement l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$.
II. L'initialisation où l'on vérifie l'hypothèse de récurrence au premier rang.
III. L'hérédité où l'on prouve que la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie sous réserve que $\mathcal{P}(n)$ le soit.
IV. La conclusion où l'on énonce clairement que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est bien démontrée.
Toute rédaction doit comporter ces quatre points.

Exemple. Démontrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation.** D'une part, $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0$. D'autre part, $\dfrac{0^2 \cdot (0+1)^2}{4} = 0$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- **Hérédité.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la proposition $\mathcal{P}(n)$ vraie, démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \qquad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= (n+1)^2 \frac{n^2 + 4(n+1)}{4} = (n+1)^2 \frac{n^2+4n+4}{4} = (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi, si la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Le raisonnement par l'absurde

Pour prouver qu'un énoncé $\mathcal{P}$ est vrai, on peut supposer que la négation de ce dernier est vraie et aboutir à une contradiction.

Exemple. Soit u une suite réelle définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3{u_n}^2 - u_n + 1 \quad \text{et} \quad u_0 = 1.$$

Justifions que la suite u ne converge pas vers une limite finie.
Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Dans ce cas,

$$u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \text{et} \quad 3{u_n}^2 - u_n + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3\ell^2 - \ell + 1.$$

Par unicité de la limite, ℓ est solution de l'équation polynomiale $\ell = 3\ell^2 - \ell + 1$. Or, le discriminant est strictement négatif (-8). Absurde, la suite u ne converge pas vers une limite finie.

Remarque. Rappelons la négation des quantificateurs. Soit $\mathcal{P}(x)$ un énoncé dépendant de $x \in E$ et NON $\mathcal{P}(x)$ sa négation.

- La négation de l'énoncé $\Big(\exists\, x \in E, \mathcal{P}(x)\Big)$ est $\Big(\forall\, x \in E, \text{NON}\, \mathcal{P}(x)\Big)$.
- La négation de l'énoncé $\Big(\forall\, x \in E, \mathcal{P}(x)\Big)$ est $\Big(\exists\, x \in E, \text{NON}\, \mathcal{P}(x)\Big)$.

L'analyse-synthèse

On applique ce type de raisonnement lorsqu'on souhaite déterminer des éléments x tel que l'énoncé $\mathcal{P}(x)$ soit vrai. Il y a trois parties.

- **L'analyse**, où l'on identifie les candidats possibles. On suppose que de tels éléments x existent, puis on essaie de trouver des *conditions nécessaires* à l'existence de tels éléments.
- **La synthèse**, où l'on vérifie si le ou les candidats trouvés sont bien solutions. Autrement dit, on regarde les *conditions suffisantes*.
- **La conclusion**, où l'on regroupe les résultats des deux premières parties.

Exemple. En raisonnant par analyse-synthèse, montrons que la fonction exponentielle s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

- **Analyse.** (recherche des conditions nécessaires)

Supposons que la fonction exp se décompose sous la forme $\exp = p + i$ où p et i sont respectivement des fonctions paire et impaire. Par suite, on a pour tout réel x,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \exp(x) &=& p(x) + i(x) \\ \exp(-x) &=& p(x) - i(x) \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{rcl} p(x) &=& \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \\ i(x) &=& \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \dfrac{L_1 + L_2}{2} \\ L_2 \leftarrow \dfrac{L_1 - L_2}{2}. \end{array}$$

On vient de prouver que si une telle décomposition existe alors elle est unique.

- **Synthèse.** (recherche des conditions suffisantes)

Comme exp est définie sur $\mathbb{R}$, on peut poser pour tout réel x :

$$p(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

De plus, on vérifie que pour $x \in \mathbb{R}$,

$$p(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = p(x) \quad \text{et} \quad i(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -i(x).$$

Autrement dit, p et i sont respectivement paire et impaire. On a aussi

$$p(x) + i(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \exp(x).$$

Il existe au moins une solution au problème.

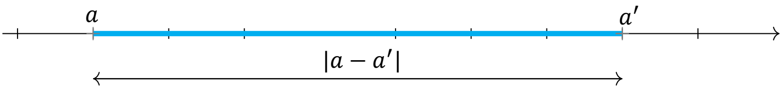
- **Conclusion.**

La fonction exponentielle s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

L'ensemble $\mathbb{R}$

Approximations et inégalités

Soient a et a' deux réels. Lorsqu'on place ces deux nombres sur la droite réelle, la quantité $|a - a'|$ représente la distance entre les deux points d'abscisse a et a'.



On dira que $\tilde{a}$ est **une approximation de a à ε-près** si $|a - \tilde{a}| \leqslant \varepsilon$. Par exemple, à 10^{-2} près :

$$\mathrm{e} \simeq 2{,}72, \quad \pi \simeq 3{,}14, \quad \sqrt{2} \simeq 1{,}41 \quad \text{et} \quad \ln(2) \simeq 0{,}69.$$

PROPOSITION — **somme/produit et inégalités**

Soient $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ des réels.
Si pour tout indice $i \in [\![1;n]\!]$, $\quad a_i \leqslant b_i \quad$ *alors* $\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i.$
Si de plus, ces réels sont positifs : $\quad \displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i \leqslant \prod_{i=1}^{n} b_i.$

THÉORÈME — **inégalité triangulaire**

- *Soient x, x' deux réels,* $\quad \big||x| - |x'|\big| \leqslant |x + x'| \leqslant |x| + |x'|.$
- *Soient n réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$,* $\quad \displaystyle\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$

Les intervalles de $\mathbb{R}$

On dit qu'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est un intervalle s'il s'écrit sous la forme

- $]-\infty, a[$ (ouvert, non borné) ;
- $]-\infty, a]$ (fermé, non borné) ;
- $]a, +\infty[$ (ouvert, non borné) ;
- $[a, +\infty[$ (fermé, non borné) ;
- $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$;
- $]a, b[$ (ouvert, borné) ;
- $]a, b]$ (semi-ouvert, semi-fermé) ;
- $[a, b[$ (semi-ouvert, semi-fermé) ;
- $[a, b]$ segment (fermé, borné)

où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leqslant b$.

Maximum/minimum - bornes supérieure/inférieure

Définition — majorant, minorant

On considère une partie E non vide de $\mathbb{R}$. Soient M, m deux réels.

- *M est **un majorant** de E si :* $\forall x \in E, \quad x \leqslant M.$

*Dans ce cas, on dit que E est une **partie majorée**.*

- *m est **un minorant** de E si :* $\forall x \in E, \quad m \leqslant x.$

*Dans ce cas, on dit que E est **une partie minorée**.*

- *Une partie minorée et majorée est dite **bornée** :* $\exists K \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in E, \quad |x| \leqslant K.$

Définition — maximum, minimum

On considère une partie E non vide de $\mathbb{R}$, on dit que

- *b est **le maximum** de E si :* $\forall x \in E, \quad x \leqslant b \quad$ *et* $\quad b \in E.$
- *a est **le minimum** de E si :* $\forall x \in E, \quad a \leqslant x \quad$ *et* $\quad a \in E.$

Sous réserve d'existence, on note respectivement $b = \max E \quad$ *et* $\quad a = \min E.$

Définition — borne supérieure/inférieure

On considère un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ non vide.

- ***La borne supérieure** de E est définie, sous réserve d'existence, comme le plus petit des majorants de E. On la note* $\sup(E)$.
- ***La borne inférieure** de E est définie, sous réserve d'existence, comme le plus grand des minorants de E. On la note* $\inf(E)$.

Remarque. Si le maximum (resp. minimum) existe, alors $\max E = \sup E$ (resp. $\min E = \inf E$).
Exemple. Pour $a,b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$,

$$\sup\,]-\infty,b] = \sup\,]-\infty,b[= \sup\,]a,b[= \sup\,]a,b] = b.$$

Théorème — de la borne supérieure

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.
Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.

Ensembles, cardinaux

Ensembles

DÉFINITION **appartenance, comparaison d'ensembles**

- *Un ensemble A est constitué d'éléments x qui sont dit* ***appartenir à*** *A. On note* $x \in A$.

- *On dit qu'un ensemble A est* ***inclus*** *dans l'ensemble B, noté $A \subset B$, si tout élément de A est élément de B. Avec des quantificateurs, cela devient*

$$\forall\, x \in A,\ x \in B.$$

- *On dit que deux ensembles A et B sont* ***égaux****, noté $A = B$, si $A \subset B$ et $B \subset A$. Avec des quantificateurs, cela devient*

$$(\,\forall\, x \in A,\ x \in B\,) \quad ET \quad (\,\forall\, x \in B,\ x \in A\,).$$

Remarque. Pour établir une égalité entre deux ensembles A et B, on raisonne souvent par *double inclusion*. On établit $A \subset B$ puis $B \subset A$.

DÉFINITION **ensemble des parties**

- *Considérons deux ensembles A et E. On dit que A est une* ***partie*** *de E (ou encore que A est un sous-ensemble E) si A est inclus dans E.*

- *L'****ensemble des parties*** *de E est noté $\mathcal{P}(E)$.*

Remarque. Si A et B sont deux parties de E, alors

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall x \in E,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

DÉFINITION **complémentaire d'une partie**

Soit A une partie d'un ensemble E. On définit ***le complémentaire*** *de A dans E, noté $\overline{A}$ (en cas d'ambiguïté, on utilise la notation $\complement_E A$), comme la partie de E qui contient tous les éléments de E n'appartenant pas à A. Autrement dit,*

$$\forall\, x \in E, \quad \Big(\ x \notin A \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \overline{A}\ \Big).$$

On définit, de plus, ***le complémentaire de*** *A* ***dans*** *B (on dit aussi B* ***privé de*** *A) comme l'ensemble des éléments de B qui n'appartiennent pas à A. On le note $B \setminus A$.*

DÉFINITION — union, intersection

Considérons un ensemble E, A et B deux parties de E. On définit

- ***La réunion** de A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A **ou** à B.*

$$\forall x \in E, \quad (\quad x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \ \ OU \ \ x \in B \quad);$$

- ***L'intersection** de A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A **et** à B.*

$$\forall x \in E, \quad (\quad x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \ \ ET \ \ x \in B \quad).$$

Exemples. Si A et B sont deux parties de E, alors $A \cup \overline{A} = E$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $A \cap \overline{B} = A \setminus B$.

Généralisation. Considérons pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{P}(E)$, on définit la réunion et l'intersection de parties A_i par

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\exists\, i \in I,\ x \in A_i) \quad \text{et} \quad x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\forall\, i \in I,\ x \in A_i).$$

PROPOSITION — lois DE MORGAN

Pour deux parties A_1 et A_2 d'un ensemble E,

$$\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \quad et \quad \overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}.$$

Généralisation. Considérons pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{P}(E)$, les lois DE MORGAN s'étendent

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}.$$

DÉFINITION — partition d'un ensemble

*Une **partition** d'un ensemble E est un sous-ensemble de parties non vides de E deux à deux disjointes dont la réunion vaut E. Autrement dit, $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E si, pour tout $i \in I$, $A_i \neq \emptyset$,*

$$\bigcup_{i \in I} A_i = E \quad et \quad \forall\, i,j \in I, \quad \Big(i \neq j \quad \Rightarrow \quad A_i \cap A_j = \emptyset \Big).$$

DÉFINITION — produit cartésien

*Soient A et B deux ensembles. On parle de **produit cartésien**, noté $A \times B$, pour désigner l'ensemble des couples dont la première composante appartient à A et la seconde à B. Autrement dit,*

$$A \times B = \big\{ (a,b)\ ;\ a \in A, b \in B \big\}.$$

Exemples. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. La définition s'étend à un produit cartésien de n ensembles. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ ensembles}}$ est l'ensemble des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ où pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $x_i \in \mathbb{R}$.

Cardinal d'un ensemble et coefficients binomiaux

DÉFINITION — cardinal d'un ensemble

*Lorsqu'un ensemble E a un nombre fini d'éléments, on dit qu'il est **fini** et on définit son **cardinal** comme le nombre d'éléments distincts. On le note* $\mathrm{card}(E)$.

Exemples. Si $E = \{0,1,2\}$, $\mathrm{card}(E) = 3$ et $\mathrm{card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = 8$.

PROPOSITION — opérations sur le cardinal

Soient A et B deux parties d'un ensemble E de cardinal fini. A et B sont des ensembles finis, et
- *si $A \subset B$, alors* $\mathrm{card}(A) \leqslant \mathrm{card}(B)$.
- $\mathrm{card}(\overline{A}) = \mathrm{card}(E) - \mathrm{card}(A)$.
- *si $A \cap B = \emptyset$, alors* $\mathrm{card}(A \sqcup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B)$.

THÉORÈME — formule du Crible

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble fini E.

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(A \cup B) &= \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B);\\ \mathrm{card}(A \cup B \cup C) &= \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) + \mathrm{card}(C)\\ &\quad - \mathrm{card}(A \cap B) - \mathrm{card}(A \cap C) - \mathrm{card}(B \cap C) + \mathrm{card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

DÉFINITION — coefficients binomiaux

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}$.
Le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ est le nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments.

Exemples. Pour $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$. Et,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

PROPOSITION — formule explicite des coefficients binomiaux

Pour $p \leqslant n$, $$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

PROPOSITION — formule du triangle de Pascal

Soient n et p deux entiers naturels. $$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}
$$

Les 6 premières lignes du triangle de Pascal

Proposition

Soient n et p deux entiers naturels.

Si $p \leqslant n$ $\qquad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$

Si p et n sont différents de 0, $\qquad \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.$

Sommes et produits

Sommes et produits

Définition

- *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille **finie** de réels.*

  $\sum_{i\in I} a_i$ *et* $\prod_{i\in I} a_i$ *désignent respectivement la somme et le produit de tous les nombres de la famille.*
- *On appelle factorielle de n, que l'on note $n!$, l'entier naturel défini par*

$$0! = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n.$$

Convention. Si I est l'ensemble vide, alors $\sum_{i\in I} a_i = 0$ et $\prod_{i\in I} a_i = 1$.

Proposition — règles de calculs

Soient $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ deux familles finies de réels et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i \quad \text{et} \quad \sum_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i.$$

$$\prod_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda^{\mathrm{card}(I)} \prod_{i\in I} a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i\in I}(a_i b_i) = \Big(\prod_{i\in I} a_i\Big)\cdot\Big(\prod_{i\in I} b_i\Big).$$

Remarque. Lorsque l'ensemble I des indices est une partie de $\mathbb{N}^2$, on parle de somme double.

Théorème — cas des sommes doubles

Soient $(p,n) \in \mathbb{N}^2$, $I = [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$ et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I}$ une famille finie de réels.

$$\sum_{(i,j)\in I} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} a_{i,j}.$$

Sommes usuelles

PROPOSITION **sommes arithmétique et géométrique**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \textit{et} \quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Remarque. Pour $q = 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = n+1$.

THÉORÈME **formule du binôme de Newton**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tous réels a et b,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemples. En reprenant le triangle de Pascal des pages précédentes,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + b^4$$

$$\dots$$

PROPOSITION **une identité remarquable**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous réels a et b,

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Sommes télescopiques

Soit $(a_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de réels.

$$\boxed{\sum_{i=p}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) = a_n - a_p.}$$

Pour s'en convaincre, on peut expliciter la somme

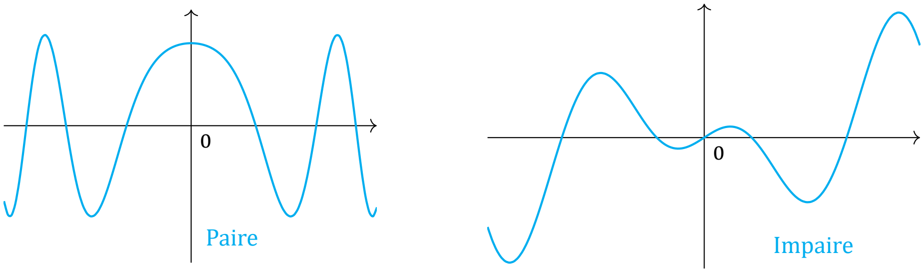
$$\sum_{i=p}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) = (\cancel{a_{p+1}} - a_p) + (\cancel{a_{p+2}} - \cancel{a_{p+1}}) + \cdots + (\cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-2}}) + (a_n - \cancel{a_{n-1}}) = a_n - a_p.$$

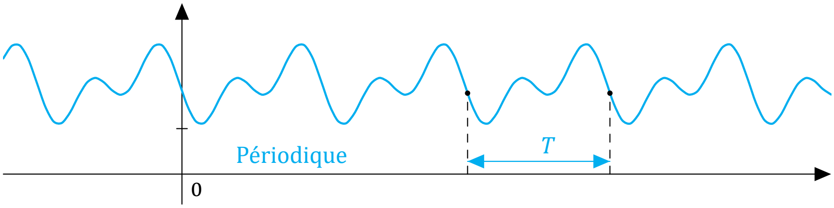
Fonctions usuelles

Les définitions

DÉFINITION **parité et périodicité**

- *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ symétrique (si $x \in I$ alors $-x \in I$), on dit que*
  - → *f est **paire** si pour tout $x \in I$, $f(-x) = f(x)$;*
  - → *f est **impaire** si pour tout $x \in I$, $f(-x) = -f(x)$.*
- *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $T \in \mathbb{R}_*^+$. On dit que*
  - → *f est **T-périodique** si pour tout $x \in I$, on a $x + T \in I$ et $f(x+T) = f(x)$.*
  - → *f est **périodique** s'il existe $T \in \mathbb{R}_*^+$ tel que f soit T-périodique.*





Remarque. Graphiquement, dire que la fonction est paire (respectivement impaire) signifie que la courbe représentative de f a une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (resp. une symétrie centrale par rapport à l'origine).
Le graphe représentatif d'une fonction T-périodique est invariant par une translation.

DÉFINITION **monotonie**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, on dit que
- *f est **croissante sur** I si pour tous $x,y \in I$, $x \leqslant y$ implique $f(x) \leqslant f(y)$;*
- *f est **décroissante sur** I si pour tous $x,y \in I$, $x \leqslant y$ implique $f(x) \geqslant f(y)$;*
- *f est **monotone sur** I si elle est croissante ou décroissante sur I.*

Remarque. Soient f et g sont deux fonctions monotones telles que la composée $h : x \in I \mapsto g\big(f(x)\big)$ soit bien définie.

- Si f et g ont le même sens de variations, alors h est croissante.
- Si f et g n'ont pas le même sens de variations, alors h est décroissante.

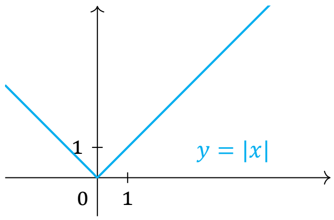
Valeur absolue et partie entière

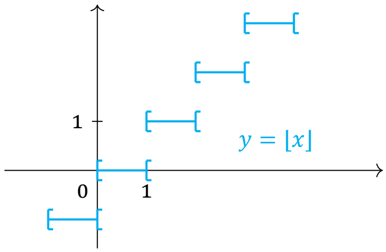
- Rappelons que l'on définit la **valeur absolue** de a, notée $|a|$, par a si a est positif et son opposé sinon. Autrement dit,

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \qquad |a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geqslant 0 \\ -a & \text{si} \quad a < 0. \end{cases}$$

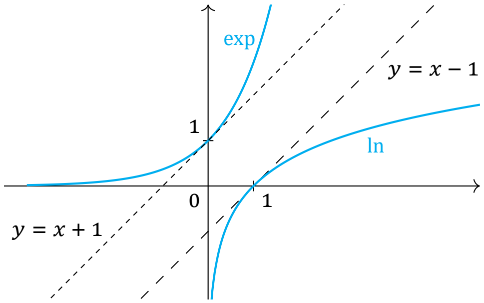
- Pour tout réel x, on définit la **partie entière** de x, notée $\lfloor x \rfloor$, comme l'unique entier relatif n tel que

$$n \leqslant x < n+1.$$





Fonctions exponentielle, logarithme et puissance



- La fonction exponentielle est strictement croissante et continue avec

$$\exp(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \exp(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Elle admet une fonction réciproque : la fonction logarithme, notée ln. Les deux graphes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Pour tous réels x, y,

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Pour tous réels x, y strictement positifs,

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

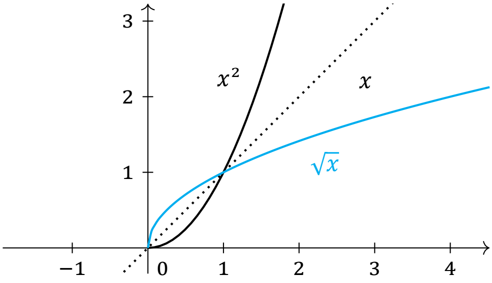
→ Si α est un entier naturel, on définit simplement

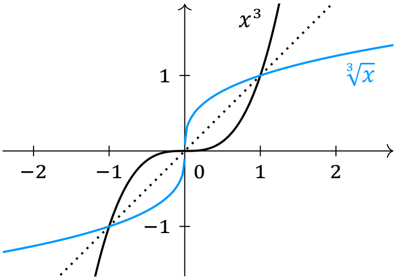
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad x^\alpha = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{\alpha \text{ termes}}.$$

→ Mais dans le cas où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, on peut étendre la définition avec

$$\forall\, x \in]0, +\infty[, \qquad x^\alpha = \exp\big(\alpha \ln(x)\big).$$

• Ci-dessous, les graphes des fonctions $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^2$ et $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$. Ces deux fonctions sont bijectives. On précise le graphe des réciproques.





Fonctions trigonométriques

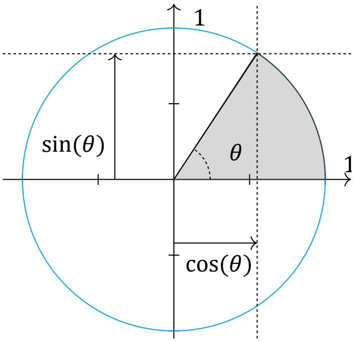
On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
À tout réel t, on associe par enroulement de la droite numérique un unique point M du cercle de centre O et de rayon 1. Le point M a pour coordonnées $\big(\cos(t); \sin(t)\big)$.

• La fonction qui à tout réel t, associe le réel $\cos(t)$ est appelée **fonction cosinus**.

$$\cos : t \in \mathbb{R} \mapsto \cos(t) \in \mathbb{R}.$$

• La fonction qui à tout réel t, associe le réel $\sin(t)$ est appelée **fonction sinus**.

$$\sin : t \in \mathbb{R} \mapsto \sin(t) \in \mathbb{R}.$$



Valeurs particulières

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

• Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.
• Pour tout nombre réel t,

$$-1 \leqslant \cos(t) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant \sin(t) \leqslant 1.$$

• Sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec

$$\cos' = \sin \quad \text{et} \quad \sin' = \cos\,.$$

Formules

Pour tout x réel, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$

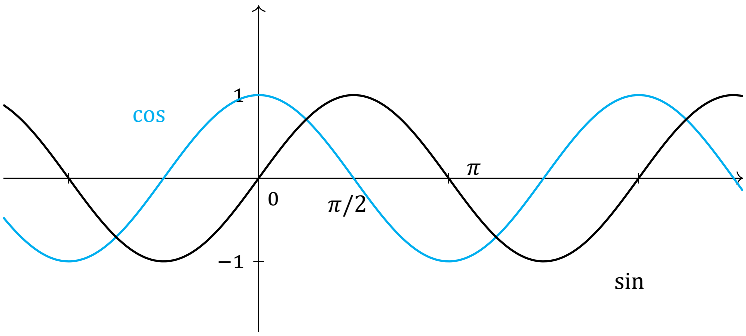
Soient a et b deux réels.

Formules d'addition

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b,\\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b,\\
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b,\\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b.
\end{aligned}$$

Formules de duplication

$$\begin{aligned}
\cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a\\
&= 2\cos^2 a - 1\\
&= 1 - 2\sin^2 a,\\
\sin(2a) &= 2\sin a \cos a.
\end{aligned}$$



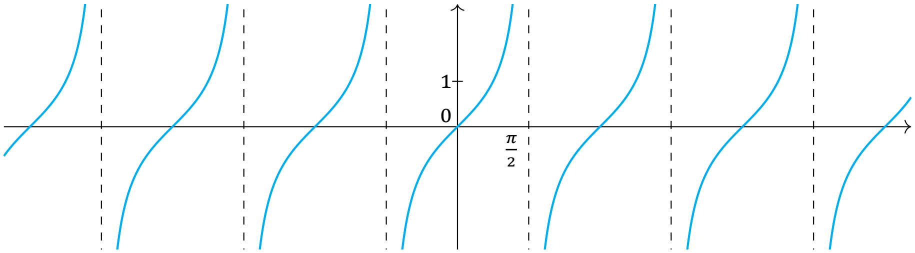
Graphes de cosinus et sinus

- Sur l'ensemble $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. On peut définir la fonction tangente par le quotient

$$\tan = \frac{\sin}{\cos}.$$

La fonction tangente est π-périodique, impaire et dérivable sur $\mathcal{D}$ avec

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$



Graphe de tangente sur $\mathcal{D}_{\tan}$

Applications

Applications et compositions

Définition — **application**

*Une **application** f est la donnée :*
- *D'un ensemble de départ E ;*
- *D'un ensemble d'arrivée F ;*
- *D'un procédé qui à tout élément de E associe un unique élément de F.*

Notation. Les applications de E dans F forment un ensemble noté $\mathcal{A}(E,F)$.

Définition — **restriction, prolongement**

- *Soient $f : E \to F$ et $E' \subset E$. On appelle **restriction** de f à E', l'application $f_{|E'} : E' \to F$ définie par :*

$$\forall x \in E',\ f_{|E'}(x) = f(x).$$

- *Soient $g : E' \to F$, $f : E \to F$ et $E' \subset E$. On dit que f est un **prolongement** de g à E si $g = f_{|E'}$.*

Définition — **composition**

*Considérons $f : E \to F$ et $g : F \to G$, on définit la **composition** $g \circ f$ par*

$$g \circ f : \begin{cases} E & \to & G \\ x & \mapsto & g\big(f(x)\big). \end{cases}$$

Attention. La composition n'est pas commutative, en général, $f \circ g \neq g \circ f$.
Exemple. Si on note $\mathrm{id}_G : x \in G \mapsto x \in G$, l'application identité sur l'ensemble G, alors $f \circ \mathrm{id}_E = f$ et $\mathrm{id}_F \circ f = f$.

Injectivité, surjectivité et bijectivité

Définition — **application injective, surjective et bijective**

Une application $f : E \to F$ est dite :
- ***Injective** si pour tout couple $(x,x') \in E^2$, $\quad f(x) = f(x') \quad \Rightarrow \quad x = x'$.*
- ***Surjective** si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.*
- ***Bijective** si elle est à la fois surjective et injective.*

Autrement dit, pour prouver qu'une application $f : E \to F$ est :
→ Injective, il faut justifier que chaque élément de F a *au plus* un antécédent (dans E) ;
→ Surjective, il faut justifier que chaque élément de F a *au moins* un antécédent (dans E) ;
→ Bijective, chaque élément de F a *un unique* antécédent (dans E).

PROPOSITION — **lien avec la composition**

Soient E, F, G trois ensembles. Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$, deux applications.
- *Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.*
- *Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.*
- *Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.*

DÉFINITION — **application réciproque**

Considérons $f : E \to F$ bijective, il existe une application $g : F \to E$ telle que

$$\forall (x,y) \in E \times F, \quad \Big(\quad x = g(y) \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x) \quad \Big).$$

*L'application g est unique, c'est **l'application réciproque** de f et est notée f^{-1}.*

Remarques. Soit $f : E \to F$ bijective.
- L'application réciproque f^{-1} est aussi bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
- De plus, $\quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F \quad$ et $\quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$.

PROPOSITION — **caractérisation de la bijectivité**

*Soit $f : E \to F$. Les propriétés suivantes sont **équivalentes** :*

- *f est bijective.*
- *Il existe une application $g : F \to E$ telle que : $\quad f \circ g = \mathrm{id}_F \quad$ et $\quad g \circ f = \mathrm{id}_E$.*

Dans ce cas, $g = f^{-1}$.

PROPOSITION — **composition et bijectivité**

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ l'est aussi et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Polynômes

Polynômes, $\mathbb{R}[x]$ et $\mathbb{R}_n[x]$

DÉFINITION **polynôme**

Une application $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad \text{avec} \quad (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

est appelée application polynomiale ou plus simplement ***polynôme****.*

Remarque. Tout polynôme peut s'écrire sous la forme

$$P(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k,$$

où $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite nulle à partir d'un certain rang.
Les nombres a_0, a_1, ..., a_n, ... sont les **coefficients** du polynôme P.
Notation. Le polynôme dont tous les coefficients sont nuls est le polynôme nul, noté $0_{\mathbb{R}[x]}$.

PROPOSITION **unicité des coefficients**

Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ pour lequel on peut trouver $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tels que

$$P(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k x^k,$$

alors pour tout entier naturel k, $a_k = b_k$.

Remarques. • À l'aide de l'unicité, on peut définir sans ambiguïté le degré d'un polynôme non nul comme le plus grand indice pour lequel le coefficient est non nul. Ainsi, P est de degré n si

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad \text{avec} \quad (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{et} \quad a_n \neq 0.$$

On note $\deg(P) = n$. Par convention, le polynôme nul est de degré $-\infty$.

• Il y a quatre opérations importantes sur les polynômes. Considérons P,Q deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit alors $P + Q$, $\lambda \cdot P$, PQ et $P \circ Q$ par les relations

$$\begin{cases} (P+Q)(x) = P(x) + Q(x) & \text{(Somme)} \\ (\lambda \cdot P)(x) = \lambda \times P(x) & \text{(Multiplication par un réel)} \\ \big(PQ\big)(x) = P(x)Q(x) & \text{(Produit)} \\ (P \circ Q)(x) = P\big(Q(x)\big) & \text{(Composition).} \end{cases}$$

Proposition — **opérations et degré**

Soient P, Q deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *Si $\lambda \neq 0$, $\deg(\lambda \cdot P) = \deg(P)$;*
- *$\deg(P+Q) \leqslant \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$ avec égalité si P et Q sont de degrés différents;*
- *$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.*
- *$\deg(P \circ Q) = \deg(P)\deg(Q)$ si P et Q sont distincts du polynôme nul ($0_{\mathbb{R}[x]}$).*

Remarque. On peut rajouter une nouvelle opération : la dérivation.
$x \in \mathbb{R} \mapsto P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est donnée pour tout réel x par

$$P'(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i i x^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) a_{i+1} x^i.$$

Si P n'est pas un polynôme constant : $$\deg(P') = \deg(P) - 1.$$

Définition — **polynômes dérivés successifs**

On définit les ***polynômes dérivés successifs*** *de P par la récurrence :*

$$P^{(0)} = P \quad \text{et} \quad \forall\, m \in \mathbb{N}, \quad P^{(m+1)} = \left(P^{(m)}\right)'.$$

On dit que $P^{(m)}$ est le polynôme dérivé m-ième de P.

Remarque. Si P est un polynôme de degré n, alors, pour tout $m > n$, $P^{(m)} = 0_{\mathbb{R}[x]}$.

Définition

- *L'ensemble des polynômes réels est noté $\mathbb{R}[x]$.*
- *Pour tout entier naturel n, l'ensemble des polynômes réels de degré au plus n est noté $\mathbb{R}_n[x]$.*

Liens avec les espaces vectoriels. ⋙ voir page 29.

- Les ensembles $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathbb{R}[x]$ sont des espaces vectoriels pour les opérations usuelles.
- La famille $(1, x, \dots, x^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ dite **base canonique de** $\mathbb{R}_n[x]$.
- Un critère particulièrement pratique pour justifier qu'une famille $(Q_1, Q_2, \dots, Q_r)$ est une famille libre est de remarquer qu'elle est de **degrés échelonnés**. C'est-à-dire,

$$\deg(Q_1) < \deg(Q_2) < \cdots < \deg(Q_r).$$

Arithmétique dans $\mathbb{R}[x]$

DÉFINITION **diviseurs**

Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[x]^2$ avec P non nul.
*On dit que P **divise** Q s'il existe $R \in \mathbb{R}[x]$ tel que $PR = Q$. On note alors $P|Q$.*

Vocabulaire. On dit encore que P est un **diviseur** de Q ou que Q est un **multiple** de P.

Remarque. Soient P,Q,R trois polynômes avec P non nul.

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda|P$;
- $P|0_{\mathbb{R}[x]}$ et $P|P$;
- si $P|Q$ et $P|R$ alors $P|(Q+R)$;
- si $P|Q$ et $Q|R$ alors $P|R$.

THÉORÈME **division euclidienne**

Soient $A \in \mathbb{R}[x], B \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0_{\mathbb{R}[x]}\}$. Il existe un unique couple $(Q,R) \in \mathbb{R}[x]^2$ tel que

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

*Q est le **quotient** et R est le **reste** de la division euclidienne de A par B.*

Exemples. • B divise A si et seulement si le reste dans la division euclidienne de A par B est nul.
• Le reste de la division euclidienne par $x - a$ du polynôme P est $P(a)$.

Racines, multiplicités et factorisation

DÉFINITION **racine**

*Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. Un nombre $a \in \mathbb{R}$ est une **racine** du polynôme P si $P(a) = 0$.*

Exemple. Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 ($a \neq 0$). P admet deux racines réelles distinctes si le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est strictement positif.

Remarque. Il ne faut pas oublier qu'un polynôme est une application de la variable réelle. On peut donc utiliser les théorèmes classiques de l'analyse. Par exemple, à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, on montre que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

PROPOSITION **caractérisation d'une racine**

*Soient $P \in \mathbb{R}[x]$ et $a \in \mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont **équivalentes** :*

- *a est une racine de P.*
- *Le reste de la division par $(x-a)$ est nul.*
- *$(x-a)|P$, c'est-à-dire $(x-a)$ divise P.*

DÉFINITION — **multiplicité d'une racine**

Soit $m \in \mathbb{N}^*$.
- *Une racine a est de **multiplicité** au moins m si $(x-a)^m$ divise P.*
- *La racine est exactement de multiplicité m si, de plus, $(x-a)^{m+1}$ ne divise pas P.*

Remarque. La proposition suivante caractérise la multiplicité à l'aide des dérivées successives.

PROPOSITION — **multiplicité et dérivée**

*Soient $P \in \mathbb{R}[x]$, $a \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$. Les propriétés suivantes sont **équivalentes** :*

- *a est une racine de multiplicité m.*
- *Pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.*

PROPOSITION — **nombre de racines**

Tout polynôme réel de degré n, non nul, a au plus n racines comptées avec multiplicité.

Méthode. La proposition précédente donne une méthode particulièrement efficace pour justifier qu'un polynôme est nul.
Il suffit de justifier l'un des énoncés suivants :

ou
→ le polynôme admet une infinité de racines ;
→ le polynôme admet strictement plus de racines (comptées avec multiplicité) que son degré.

PROPOSITION — **factorisation dans le cas réel**

Tout polynôme réel P s'écrit sous la forme

$$P(x) = \lambda(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_s)\cdot R_1(x)\cdots R_r(x),$$

avec :
→ *λ le coefficient dominant de P.*
→ *$(\alpha_i)_{i\in[\![1,s]\!]}$ les racines réelles de P.*
→ *pour tout indice $i \in [\![1,r]\!]$, R_i est un polynôme réel de degré 2 sans racines réelles (c'est-à-dire de discriminant strictement négatif).*

Formule de Taylor

THÉORÈME — **formule de Taylor**

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ et $a \in \mathbb{R}$, $$P(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Calcul matriciel

Généralités

- Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$, une matrice de taille (n,p) est une application de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \to \mathbb{R}$. On précise cette application sous forme d'un tableau à n lignes et p colonnes.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix}.$$

- On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille (n,p) à coefficients dans $\mathbb{R}$.

DÉFINITION — **opérations matricielles**

- ***La somme.***
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On définit la somme $A + B$ par la formule

$$C = A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad \textit{avec} \quad \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \forall\, j \in [\![1,p]\!],\quad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j},$$

où $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ et $c_{i,j}$ désignent le coefficient en position (i,j) de A, B et C.

- ***Multiplication par un réel.***
On définit λA par

$$\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad \textit{avec} \quad \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \forall\, j \in [\![1,p]\!],\quad d_{i,j} = \lambda \times a_{i,j},$$

où $d_{i,j}$ est le coefficient (i,j) de λA.

- ***Produit matriciel.***
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On définit le produit matriciel AB par la formule

$$C = AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R}) \quad \textit{avec} \quad \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \forall\, j \in [\![1,q]\!],\quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

- ***La transposition.***
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on définit la transposée de la matrice A, notée ${}^tA$, par

$$B = {}^tA = \left(b_{i,j}\right) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \quad \textit{avec} \quad \forall\, i \in [\![1,p]\!],\ \forall\, j \in [\![1,n]\!],\quad b_{i,j} = a_{j,i}.$$

Proposition **règles de calculs**

- *Soient $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B, B' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $C = \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$.*
  - → *Le produit matriciel est associatif, c'est-à-dire* $(AB)C = A(BC)$.
  - → *De plus, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,*

$$(\lambda A)B = \lambda(AB), \quad A(\lambda B + \mu B') = \lambda AB + \mu AB' \quad \text{et} \quad (\lambda A + \mu A')B = \lambda AB + \mu A'B.$$

- *Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.*

$${}^t({}^tA) = A, \qquad {}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda\,{}^tA + \mu\,{}^tB, \qquad {}^t(AC) = {}^tC\,{}^tA.$$

Définition **matrices particulières**

On dit qu'une matrice carrée $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est

- → ***diagonale si*** $\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \quad \Rightarrow \quad a_{i,j} = 0;$
- → ***triangulaire supérieure si*** $\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i > j \quad \Rightarrow \quad a_{i,j} = 0;$
- → ***triangulaire inférieure si*** $\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i < j \quad \Rightarrow \quad a_{i,j} = 0;$
- → ***symétrique si*** ${}^tA = A;$
- → ***antisymétrique si*** ${}^tA = -A.$

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix}$$

matrice diagonale

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

matrice triangulaire supérieure

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

matrice triangulaire inférieure

Lien avec les systèmes linéaires

Soit $\mathcal{S}$ un système linéaire à n équations et p inconnues de second membre $b = (b_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ et de coefficients $a = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathbb{R}^{np}$.

$$\mathcal{S} : \left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n. \end{array} \right.$$

On introduit les matrices rectangulaire et colonnes

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}).$$

Proposition — **écriture matricielle d'un système linéaire**

Avec les notations précédentes,

$$(x_1, \dots, x_p) \text{ est solution de } \mathcal{S} \text{ si et seulement si } AX = B.$$

Inversibilité

Définition — **inverse d'une matrice**

Une matrice carrée A est dite inversible s'il existe une matrice B telle que

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n.$$

La matrice B est unique, elle est notée A^{-1}, l'inverse de A.

Remarques. • On démontre qu'il suffit de trouver une matrice B telle que $AB = I_n$ *ou* $BA = I_n$.
• En reprenant les notations de la proposition précédente, lorsque $p = n$ et A est inversible, il y a une unique solution au système $\mathcal{S}$ obtenue à l'aide de $X = A^{-1}B$.

Proposition — **produit de matrices inversibles**

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A et B sont inversibles alors le produit AB l'est aussi et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Proposition — **inversibilité et résolution d'un système linéaire**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont ***équivalentes****,*

- *A est inversible ;*
- *Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que* $\quad \forall\, (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2, \quad AX = Y \iff X = BY.$

Dans ce cas, B est l'inverse de A.

Remarque. La proposition précédente justifie la méthode de calcul de l'inverse à l'aide d'une résolution d'un système linéaire par un pivot de Gauss.

Proposition — cas triangulaire et diagonale

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire.

A est inversible si et seulement si les coefficients diagonaux sont tous non nuls.

Dans le cas où A est diagonale, on peut préciser l'inverse

$$\text{Si} \quad A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix} \quad \text{alors} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/d_n \end{bmatrix}.$$

Proposition — inverse d'une matrice de taille 2

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $\det(A) = ad - bc$. Alors

A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Dans ce cas, l'inverse est $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Puissances de matrices

Définition — puissances

*Les **puissances d'une matrice** carrée de taille n, notée A, sont les matrices*

$$A^p = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{p \text{ fois}} \quad \text{où} \quad p \in \mathbb{N}^*.$$

Précisons que, par convention, $A^0 = I_n$.

Proposition — formule du Binôme dans le cas matriciel

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que A et B commutent ($AB = BA$). Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

Systèmes linéaires

DÉFINITION — **système linéaire**

*Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$, $a = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathbb{R}^{np}$ et $b = (b_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$. On appelle **système linéaire** à n équations et p inconnues de second membre b et de coefficient a, le système*

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p &=& b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p &=& b_2 \\ \vdots && \vdots \quad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p &=& b_n. \end{array}\right.$$

*Les quantités $x_1, \ldots, x_n$ sont les **inconnues** du système.*

- Le système est dit **homogène** si le second terme, c'est-à-dire b, est nul.
- **Résoudre le système** consiste à donner l'ensemble des p-uplets $(x_1,x_2,\cdots,x_p)$ solutions. S'il n'existe pas de tel p-uplet, on parle de **système incompatible**.

La méthode dit du pivot de Gauss permet de résoudre tous les systèmes linéaires. Illustrons la méthode avec trois exemples caractéristiques.

Une unique solution

- **Première étape.** On procède par opérations élémentaires pour obtenir un système équivalent plus simple, dans l'idéal, un système triangulaire.

$$\mathcal{S}_1 \quad : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \underline{2}x &+& y &-& 4z &=& 0 \\ 3x &+& 3y &-& 5z &=& 2 \\ 4x &+& 5y &-& 2z &=& 12 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-\frac{3}{2}L_1\\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x &+& y &-& 4z &=& 0 \\ && \underline{\tfrac{3}{2}}y &+& z &=& 2 \\ && 3y &+& 6z &=& 12 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x &+& y &-& 4z &=& 0 \\ && \frac{3}{2}y &+& z &=& 2 \\ && && \underline{4}z &=& 8 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow 2L_2\\ L_3\leftarrow \frac{1}{4}L_3}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x &+& y &-& 4z &=& 0 \\ && 3y &+& 2z &=& 4 \\ && && z &=& 2. \end{array}\right.$$

Attention. Il faut être attentif au choix de son pivot pour être sûr de faire apparaître un nouveau zéro, sinon le processus ne s'arrête pas. On commence donc par mettre des zéros sur la première colonne du système, puis sur la seconde, etc.

• **Deuxième étape.** On résout le système triangulaire. On a $z = 2$, puis $3y = 4 - 2z = 0$, c'est-à-dire $y = 0$, puis $2x = 4z - y = 8$, d'où $x = 4$. Finalement, il y a un *unique* triplet solution : $\boxed{S_1 = \{(4,0,2)\}.}$

Aucune solution

$$\mathcal{S}_2 : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & 5z & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 4z & = & 3 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 2 \\ & & 2y & + & 4z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & -1. \end{array}\right.$$

En effectuant $L_2 - 2L_3$, on trouve $0 = 2$. Absurde, *il n'y a donc pas de solution* : $\boxed{S_2 = \emptyset.}$

Attention. Il faut toujours indiquer au correcteur les opérations effectuées.

Une infinité de solutions

$$\mathcal{S}_3 \quad : \left\{\begin{array}{rrrcr} 2x+ & 3y & -z & = & -1 \\ x+ & 2y & +3z & = & 2 \\ 3x+ & 4y & -5z & = & -4 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & -1 \\ 3x & + & 4y & - & 5z & = & -4 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \\ & - & y & - & 7z & = & -5 \\ & - & 2y & - & 14z & = & -10 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 = 2 \cdot L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \\ & - & y & - & 7z & = & -5. \end{array}\right.$$

On exprime alors les inconnues x et y en fonction de z vu comme paramètre. Il y a une *infinité* de solutions données par

$$\boxed{S_3 = \{(11z - 8, 5 - 7z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}}.$$

Espaces vectoriels

Espaces vectoriels

Pour résumer, un espace vectoriel E est un ensemble muni de 2 lois « $+$ » et « $\cdot$ » telles que :
- E est stable par multiplication par un nombre : $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}, \forall\,u \in E, \lambda \cdot u \in E$.
- E est stable par somme : $\forall\,u \in E, \forall\,v \in E, u + v \in E$.
- il y a de « bonnes règles de calcul » entre les lois « $+$ » et « $\cdot$ ».

Par exemple :
- → $\forall\,u \in E, \qquad 0 \cdot u = 0_E$ (le vecteur nul) ;
- → $\forall\,u \in E, \qquad \forall\,\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \qquad \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \times \mu) \cdot u.$
- → $\forall\,u, v \in E, \forall\,\lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v \quad \text{et} \quad (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u.$
- → $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}, \qquad \lambda \cdot u = 0_E \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E$;
- → $\forall\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall\,(u,v) \in E^2 : \quad \begin{cases} \text{Si } \lambda \neq 0 \quad \text{alors} \quad \lambda \cdot u = \lambda \cdot v \quad \Rightarrow \quad u = v; \\ \text{Si } u \neq 0_E \quad \text{alors} \quad \lambda \cdot u = \mu \cdot u \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu. \end{cases}$

Les éléments de E sont des **vecteurs**.

PROPOSITION — exemples de référence

- *$\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel avec les lois $+$ et $\cdot$ définies par*

$$\forall\,u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall\,v = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \forall\,\lambda \in \mathbb{R}$$

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \quad \textit{et} \quad \lambda \cdot u = (\lambda \times x_1 \dots, \lambda \times x_n).$$

- *L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices de taille (n,p) est un espace vectoriel pour les lois usuelles.*

- *L'ensemble des applications d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.*

- *Les ensembles $\mathbb{R}[x]$ et $\mathbb{R}_n[x]$ respectivement des applications polynomiales et des applications polynomiales de degré au plus n sont des espaces vectoriels pour les lois usuelles.*

- *L'ensemble $\mathcal{A}(I,\mathbb{R})$ des applications d'un ensemble I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel pour les lois usuelles.*

Attention. Un espace vectoriel n'est jamais vide.

Combinaisons linéaires, sous-espaces vectoriels

Dans la suite, une famille finie de vecteurs de E est la donnée d'une liste finie $(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ de vecteurs de E. Le cardinal de la famille est alors le nombre de vecteurs.

DÉFINITION **combinaison linéaire**

Soit $(u_1,\dots,u_n)$ une famille finie de vecteurs de E.
*On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1,\dots,u_n$, tout vecteur v s'écrivant*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i \quad \text{avec pour tout } i \in [\![1,n]\!], \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

DÉFINITION **sous-espaces vectoriels**

*Soient E un espace vectoriel et F une partie de E. F est un **sous-espace vectoriel** de E si*
- *F est non vide ;*
- *F est stable par somme, c'est-à-dire : $\forall (u,v) \in F^2, \quad u+v \in F$;*
- *F est stable par multiplication par un nombre, c'est-à-dire : $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda \cdot u \in F$.*

Remarque. Les sous-espaces vectoriels sont les parties (non vides) de E stables par combinaisons linéaires.

Méthodes. • Pour vérifier que F est un sous-espace vectoriel, on se contente de vérifier que pour tout nombre λ et tous vecteurs u, v de F, $\lambda \cdot u + v \in F$ et $F \neq \emptyset$. Pour le second point, il suffit d'exhiber un élément de F, le plus simple étant 0_E.
• De plus, on démontre que tout sous-espace vectoriel est un espace vectoriel. Donc, en pratique, lorsqu'on souhaite prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel, on montre que l'ensemble en question est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$..)

PROPOSITION **intersection de sous-espaces**

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E.
Alors l'intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Attention. En général, c'est faux pour la réunion.

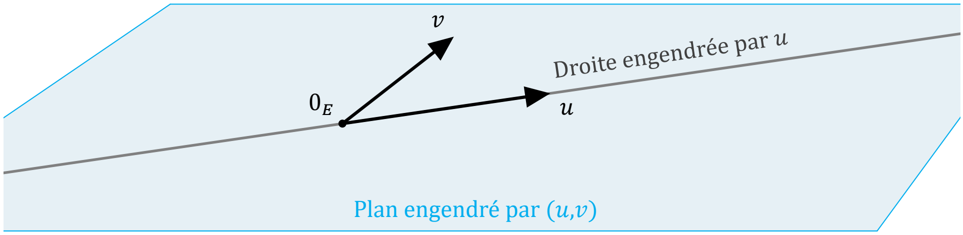
DÉFINITION **sous-espace vectoriel engendré par une partie finie**

*Soient E un espace vectoriel et X une partie finie de E. **L'espace vectoriel engendré par** X est défini par l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X. On le note* Vect(X)*.*
Autrement dit, si $X = \{u_1,\dots,u_n\}$, alors

$$\mathrm{Vect}(X) = \left\{ v \in E \;\middle|\; \exists (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i \right\}.$$

Remarque. Comme son nom l'indique, $\mathrm{Vect}(X)$ est un sous-espace vectoriel de E. En particulier, il contient le vecteur nul.

Vocabulaire. • Un espace vectoriel engendré par un vecteur non nul est une **droite vectorielle**.
• Un espace vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires est un **plan vectoriel**.



Pour rappel, deux vecteurs u, v sont **non colinéaires** s'ils sont non nuls et il n'existe pas de réel λ tel que $u = \lambda \cdot v$.

Familles génératrices, libres et bases

Définition — famille libre finie

*Soit E un espace vectoriel et $m \in \mathbb{N}^*$, on dit que la famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_m)$ de vecteurs de E est une **famille libre** si la seule combinaison linéaire nulle est la combinaison linéaire à coefficients nuls. Autrement dit,*

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m, \qquad \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot u_i = 0_E \quad \Rightarrow \quad \forall\, i \in [\![1,m]\!], \quad \lambda_i = 0 \right).$$

Remarque. Soit $(u,v) \in E^2$. La famille (u,v) est libre si et seulement si les vecteurs u et v sont non-colinéaires.
Exemple. Dans les cas des polynômes : une famille fine $(Q_1, \ldots, Q_r)$ de $\mathbb{R}[x]$ est une famille libre si elle est de **degrés échelonnés**. C'est-à-dire,

$$\deg(Q_1) < \deg(Q_2) < \cdots < \deg(Q_r).$$

Définition — famille génératrice finie

Soit $\mathcal{G} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille finie de vecteurs de E.
*On dit que $\mathcal{G}$ est une **famille génératrice** de E, si tout vecteur de E peut s'obtenir comme combinaison linéaire à partir des vecteurs de $\mathcal{G}$. Autrement dit si,*

$$\textit{Pour tout vecteur } v \in E, \textit{ il existe } \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R} \textit{ tels que } v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot u_i.$$

Remarque. Sous forme condensée, $\mathcal{G}$ est génératrice de E si $\mathrm{Vect}(\mathcal{G}) = E$.

Définition — base

*On appelle **base** d'un espace vectoriel E, toute famille libre et génératrice de E.*

Exemples. **Les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.**

- La famille $(e_i)_{i=1,\cdots n}$ où $e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ avec 1 en i-ème position est une base de $\mathbb{R}^n$.
- La famille $(1,x,x^2,\dots,x^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
- La famille des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Pour rappel, la matrice élémentaire $E_{i,j}$ est la matrice ne contenant que des 0, sauf un 1 en position (i,j).

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} 1 & \qquad\qquad j & \qquad\qquad n \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ \\ \\ i \\ \\ \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix}
0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \text{O} & & \vdots & & \text{O} & \vdots \\
\vdots & & & 0 & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & 0 & & & \vdots \\
\vdots & \text{O} & & \vdots & & \text{O} & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\end{array} = E_{i,j}.$$

Coordonnées dans une base

Proposition — coordonnées d'un vecteur dans une base

Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (u_1,\dots,u_n)$ une famille finie de E à n éléments.
*Les propriétés suivantes sont **équivalentes**.*

- *$\mathcal{B}$ est une base de E ;*
- *Pour tout vecteur v de E,*
  il existe un unique n-uplet $(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot u_i$.

*Dans ce cas, $(x_1,\dots,x_n)$ sont les **coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$**.*

Définition — matrice colonne des coordonnées d'un vecteur

Soit E un espace vectoriel de dimension finie dont $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ est une base.
*Soit $u \in E$ dont $(x_1,\dots,x_n)$ sont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. On définit la **matrice colonne des coordonnées** de u dans la base $\mathcal{B}$ par*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Exemples de suites récurrentes

Une **suite réelle** est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Il existe principalement deux manières de définir une suite :

- De manière **explicite**. On donne une formule générale. Exemples :

$$(3^n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \big(\cos(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \left(\frac{n^4+3n+1}{4n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

- De manière **récursive**. Le calcul du n-ième terme u_n suppose la connaissance des termes antérieurs u_k pour $k < n$. Par exemple, la suite de Fibonacci est définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

  Ainsi les premiers termes sont $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$.

  Les exemples qui suivent sont de type récursif.

Suites arithmétiques et géométriques

La suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ et de premier terme u_0 est la suite définie par

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r.}$$

On a par récurrence

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = nr + u_0.}$$

La suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ et de premier terme u_0 est la suite définie par

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n.}$$

On a par récurrence

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n u_0.}$$

Suites arithmético-géométriques

Une suite u est dite arithmético-géométrique s'il existe deux réels α, β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \alpha u_n + \beta.$$

Rappelons la méthode pour obtenir la formule explicite d'une telle suite.

Prenons l'exemple de : $\quad u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot u_n - 1.$

I - Tout d'abord, on calcule « le point fixe » ℓ de la relation de récurrence obtenu en remplaçant chaque terme par ℓ :

$$\ell = \frac{1}{2}\ell - 1 \quad \Rightarrow \quad \ell = -2.$$

II - Puis, on introduit la suite auxiliaire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n - \ell.$

On constate alors que la suite v est une suite géométrique de raison $1/2$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = u_{n+1} + 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 + 2 = \frac{1}{2}\left(u_n + 2\right) = \frac{1}{2}v_n.$$

v s'écrit donc sous la forme : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{v_0}{2^n} = \frac{u_0 - \ell}{2^n} = \frac{3}{2^n}.$

III - Finalement, la formule explicite est :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + \ell = \frac{3}{2^n} - 2.$$

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Une suite réelle récurrente linéaire d'ordre 2 est une suite pour laquelle

$$\exists\, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n.$$

On associe l'équation dite **caractéristique**

$$x^2 = \alpha x + \beta \qquad \text{d'inconnue } x \in \mathbb{R}.$$

Proposition — **formule explicite**

Notons $\Delta = \alpha^2 + 4\beta$, le discriminant de l'équation caractéristique.

- *Si $\Delta > 0$, alors il y a deux racines réelles distinctes x_1, x_2 et*

$$\exists\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda {x_1}^n + \mu {x_2}^n.$$

- *Si $\Delta = 0$, alors il y a une racine double x_0 et*

$$\exists\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu\, n){x_0}^n.$$

Étude globale des suites

Les définitions

DÉFINITION **suite majorée, minorée et bornée**

Une suite réelle u est dite
- ***minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$;*
- ***majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$;*
- ***bornée** si elle est minorée et majorée. Il existe $K \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant K$.*

Attention. Les réels m et M sont indépendants de n.

DÉFINITION **suite croissante, décroissante, monotone**

Une suite réelle u est dite
- ***croissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$;*
- ***décroissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$;*
- ***monotone** si elle est croissante ou décroissante.*

DÉFINITION **limites d'une suite**

- *Une suite $(u_n)_n$ **converge vers un réel ℓ** si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient les termes u_n pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux. On dit aussi que la suite admet une limite finie.*
Si la limite existe, elle est unique. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

- *Une suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ (avec $a \in \mathbb{R}$), contient les termes u_n pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux.*
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Remarques. • La définition s'adapte au cas $u_n \to -\infty$.
- On peut traduire la définition $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ avec des quantificateurs.

$$\forall\,\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \Big(p \geqslant n_0 \;\Rightarrow\; |u_p - \ell| \leqslant \varepsilon\Big).$$

- On montre qu'une suite convergente vers une limite finie est bornée.

Proposition — **relation d'ordre et limites**

Considérons deux suites u et v convergentes telles que pour tout entier n, $u_n \leqslant v_n$. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Limites et opérations algébriques

Rappelons dans deux tableaux le comportement de $u+v$ et uv lorsque l'une au moins des deux suites à une limite infinie. FI signifie que la forme est indéterminée. Le signe du produit s'obtient par la règle des signes. Enfin ℓ appartient à $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ℓ	ℓ
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n)$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI

Exemples de limites

À partir des limites de fonctions usuelles, on démontre que pour $(u_n)_{n\in\mathbb{R}}$ une suite réelle telle que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

- Si $\ell \in \mathbb{R}$: $\quad e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\ell}, \quad \sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sin(\ell) \quad$ et $\quad \cos(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos(\ell)$.
- Si $\ell \in \mathbb{R}_*^+$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\quad {u_n}^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell^{\alpha} \quad$ et $\quad \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(\ell)$.
- Si $\ell = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, $\quad \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
- Si $\ell = +\infty$, $\quad e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad$ et $\quad \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- On ne peut pas conclure directement sur les limites de $\big(\cos(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\sin(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition — **croissances comparées et factorielle**

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_*^+$, $\quad \dfrac{n^{\alpha}}{\exp(\beta n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \dfrac{\ln(n)^{\alpha}}{n^{\beta}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad$ *et* $\quad \dfrac{\exp(\alpha n)}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Théorèmes de convergences

Proposition

Soit u une suite telle que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune $\ell \in \mathbb{R}$. Alors u converge aussi vers ℓ.

Théorème — **d'encadrement**

Considérons trois suites réelles u, v et w.

Si
- → *Les suites u et w convergent vers une même limite ℓ,*
- → *Pour tout entier n à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.*

Alors la suite v converge vers ℓ.

Remarque. On parle aussi de théorème des gendarmes.

Proposition — **minoration**

Considérons deux suites réelles u et v.

Si
- → *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$;*
- → *u tend vers $+\infty$;*

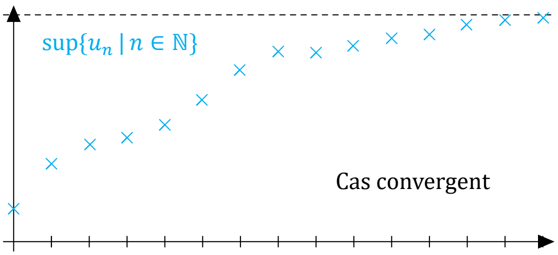
Alors la suite v tend vers $+\infty$.

Théorème — **de convergence monotone**

Soit u une suite réelle croissante. Les phrases suivantes sont équivalentes :

- *la suite converge vers une limite finie ;*
- *la suite est majorée.*

Sinon, la suite tend vers $+\infty$.



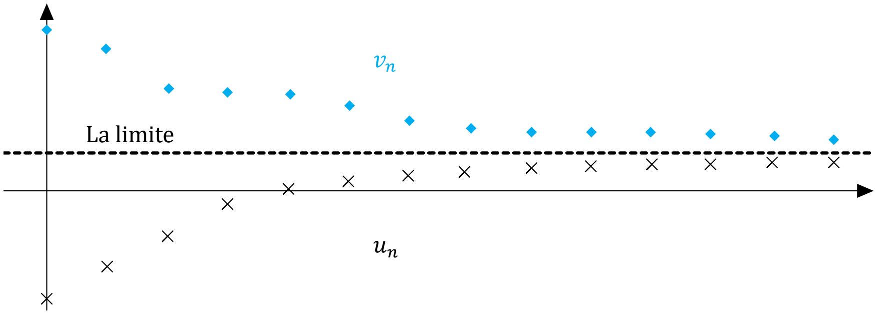
Remarque. De même, si u est une suite décroissante :
u converge vers une limite finie si et seulement si elle est minorée. Sinon, elle tend vers $-\infty$.

Théorème **suites adjacentes**

Considérons deux suites u et v.

Si | $\rightarrow$ *u est croissante et v est décroissante à partir d'un certain rang n_0 et si*
| $\rightarrow$ *la différence $u - v$ tend vers 0,*

*alors les suites u et v, dites **adjacentes**, convergent vers une même limite ℓ.*
Pour tout $n \geqslant n_0$: $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.



Limites

Définition — **limite finie en un point**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et x_0 un élément de I ou une extrémité de I.
*On dit que f admet une **limite finie** $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0 si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I$, $\left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon$. On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.*

Remarque. De même, on peut définir les limites à gauche et à droite.

Proposition — **limites à gauche et à droite**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et x_0 un élément de I à l'exclusion des extrémités.
f admet une limite en x_0 si et seulement si la limite à droite et à gauche existent et sont égales.

Définition — **limite infinie en un point**

Soit f une fonction définie sur $J =]a, x_0[\cup]x_0, b[$.
- *On dit que f admet $+\infty$ **pour limite** en x_0 si pour tout réel A, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap J$, $f(x) \geqslant A$.*
- *De même, on dit que f admet $-\infty$ **pour limite** en x_0 si pour tout réel B, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap J$, $f(x) \leqslant B$.*

Remarque. On adapte les définitions pour des limites lorsque $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Proposition — **croissance de la limite**

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I} \cup \{\pm\infty\}$.

Si
- *→ Pour tout $x \in I$, $\quad f(x) \leqslant g(x)$;*
- *→ $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$ et $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell'$;*

Alors $\quad \ell \leqslant \ell'$.

Dans la suite, I est un intervalle et $\overline{I}$ désigne I complété avec les extrémités.

Théorèmes de convergence

Théorème — composition de limites

Soient $f: I \to J$, $g: J \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, $y_0 \in \bar{J} \cup \{\pm\infty\}$ *et* $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

$$\left(f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} y_0 \quad \text{et} \quad g(y) \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} \ell \right) \quad \Rightarrow \quad g \circ f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell.$$

Théorème — existence de la limite par minoration et encadrement

- *Soient* $f, g: I \to \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$.

Si
→ *Pour tout* $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$;
→ $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty$;
Alors $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty$.

- *Soit* $\ell \in \mathbb{R}$.

Si
→ *Pour tout* $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$;
→ $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$ *et* $h(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$;
Alors g *a une limite en* x_0 *et* $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$.

Théorème — de limite monotone (ou de convergence monotone)

Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in]a,b[$. *Si* f *est croissante, alors*

- f *admet en* x_0 *une limite finie à gauche et une limite finie à droite avec*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

- f *admet une limite finie en* a *si et seulement si* f *est minorée. Sinon,* $f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} -\infty$.
- f *admet une limite finie en* b *si et seulement si* f *est majorée. Sinon,* $f(x) \underset{x \to b^-}{\longrightarrow} +\infty$.

Remarque. Le théorème s'adapte au cas des fonctions décroissantes.

Théorème — limites usuelles/ croissances comparées

- $$\frac{\sin x}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1, \quad \frac{e^x - 1}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1, \quad \frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$
- *Pour tous* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_*^+$, $\dfrac{x^\alpha}{\exp(\beta x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, $\dfrac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ *et* $x^\alpha \ln(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

Continuité

Définitions et premières propriétés

Dans la suite I désigne un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

DÉFINITION — **continuité en un point a, continuité sur I**

*Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$, f est **continue en** a si f admet une limite en a et*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

*On dit que f est **continue sur** I si f est continue en tout point de I.*

Remarque. Soient I un intervalle et $a \in I$. Si a n'est pas un des bords de I, f est continue en a si et seulement si la limite à gauche et à droite existent et valent $f(a)$.

PROPOSITION — **opérations usuelles**

- *Soient f_1 et f_2 deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, et soit $a \in I$.*
  - → *Si f_1 et f_2 sont continues en a, alors $f_1 + f_2$ aussi.*
  - → *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et f_1 est continue en a, alors $\lambda \cdot f_1$ aussi.*
  - → *Si f_1 et f_2 sont continues en a, alors $f_1 \cdot f_2$ aussi.*
- *Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$.*
  Si f continue en a et g continue en $f(a) = b$, alors $g \circ f$ est continue en a.
- *Soit f continue sur I. Si f ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{f}$ est bien définie et continue sur I.*

DÉFINITION — **prolongement par continuité**

*Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$. On dit que f est **prolongeable par continuité** en a si la limite en a à droite existe et demeure finie. On convient alors de poser $\tilde{f} : [a,b[\to \mathbb{R}$ par*

$$\tilde{f}(x) = f(x) \quad \text{si} \quad x \in]a,b[\quad \text{et} \quad \tilde{f}(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x).$$

De sorte que $\tilde{f}$ soit continue en a.

Remarque. De même, on définit le prolongement à gauche ou sur un intervalle épointé $I \setminus \{a\}$.

Théorèmes généraux

Théorème — **des valeurs intermédiaires**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue.
Alors pour tout $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$, pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$.

Remarque. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. Notons $f(I)$, l'ensemble des images de f,

$$f(I) = \Big\{ y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in I,\ y = f(x) \Big\} = \Big\{ f(x)\,;\ x \in I \Big\}.$$

Le théorème précédent affirme que $f(I)$ est un intervalle.

Théorème — **image d'un segment**

Pour toute application continue $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un segment de $\mathbb{R}$, l'image $f(I)$ est aussi un segment. Alors, f admet un minimum et un maximum et

$$f(I) = \Big[\min_I f, \max_I f\Big].$$

Remarque. On dit alors que f est bornée et atteint ses bornes. Il existe α, β tels que

$$\forall\, x \in I, \quad f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta).$$

Théorème — **de la bijection**

Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I définit une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$. Sa bijection réciproque est elle-même continue et a le même sens de variation.

Exemple. La fonction tangente sur $]-\pi/2, \pi/2[$ est strictement croissante, continue avec

$$\tan(x) \underset{x \to (\pi/2)^-}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \tan(x) \underset{x \to (-\pi/2)^+}{\longrightarrow} -\infty.$$

D'après le théorème de la bijection, on peut définir l'application arctangente $\mathbb{R} \to]-\pi/2,\pi/2[$ comme la réciproque de la restriction de tangente à $]-\pi/2, \pi/2[$.
Rappel. Le graphe de l'application réciproque f^{-1} s'obtient par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ à partir du graphe de f.

Proposition — **continuité et suite**

Soient $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue en a. Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élements de I,

$$\Big(\ u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a \ \Big) \ \Rightarrow \ \Big(\ f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(a) \ \Big).$$

Dérivation

Définitions et règles de calculs

Définition

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

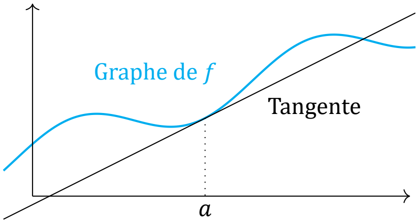
- *f est **dérivable en** a si le quotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a. Si cette dernière existe, elle est unique et notée $f'(a)$.*
- *f est **dérivable sur** I si elle est dérivable pour tout réel de I. Ainsi, on définit la fonction dérivée par*

$$f' : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & f'(a). \end{cases}$$

- Graphiquement, f est dérivable en a s'il existe une tangente à la courbe. L'équation de la tangente est alors

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

- Le terme $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le taux d'acroissement de f entre a et x.



Proposition — règles de calculs

Soient f et g deux fonctions dérivables en a et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *Les fonctions $\lambda \cdot f$ et $f + g$ sont dérivables en a avec*

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a) \quad \text{et} \quad (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

- *La fonction produit $f \cdot g$ est dérivable en a avec*

$$\left(f \cdot g\right)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

- *Si $g(a) \neq 0$, la fonction f/g est définie dans un voisinage de a et dérivable en a avec*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Théorème — composition

Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Si
- *$\to$ f dérivable en a et*
- *$\to$ g est dérivable en $b = f(a)$,*

alors $g \circ f$ est dérivable en a avec $\quad (g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'\big(f(a)\big).$

Théorème — application réciproque

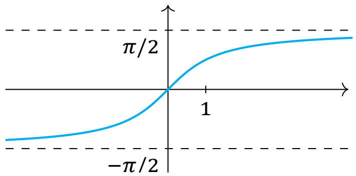
Soient $f : I \to J$, $a \in I$ et $b = f(a)$.

Si
- *$\to$ f est bijective et*
- *$\to$ f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$,*

alors f^{-1} est dérivable en b avec $\quad (f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(b)\big)}.$

Application. La fonction arctangente est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$



Théorème — développement limité à l'ordre 1

*Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Les propriétés suivantes sont **équivalentes**.*

- *f est dérivable en a et $\lambda = f'(a)$;*
- *f admet un développement limité à l'ordre 1 en a.*
  C'est-à-dire, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + \lambda(x-a) + (x-a)\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0.$$

Théorèmes généraux

THÉORÈME — **extrema - condition nécessaire**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Si
- $\to$ *f admet un extremum local en a,*
- $\to$ *f est dérivable en a, et*
- $\to$ *a appartient à un intervalle ouvert inclus dans I,* *alors* $f'(a) = 0$.

Vocabulaire. On parle de point critique lorsque $f'(a) = 0$.
Remarque. La réciproque est fausse : tout point critique ne donne pas un extremum. $x \mapsto x^3$ en 0 fournit un contre-exemple.

THÉORÈME — **de Rolle**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *avec* $a < b$.

Si
- $\to$ *f est continue sur $[a,b]$,*
- $\to$ *f est dérivable sur $]a,b[$, et*
- $\to$ $f(a) = f(b)$,

alors il existe $c \in]a,b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

THÉORÈME — **égalité des accroissements finis**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *avec* $a < b$.

Si
- $\to$ *f est continue sur $[a,b]$ et*
- $\to$ *f est dérivable sur $]a,b[$,*

alors il existe $c \in]a,b[$ *tel que*
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

THÉORÈME — **inégalité des accroissements finis**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *avec* $a < b$.

Si
- $\to$ *f est continue sur $[a,b]$,*
- $\to$ *f est dérivable sur $]a,b[$, et*
- $\to$ *f' est bornée par* $m = \inf\limits_{x \in]a,b[} f'(x)$ *et* $M = \sup\limits_{x \in]a,b[} f'(x)$,

alors
$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$

THÉORÈME — **variations et dérivée**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

- *Si f est de dérivée nulle sur I alors f est une application constante.*
- *Les propriétés suivantes sont équivalentes*
  - → *f est croissante sur I ;*
  - → *$f'(a) \geqslant 0$ pour tout $a \in I$.*
- *De même, f est décroissante sur I si et seulement si $f'(a) \leqslant 0$ pour tout $a \in I$.*

Remarques. • Il ne faut pas oublier la condition « I est un intervalle ».
• L'équivalence devient fausse dans le cas de la stricte monotonie. L'énoncé suivant est alors pratique.

PROPOSITION — **stricte monotonie**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle I.

Si
- → *f' est positive sur I et*
- → *f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points,*

alors f est strictement croissante sur I.

Le cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Dans la suite, on dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable et la fonction dérivée f' est continue sur I.

THÉORÈME — **prolongement de classe $\mathcal{C}^1$**

Soient I un intervalle et $a \in I$.

Si
- → *f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$ et continue en a, et*
- → *$f'(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$,*

alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

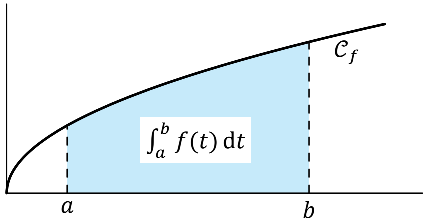
Intégration

Intégrales et aires

Définition — intégrale et aire

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et $a, b \in I$.
L'intégrale de f de a à b est l'aire de la partie délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$, $x = b$.
On la note

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$



Définition — sommes de Riemann

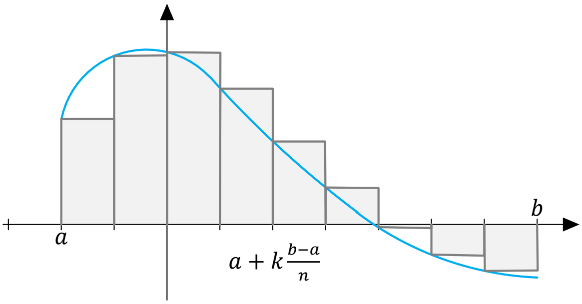
Soient f une fonction continue sur $[a,b]$ et n un entier naturel non nul.
Les sommes de Riemann d'ordre n associées à f sur $[a,b]$ sont

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \textit{et} \quad T_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Pour $k \in [\![0,n-1]\!]$, la quantité

$$\frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

représente l'aire du rectangle de hauteur $f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ et de base $\frac{b-a}{n}$. Ainsi, $S_n(f)$ désigne la somme des aires des rectangles.



Plus n est grand, plus les rectangles épousent la forme de la courbe. À la limite, on retrouve l'intégralité de la courbe.

Théorème — **convergence des sommes de Riemann**

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Les suites $\left(S_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(T_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent et

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \lim_{n\to+\infty} T_n(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Primitives

Définition — **primitive**

*On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admet une **primitive** $F : I \to \mathbb{R}$ si F est dérivable sur I et*

$$F' = f.$$

Fonction	Intervalle de définition	Expression des primitives, $C \in \mathbb{R}$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\mathbb{R}_*^+$	$\dfrac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_*^-$ ou $\mathbb{R}_*^+$	$\ln\left(\lvert x\rvert\right) + C$
exp	$\mathbb{R}$	$\mathrm{e}^x + C$
ln	$\mathbb{R}_*^+$	$x\ln(x) - x + C$
sin	$\mathbb{R}$	$-\cos(x) + C$
cos	$\mathbb{R}$	$\sin(x) + C$
tan	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[\quad (k \in \mathbb{Z})$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert + C$
$x \mapsto \dfrac{1}{a^2+x^2}, a \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right) + C$

Remarque. Soient f une fonction continue sur *un intervalle* I et F_1, F_2 deux primitives de f, alors, il existe un réel C tel que

$$\forall\, x \in I, \qquad F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Fixons $a \in I$. Alors pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive de f telle que $F(a) = y_0$.

Proposition — **intégrale d'une fonction**

Si f est continue sur un intervalle I, pour tous $a,b \in I$, alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a),$$

où F est une primitive de f.

Remarques. • Cette égalité est indépendante du choix de la primitive.
• Dans ce cas,

l'application $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est *l'unique* primitive de f qui s'annule en a.

Proposition — **relation de Chasles**

Soit $(a,b,c) \in I^3$, $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition — **croissance**

Soit $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, deux fonctions continues telles que

$$\forall\, t \in [a,b], \quad f(t) \leqslant g(t).$$

Alors, $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarques. • On en déduit **l'inégalité triangulaire**.
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a, b \in I$.

$$\text{Si} \quad a \leqslant b \quad \text{alors} \quad \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

• La proposition précédente est une conséquence de la positivité de l'intégrale. Si f est continue, positive avec $a < b$ alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

La proposition suivante précise le cas d'égalité.

PROPOSITION

Si
- $\to$ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est continue sur* $[a,b]$,
- $\to$ f *est positive sur* $[a,b]$,
- $\to$ $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$,

alors f *est nulle sur* $[a,b]$.

Calculs des intégrales

Pour calculer une intégrale, on utilise principalement trois méthodes. La recherche directe d'une primitive (voir tableau), l'intégration par parties et le changement de variable.

THÉORÈME — **intégration par parties**

Considérons deux fonctions $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$. *Alors*

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

THÉORÈME — **changement de variables**

Soient I, J *deux intervalles de* $\mathbb{R}$ *et* $a, b \in J$. *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$ *continue et* $\varphi : J \to I$ *de classe* $\mathcal{C}^1$. *Alors,*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Application. Soit f continue sur $I = [-a,a]$. À l'aide du changement de variable $u = -t$, on prouve :

- Si f est une fonction paire sur I, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si f est une fonction impaire sur I, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Probabilités finies

Une expérience aléatoire est une expérience dont l'issue est incertaine. On regroupe l'ensemble de tous les résultats possibles dans un ensemble Ω, appelé **l'univers des possibles**. Dans ce chapitre, Ω est un ensemble fini. Un **événement** A est une partie de Ω, c'est-à-dire $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Définition — probabilité sur un univers fini

*Une **probabilité** est une application $\mathbb{P}$ à valeurs réelles définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant*

- → $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$;
- → $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- → $\mathbb{P}$ *est **additive** : pour tous événements incompatibles A et B (c'est-à-dire, $A \cap B = \emptyset$),*
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

*La donnée du triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ définit un **espace probabilisé**.*

Vocabulaire. Si $\mathbb{P}(A) = 0$, on dit que A est **négligeable**. Si $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit que A est **presque sûr**.

Remarque. On a directement à partir de la définition : pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

Un cas important. On dit qu'il y a *équiprobabilité* dans le cas où les événements élémentaires ont tous la même probabilité. Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ avec les éléments deux à deux distincts, alors la condition $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et l'additivité impose $\quad \forall\, i \in [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}\big(\{\omega_i\}\big) = \dfrac{1}{\mathrm{card}(\Omega)} = \dfrac{1}{n}$,

et plus généralement, $\quad \forall\, A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \dfrac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \dfrac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$.

Théorème — formule du crible

Considérons trois événements A, B et C, alors

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

et $\quad \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.

Définition — probabilité conditionnelle

Soient $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}\big)$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$.
*La **probabilité conditionnelle** de B sachant A est*

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Remarque. À partir de la définition, on prouve une première **formule de Bayes**.

Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors $\qquad \mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}_A(B) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \qquad (\bullet).$

Proposition — formule des probabilités composées

Soient $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ des événements d'un espace probabilisé vérifiant $\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}\right) \neq 0$.
Alors $\qquad \mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \cdot \mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3) \cdots \mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)\,.$

- Un **système complet d'événements** d'un univers fini Ω est une famille finie $(A_n)_{n\in I}$ telle que

$$\left(\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset\right) \quad \text{et} \quad \bigcup_{n\in I} A_n = \Omega.$$

Théorème — formule des probabilités totales

Soient $\left(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathbb{P}\right)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ un système complet d'événements non négligeables. Alors, pour tout événement B

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(B) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B).$$

En reprenant la relation $(\bullet)$ et la formule des probabilités totales, on obtient directement :

Théorème — formule de Bayes (ou de probabilité des causes)

Soit $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ un système complet d'événements non négligeables.

Pour $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$, $\qquad \mathbb{P}_B(A_k) = \dfrac{\mathbb{P}(A_k \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(A_k) \cdot \mathbb{P}_{A_k}(B)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}_{A_i}(B)}.$

Définition — indépendance

- *Soit $(A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, on dit que A et B sont **indépendants** si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.*
- *$A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont dits **mutuellement indépendants** si pour toute partie non vide I de $[\![1,n]\!]$,*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Variables aléatoires finies

Loi d'une variable aléatoire

Définition — **variable aléatoire réelle définie sur un univers fini**

*Étant donné un espace probabilisé $\big(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathbb{P}\big)$, une **variable aléatoire réelle définie sur un univers fini** Ω est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.*

Notation. Dans la suite, $X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire.

Proposition — **système complet associé à une variable aléatoire**

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $\big(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathbb{P}\big)$. Alors

$$\big([X = x]\big)_{x\in X(\Omega)} \text{ est un système complet d'événements.}$$

- Ω étant un univers fini, $X(\Omega)$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$. La **loi de probabilité** de X est la donnée de $X(\Omega) = \{x_1,x_2,\dots,x_m\}$ (où les valeurs x_i sont deux à deux distinctes) et des valeurs

$$\mathbb{P}(X = x_1), \mathbb{P}(X = x_2), \ \dots, \ \mathbb{P}(X = x_m).$$

En particulier,
$$\sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

- On dit que deux variables aléatoires X et Y sont **égales en loi** si $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{x_1,\dots,x_m\}$ et

$$\forall\, i \in [\![1,m]\!], \qquad \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(Y = x_i).$$

Espérance et variance

Définition — **espérance sur un univers fini**

*Soit X une variable aléatoire réelle et $X(\Omega) = \{x_1,\dots,x_m\}$. L'**espérance** de X est*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) = \sum_{k=1}^{m} x_k\,\mathbb{P}(X = x_k).$$

Théorème — de transfert

Soit X une variable aléatoire et $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$. Pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\big(\varphi(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x)\mathbb{P}(X = x) = \sum_{i=1}^{m} \varphi(x_i)\mathbb{P}(X = x_i).$$

Remarque. Le théorème de transfert permet le calcul de $\mathbb{E}\big(\varphi(X)\big)$ en utilisant φ et la loi de X sans passer par la loi de $\varphi(X)$.

Proposition — propriétés de l'espérance

Soient X et Y deux variable aléatoires définies sur un même espace probabilisé

- ***linéarité*** *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,* $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$.
- ***croissance*** *Si $X \leqslant Y$, alors* $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

Définition — variance et écart-type

Soit X une variable aléatoire.

- *On appelle* ***variance*** *d'une variable aléatoire X, la quantité* $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\Big)$.
- *On appelle* ***écart-type*** *de X, la quantité* $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Remarques. $\sigma(X)$ est bien défini car $\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2 \geqslant 0$. Donc, par croissance de l'espérance, $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$.

L'écart-type permet de quantifier les écarts par rapport à la moyenne. Un écart-type fort traduit un « grand éloignement » des valeurs de X par rapport à sa moyenne.

Proposition — propriétés de la variance

Soit X une variable aléatoire finie.

- $\mathbb{V}(X) = 0$ *si et seulement si X est une application presque sûrement constante ;*
- *Pour tous réels a,b,*

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\,\mathbb{V}(X) \qquad ; \qquad \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X).$$

Une variable aléatoire X est dite **centrée** si $\mathbb{E}(X) = 0$. Elle est dite **réduite** si $\sigma(X) = 1$.
Soit X une variable aléatoire. La variable aléatoire $Y = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée, réduite.

En pratique, on calcule la variance avec :

Théorème — formule de Koenig-Huygens

Soit X une variable aléatoire, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$.

Lois usuelles

Dans la suite, Ω est un univers fini et X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}\big)$.

Variable aléatoire certaine

X est une **variable aléatoire certaine**, ou **presque sûrement constante** s'il existe un réel c tel que $\mathbb{P}(X = c) = 1$. Alors, $\quad \mathbb{E}(X) = c \quad$ et $\quad \mathbb{V}(X) = 0$.

Loi de Bernoulli

DÉFINITION — **loi de Bernoulli**

*Soit $p \in [0,1]$. La variable aléatoire X suit une **loi de BERNOULLI**, noté $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, si $X(\Omega) = \{0,1\}$ et*

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \textit{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$$

Exemple. Pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ alors la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

PROPOSITION — **espérance et variance d'une loi de Bernoulli**

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, $\qquad \mathbb{E}(X) = p \quad \textit{et} \quad \mathbb{V}(X) = pq.$

Exemples de modélisation.
→ Le résultat d'un lancer d'une pièce de monnaie équilibrée (1 pour pile, 0 face) suit une loi $\mathcal{B}(1/2)$.
→ Plus généralement, la variable aléatoire associée à une expérience aléatoire ayant seulement deux issues (0 pour échec, 1 pour succès) suit une loi $\mathcal{B}(p)$ où p est la probabilité de succès.

Loi binomiale

DÉFINITION — **loi binomiale**

*Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$. On dit que X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p, notée $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ si*

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \quad \textit{et} \quad \forall\, k \in [\![0,n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

PROPOSITION **espérance et variance d'une loi binomiale**

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, $\qquad \mathbb{E}(X) = np \quad$ *et* $\quad \mathbb{V}(X) = npq$.

Exemples de modélisation.
→ On lance n fois un dé et X compte le nombre de « 6 » obtenus. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,1/6)$.
→ Plus généralement, lorsqu'on répète n *expériences* de Bernoulli (à deux issues : succès/échec) *identiques*, *mutuellement indépendantes*, dont la probabilité de succès est p, la variable X qui *compte le nombre de succès* suit alors une loi binomiale de paramètre (n,p).

Loi uniforme

DÉFINITION **loi discrète uniforme**

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ *avec* $a < b$.
La variable aléatoire X *suit une* ***loi discrète uniforme sur*** $[\![a,b]\!]$, *noté* $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$, *si*

$$X(\Omega) = [\![a,b]\!] \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![a,b]\!],\ \ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{b-a+1}.$$

Remarque. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ avec $n = b - a + 1$, alors $Y = X + a - 1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$.

PROPOSITION **espérance et variance d'une loi uniforme**

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$, $\qquad \mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2} \quad$ *et* $\quad \mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

Exemples de modélisation.
→ Le résultat d'un lancer d'un dé équilibré à 6 faces suit une loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$.
→ Une urne contenant n boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à n. On tire au hasard une boule. Le numéro obtenu suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

Dimension finie

Généralités

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille d'un espace vectoriel E.

- $\mathcal{F}$ est libre est si la seule combinaison linéaire nulle est la combinaison linéaire à coefficients nuls.
$$\forall\,(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m, \qquad \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot u_i = 0_E \quad \Rightarrow \quad \forall\, i \in [\![1,m]\!], \quad \lambda_i = 0\right).$$
- $\mathcal{F}$ est génératrice si tout vecteur de E peut s'obtenir comme combinaison linéaire à partir des vecteurs de $\mathcal{F}$. Autrement dit si,
$$\text{Pour tout vecteur } v \in E, \text{ il existe } \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \text{ tels que } v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i.$$
- $\mathcal{F}$ est une base, si elle est à la fois libre et génératrice.

Définition — dimension finie ou infinie

*On dit qu'un espace vectoriel est de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie.*
*Si ce n'est pas le cas, on dit qu'il est de **dimension infinie**.*

Théorème — de la base incomplète

Soient E de dimension finie, $\mathcal{L} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E.
Il existe $f_1, \dots, f_m$ des vecteurs de $\mathcal{G}$ tels que la famille $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_m)$ soit une base de E.

Remarque. On en déduit que tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

Théorème — définition de la dimension

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
*Toutes les bases de E sont finies et ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé la **dimension de l'espace vectoriel**, notée $\dim(E)$.*

Exemples.

- $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont des espaces vectoriels de dimension finie.
  - → $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
  La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ où $e_i = (0, \dots, 0,1,0, \dots, 0)$ avec le 1 en i-ème position ;
  - → $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1$.
  La base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ est $(1, x, \dots, x^n)$.
  - → $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = n \times p$.
  La famille des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- L'espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ est de dimension infinie.

PROPOSITION **cardinal d'une famille libre/génératrice**

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{L}$, $\mathcal{G}$ deux familles.

Si | → *$\mathcal{L}$ est une famille libre,*
→ *$\mathcal{G}$ est une famille génératrice,*

alors $$\operatorname{card}(\mathcal{L}) \leqslant \dim(E) \quad \text{et} \quad \dim(E) \leqslant \operatorname{card}(\mathcal{G}).$$

PROPOSITION **cas d'égalité**

Soit E un espace de dimension finie.
- *Une famille libre $\mathcal{L}$ de cardinal $\dim(E)$ est une base.*
- *Une famille génératrice $\mathcal{G}$ de cardinal $\dim(E)$ est une base.*

Méthode. Lorsqu'on connaît la dimension n d'un espace vectoriel E, alors pour montrer qu'une famille de n vecteurs de E est une base de E, on utilise, dans la plupart des cas, le premier point. On montre donc la famille est libre.

Dimension d'un sous-espace vectoriel

PROPOSITION **inclusion**

Soit E un espace vectoriel.
- *Si E est de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel de E est de dimension finie.*

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie.
- *Si $F \subset G$, alors $\dim(F) \leqslant \dim(G)$.*
- *Si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$, alors $F = G$.*

Remarque. Le dernier énoncé est particulièrement utile pour établir des égalités entre espaces.

DÉFINITION **rang d'une famille**

Soit $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ une famille finie d'un espace vectoriel. ***Le rang de la famille*** *est la dimension de l'espace engendré par celle-ci :*
$$\operatorname{rg}\big((\varepsilon_i)_{i\in I}\big) = \dim\big(\operatorname{Vect}(\varepsilon_i)_{i\in I}\big).$$

Exemple. Le rang d'une famille constituée de deux vecteurs est :
→ 0 si les deux vecteurs sont nuls ;
→ 1 si l'un des deux vecteurs est non nul et que les deux sont colinéaires ;
→ 2 si les deux vecteurs sont non colinéaires.

Compléments
sur les espaces vectoriels

Sommes et supplémentaires

DÉFINITION — **somme de sous-espaces, somme directe**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

- ***Le sous-espace somme*** *est défini par*

$$F + G = \{u + v \mid (u,v) \in F \times G\}.$$

- *On dit que F et G sont en* ***somme directe****, notée $F \oplus G$, si*

$$F \cap G = \{0_E\}.$$

Remarque. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant F et G.

PROPOSITION — **unicité de la décomposition**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les propriétés suivantes sont ***équivalentes****.*

- *F et G sont en somme directe.*
- *Tout vecteur $u \in F + G$ s'écrit de manière unique sous la forme :*
$$u = u_F + u_G \quad \text{avec} \quad u_F \in F, \quad u_G \in G.$$

DÉFINITION — **supplémentaire**

Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont ***supplémentaires*** *si tout vecteur de E se décompose de façon unique en une somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. C'est-à-dire*

$$\forall w \in E, \quad \exists!\,(u,v) \in F \times G, \quad w = u + v.$$

Attention. Il n'y a pas unicité du supplémentaire.
Il ne faut pas confondre supplémentaire et complémentaire.

Remarque. La méthode Analyse-Synthèse est particulièrement adaptée à cette définition.

PROPOSITION — **caractérisation des supplémentaires**

*Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les propriétés suivantes sont **équivalentes**.*

- *F et G sont supplémentaires ;*
- *$F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$.*

On a donc : F et G sont supplémentaires si et seulement si $F \oplus G = E$.

Précisions en dimension finie

PROPOSITION — **existence d'un supplémentaire**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire.

PROPOSITION — **cas de la somme directe**

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.
Si F et G sont en somme directe, alors

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G).$$

Remarque. Soient $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_G = (f_1, \dots, f_r)$ des bases respectivement de F et G.

- Si F et G sont en somme directe, alors $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_r)$ est une base de $F \oplus G$.
- La réciproque, moins utilisée, est aussi vraie.

THÉORÈME — **formule de Grassmann**

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors,

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

PROPOSITION — **caractérisation des supplémentaires**

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.
*Les trois énoncés suivants sont **équivalents**.*

- *F et G sont supplémentaires ;*
- *$F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$;*
- *$F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.*

Applications linéaires

Généralités

Définition — **application linéaire**

Soient E et F deux espaces vectoriels. Une application $\varphi : E \to F$ est dite ***linéaire*** *si*

$$\forall\,(u,v) \in E^2, \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{R}, \quad \varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v) \quad \text{et} \quad \varphi(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot \varphi(v).$$

Règles de calculs. Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Alors
- $\varphi(0_E) = 0_F$.
- Pour tout $(u,v)^2 \in E, \quad \varphi(u-v) = \varphi(u) - \varphi(v)$.
- Pour tous $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \cdot \varphi(u_i)$.

Définition — **noyau et image**

Le noyau et l'image d'une application linéaire $\varphi : E \to F$ sont définis par

$$\operatorname{Ker}(\varphi) = \left\{u \in E \mid \varphi(u) = 0_F\right\} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(\varphi) = \varphi(E) = \left\{v \in F \mid \exists\, u \in E, \varphi(u) = v\right\}.$$

Remarque. L'image et le noyau sont deux sous-espaces vectoriels respectivement de E et de F.

Théorème — **injectivité et noyau**

Une application linéaire $\varphi : E \to F$ est injective si et seulement si $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$.

Remarque. Rappelons qu'une application $\varphi : E \to F$ est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}(\varphi) = F$.

Les espaces $\mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{L}(E)$

Proposition — **structure de $\mathcal{L}(E,F)$**

Soient E et F deux espaces vectoriels.
L'ensemble des applications linéaires de E dans F, noté $\mathcal{L}(E,F)$, muni des lois usuelles

$$\forall\,\varphi,\psi \in \mathcal{L}(E,F), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \varphi + \psi : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ u & \mapsto & \varphi(u) + \psi(u) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \lambda \cdot \varphi : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ u & \mapsto & \lambda \cdot \varphi(u) \end{array}\right.$$

est un espace vectoriel.

Proposition — **composition**

Soient E, F, G trois espaces vectoriels et $\varphi : E \to F$, $\psi : F \to G$ deux applications linéaires. La composée $\psi \circ \varphi : E \to G$ est une application linéaire.

Vocabulaire. • On dit que deux endomorphismes φ, ψ **commutent** si $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi$.

• Lorsqu'une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective, on parle d'**isomorphisme**.
Dans ce cas, on montre que son application réciproque φ^{-1} est linéaire.

• Lorsque $E = F$, on parle d'**endomorphisme** et on note simplement $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E,E)$.

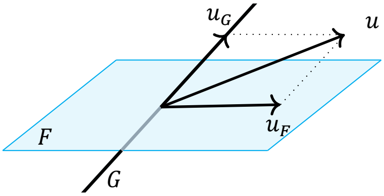
• Si φ est un endomorphisme de E, $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$, $\varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi$ ... sont parfaitement définies et linéaires.
Les **puissances** de φ sont les applications linéaires :

$$\varphi^0 = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n \text{ fois}}.$$

Projecteurs

Définition — **projecteur**

Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.



Ainsi, pour tout $u \in E$, il existe une unique décomposition $u = u_F + u_G$ où $(u_F,u_G) \in F \times G$. On pose

$$p : \begin{cases} E & \to & E \\ u & \mapsto & u_F. \end{cases}$$

*Cette application est linéaire, elle est appelée le **projecteur** sur F parallèlement à G.*

Remarque. On montre alors que p est un projecteur sur $F = \mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(p)$. En particulier, le noyau et l'image d'un projecteur sont supplémentaires dans E.

$$\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = E.$$

Pour déterminer $\mathrm{Im}(p)$, on peut remarquer que, pour les projecteurs,

$$\mathrm{Im}(p) = \{u \in E \mid p(u) = u\} = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E).$$

Théorème — **caractérisation d'un projecteur**

*Soit $p : E \to E$ une application. Les propriétés suivantes sont **équivalentes**.*

- *p est un projecteur ;*
- *p est linéaire et $p \circ p = p$.*

Applications linéaires en dimension finie

Dans toute cette partie, E et F sont deux espaces vectoriels avec E de dimension finie.

Familles d'images de vecteurs

Proposition — **image et base**

Soit f une application linéaire de E dans F.
Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $\mathrm{Vect}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big) = \mathrm{Im}(f)$.

Proposition — **injectivité/surjectivité et famille libre/génératrice**

Soit f une application linéaire de E dans F.

- *Si f est injective et $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E, alors la famille image $\big(f(e_1), \dots, f(e_p)\big)$ est une famille libre de F.*
- *Si f est surjective et $(e_1, \dots, e_m)$ une famille génératrice de E, alors la famille image $\big(f(e_1), \dots, f(e_m)\big)$ est une famille génératrice de F.*

Théorème — **image d'une base**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de F, alors il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!], \qquad f(e_i) = v_i.$$

Retenons l'idée suivante :

$$\boxed{\text{Se donner une application linéaire } E \to F \text{ revient à se donner les images d'une base de } E.}$$

Formule du rang et corollaires

DÉFINITION — **rang d'une application linéaire**

*Le **rang** d'une application linéaire f est défini, lorsque cela a un sens, par*

$$\mathrm{rg}(f) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big).$$

Remarque. Si E est de dimension finie alors le rang est bien défini. De plus, si $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une base de E, alors le rang de f est le rang de la famille $\big(f(e_i)\big)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

THÉORÈME — **formule du rang**

Soient E, F deux espaces vectoriels avec E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E).$$

Rappel. $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ et surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$. La formule du rang donne alors la proposition suivante.

PROPOSITION — **rang et injectivité/surjectivité/bijectivité**

*Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a les **équivalences** :*

- *f est injective si et seulement si* $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$.
- *f est surjective si et seulement si* $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.
- *f est bijective si et seulement si* $\mathrm{rg}(f) = \dim(E) = \dim(F)$.

Remarque. Une solution pour montrer qu'un espace vectoriel E est de dimension finie et obtenir sa dimension est d'établir un isomorphisme entre E et un espace de dimension finie connue.

Par exemple, si E est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2, alors on montre que $f : u \in E \mapsto (u_0,u_1) \in \mathbb{R}^2$ est un isomorphisme. Donc $\dim(E) = 2$.

La proposition précédente se simplifie dans le cas où $E = F$.

PROPOSITION — **cas des endomorphismes**

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.
*Les énoncés suivants sont **équivalents**.*

- *f est injective ;*
- *f est surjective ;*
- *f est bijective.*

Matrices d'une famille, d'une application linéaire

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base d'un espace vectoriel E, alors pour tout vecteur u de E, il existe un unique n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Dans ce cas, $(x_1, \dots, x_n)$ sont les **coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$**. On définit la **matrice colonne des coordonnées** de u dans la base $\mathcal{B}$ par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Généralisation. Soient $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p)$ une famille de vecteurs de E et $\mathcal{B}$ une base de E.
Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on note $(x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{n,k})$ les coordonnées de f_k dans la base $\mathcal{B}$.
On appelle **matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$**, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$, la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & \cdots & x_{1,p} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x_{n-1,p} \\ x_{n,1} & \cdots & \cdots & x_{n,p-1} & x_{n,p} \end{bmatrix}.$$

Définition — cas particulier des matrices de passages

Considérons deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de E.
La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ *est appelée* **matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$**. *On la note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.*

Application. Soit u un vecteur de E dont $U_{\mathcal{B}}$ et $U_{\mathcal{B}'}$ sont les matrices colonnes des coordonnées respectivement dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ alors

$$U_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} U_{\mathcal{B}'}.$$

Définition — matrice d'une application linéaire

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathcal{B}_F$ deux bases respectives de E et F. ***La matrice de $f \in \mathcal{L}(E,F)$ relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$*** *est la matrice de la famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_p)\big)$ dans la base $\mathcal{B}_F$:*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}\big(f(e_1), \dots, f(e_p)\big).$$

Elle est notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$.

Remarques. • La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$ a $\dim(E)$ colonnes et $\dim(F)$ lignes.
• Dans le cas d'un endomorphisme ($E = F$), on peut choisir $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$. On note simplement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)$ au lieu de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E}(f)$.

Exemples. • La matrice de l'application identité $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\mathrm{id}_E)$ est la matrice identité I_p.
• Par contre, pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, deux bases de E, on retrouve

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

Attention. L'ordre des indices n'est pas le même pour la matrice de passage et la matrice de l'identité.

THÉORÈME **isomorphisme**

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie (notées respectivement p et n) et $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ deux bases respectives de E et F.

L'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) \end{cases}$ *est un isomorphisme d'espace vectoriel.*

Rappel. Un isomorphisme est une application linéaire bijective.

Conséquences.
• À toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ correspond une unique application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ dont A soit la matrice dans les bases canoniques.
Elle est appelée **l'application linéaire canoniquement associée à la matrice** A.

• En dimension finie, il ne peut avoir d'isomorphisme si la dimension de l'espace de départ ne coïncide pas avec la dimension de l'espace d'arrivée. Ainsi, l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F est aussi de dimension finie et

$$\dim\left(\mathcal{L}(E,F)\right) = \dim\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})\right) = pn = \dim(E) \times \dim(F).$$

Lien avec la multiplication matricielle

THÉORÈME **image d'un vecteur**

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$.
Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $u \in E$.

Si on note
- → *U la matrice colonne des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}_E$,*
- → *V la matrice colonne des coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}_F$,*
- → *$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$, la matrice de l'application f dans les bases $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$,*

alors $$AU = V.$$

THÉORÈME **produit et composition**

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}_G$.
Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f).$$

THÉORÈME **inversibilité et isomorphisme**

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ deux bases respectives de E et F.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- *f est un isomorphisme ;*
- *$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$ est une matrice inversible.*

Dans ce cas, $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)^{-1}.$$

Noyau, image et rang

DÉFINITION **noyau et image d'une matrice**

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on définit

- ***Le noyau**,*
$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{n,1}\right\}.$$
- ***L'image**,*
$$\mathrm{Im}(A) = \left\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \exists\, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \quad AX = Y\right\}.$$
- ***Le rang** de A, noté $\mathrm{rg}(A)$, est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*
  Autrement dit, si $A = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_p \end{bmatrix}$ alors
$$\mathrm{rg}(A) = \dim\big(\mathrm{Vect}(C_1,C_2,\ldots,C_p)\big).$$

Remarques. • On a toujours $\mathrm{rg}(A) \leqslant p$.
• Le rang est invariant par transposition, autrement dit

$$\forall\, A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA).$$

En particulier, on a aussi $\mathrm{rg}(A) \leqslant n$.

PROPOSITION **rang d'une matrice et d'une application linéaire**

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et de bases respectives $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$.
Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$. Alors,
$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f).$$

Conséquences. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
À l'aide de la formule du rang et ses corollaires, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- A est inversible ;
- $\mathrm{rg}(A) = n$;
- $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$.

Puissances, polynômes d'endomorphismes et de matrices

Rappelons que pour un endomorphisme f de E, les applications $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ ... sont parfaitement définies et linéaires. Les **puissances** de f sont les applications linéaires :

$$f^0 = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

Remarque. Comme pour les matrices, il existe une version de la formule du binôme de Newton dans le cas des endomorphismes.
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ qui *commutent*. Alors pour tout entier naturel p,

$$\boxed{(f+g)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} f^i \circ g^{p-i}.}$$

Définition — **polynôme de matrice, d'endomorphisme**

Soit $P(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ *un polynôme.*
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $f \in \mathcal{L}(E)$ *un endomorphisme.*

- *Le* ***polynôme de matrice*** $P(A)$ *est défini par* $\quad P(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i A^i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Un polynôme P *est* ***annulateur*** *de* A *si* $P(A) = 0_n$.

- *Le* ***polynôme d'endomorphisme*** $P(f)$ *est défini par* $\quad P(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f^i \in \mathcal{L}(E)$.
Un polynôme P *est* ***annulateur*** *de* f *si* $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Proposition — **Polynôme d'endomorphisme, de matrice**

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie dont* $\mathcal{B}$ *est une base et* f *un endomorphisme de* E.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^k = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k).$$

Plus généralement, pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$,

$$P\Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\Big) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\big(P(f)\big).$$

Comparaison des suites

Négligeable

Soient u et v deux suites réelles.
Si la suite v n'est pas nulle à partir d'un certain rang, prouver que u est négligeable devant v revient à montrer

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On note $u_n = o(v_n)$, ou éventuellement $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
Exemples. Si $0 < a < b$, alors $a^n = o\big(b^n\big)$. Soient $q \in \mathbb{R}$, α et $\beta \in \mathbb{R}^+$.

$$|q| < 1 \quad \Rightarrow \quad q^n = o\Big(\frac{1}{n^\alpha}\Big) \quad \text{et} \quad |q| > 1 \quad \Rightarrow \quad n^\beta = o(q^n).$$

PROPOSITION **croissances comparées et factorielle**

Soit $(\alpha,\beta) \in {\mathbb{R}_*^+}^2$, $\quad n^\alpha = o\Big(\exp(\beta n)\Big)$, $\quad \ln(n)^\alpha = o\big(n^\beta\big)$ *et* $\quad \exp(\alpha n) = o\big(n!\big)$.

PROPOSITION **règles de calcul**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *quatre suites réelles et* $\lambda \in \mathbb{R}$.
- *Si* $u_n = o(v_n)$, *alors* $\lambda u_n = o(v_n)$.
- *Si* $u_n = o(v_n)$ *et si* $\lambda \neq 0$, *alors* $u_n = o(\lambda v_n)$.
- *Si* $u_n = o(w_n)$ *et* $v_n = o(w_n)$, *alors* $u_n + v_n = o(w_n)$.
- *Si* $u_n = o(v_n)$ *et* $v_n = o(w_n)$, *alors* $u_n = o(w_n)$.
- *Si* $u_n = o(w_n)$ *et* $v_n = o(x_n)$, *alors* $u_n v_n = o(w_n x_n)$.
- *Si* $u_n = o(v_n)$ *alors* $u_n w_n = o(v_n w_n)$.

Équivalents

Soient u et v deux suites réelles.
Si la suite v n'est pas nulle à partir d'un certain rang, prouver que u est équivalent à v revient à montrer

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On note $u_n \sim v_n$, ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} o(v_n)$.

PROPOSITION **équivalents usuels**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors

$$\ln(1+u_n) \sim u_n, \quad e^{u_n} - 1 \sim u_n, \quad (1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n,$$

$$\sin(u_n) \sim u_n, \quad 1-\cos(u_n) \sim \frac{{u_n}^2}{2} \quad \text{et} \quad \tan(u_n) \sim u_n.$$

Remarque. Ces équivalents découlent des limites usuelles sur les fonctions.

Attention. Il ne faut pas oublier la condition $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

PROPOSITION **produit, inverse, élévation à la puissance**

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatre suites.

Si
$$a_n \sim b_n \quad \text{et} \quad c_n \sim d_n.$$

Alors
- $a_n c_n \sim b_n d_n$.
- *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$,* $\quad {a_n}^\alpha \sim {b_n}^\alpha$.
- *Si $c_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors $d_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, et*

$$\frac{1}{c_n} \sim \frac{1}{d_n} \quad \text{et} \quad \frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{d_n}.$$

Attention. Il faut être très prudent avec les sommations et les compositions d'équivalents.

Équivalence et négligeabilité

PROPOSITION **équivalence et négligeabilité**

Soient u et v deux suites réelles. Alors, $\quad u_n \sim v_n \quad \Longleftrightarrow \quad u_n = v_n + o(v_n).$

Exmple. $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ donne $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

PROPOSITION

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles.
- *Si $u_n \sim v_n$ et si $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.*
- *Si $u_n \sim v_n$ et si $w_n = o(v_n)$, alors $w_n = o(u_n)$.*

Comparaison des fonctions

Négligeable

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
Si g ne s'annule pas, prouver que f est **négligeable devant** g **en** a revient à montrer que

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$

On note $f \underset{a}{=} o(g)$.

Exemples. • $f \underset{a}{=} o(1) \quad$ si et seulement si $\quad f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
• $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$ si et seulement si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(x) \underset{a}{=} f(a) + o(1).$$

• Si f est dérivable en a, alors $\qquad f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$.

PROPOSITION — **croissances comparées**

Soit $(\alpha, \beta) \in {\mathbb{R}_*^+}^2$,

$$x^\alpha \underset{+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{\beta x}\right), \quad \ln(x)^\alpha \underset{+\infty}{=} o\left(x^\beta\right) \quad \text{et} \quad \ln(x) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right).$$

PROPOSITION — **règles de calcul**

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
- *Si $f \underset{a}{=} o(g)$, alors $\lambda f \underset{a}{=} o(g)$.*
- *Si $\lambda f \underset{a}{=} o(g)$ et si $\lambda \neq 0$, alors $f \underset{a}{=} o(g)$.*
- *Si $f \underset{a}{=} o(h)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$, alors $f + g \underset{a}{=} o(h)$.*
- *Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$, alors $f \underset{a}{=} o(h)$.*
- *Si $f \underset{a}{=} o(g)$, alors $fh \underset{a}{=} o(gh)$.*

Équivalents

Si g ne s'annule pas, prouver que f est **équivalent à** g en a revient à montrer que $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$.
On note $f \underset{a}{\sim} g$.

Attention. Certaines opérations ne sont pas stables par équivalence.

- La somme : $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \quad \not\Rightarrow \quad f_1+f_2 \underset{a}{\sim} g_1+g_2$.
- La composition : $f \underset{a}{\sim} g \quad \not\Rightarrow \quad h\circ f \underset{a}{\sim} h\circ g$.

Proposition — équivalents usuels

$$\mathrm{e}^x - 1 \underset{0}{\sim} x, \qquad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x, \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x \quad (\alpha\in\mathbb{R}),$$

$$\sin(x) \underset{0}{\sim} x, \qquad 1-\cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \quad \textit{et} \quad \tan(x) \underset{0}{\sim} x.$$

Proposition — produit, puissance et quotient

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

- *Si* $f \underset{a}{\sim} g$, *alors* $fh \underset{a}{\sim} gh$.
- *Si* $f \underset{a}{\sim} g$, *alors* $f^\beta \underset{a}{\sim} g^\beta$ *pour tout* $\beta\in\mathbb{N}$.
- *Si* $f \underset{a}{\sim} g$ *et que f et g ne s'annulent pas sur un voisinage de a, alors* $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{g}$.

Équivalence et ngligeabilité

Proposition — équivalence et négligeabilité

Soient $a \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ et f, g deux fonctions définies sur un voisinage de a.

$$f \underset{a}{\sim} g \quad \Leftrightarrow \quad f-g \underset{a}{=} o(g).$$

Proposition — liens entre équivalence et négligeabilité

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

- *Si* $f \underset{a}{\sim} g$ *et si* $f \underset{a}{=} o(h)$, *alors* $g \underset{a}{=} o(h)$.
- *Si* $f \underset{a}{\sim} g$ *et si* $h = \underset{a}{=} o(g)$, *alors* $h \underset{a}{=} o(f)$.
- *Si* $g \underset{a}{=} o(f)$, *alors* $f+g \underset{a}{\sim} f$.

Séries numériques

Définition — série numérique

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. La **série** associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

On dit que la série converge si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie.

Attention. Il ne faut pas confondre

- $\sum u_n$: la série de terme général u_n ;
- $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$: la somme partielle d'ordre n de la série ;
- $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$: la somme de la série, i.e, sous réserve de convergence, la limite des sommes partielles ;
- $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$: le reste d'ordre n de la série si cette dernière est convergente.

Remarques. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\qquad u_n = S_n - S_{n-1}$.
• Si la série de terme général u_n converge, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
La série $\sum 1/n$ montre que la réciproque est fausse.
• Soient u et v deux suites réelles telles que les séries de termes généraux u_n et v_n convergent.
Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ converge et

$$\forall\, n_0 \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=n_0}^{+\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k.$$

Théorème — convergence absolue

*On dit que la série de terme général u_n **converge absolument** si la série de terme général $|u_n|$ converge.*
Si une série converge absolument, alors elle converge.

Remarque. La réciproque est fausse.

Séries de références

THÉORÈME — **séries géométriques, série exponentielle**

- *Soit $x \in \mathbb{R}$. Les séries de terme généraux x^k, kx^{k-1} et $k(k-1)x^{k-2}$ sont convergentes si et seulement si $|x| < 1$. Dans ce cas,*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

- *Pour tout réel x, la série de terme général $\frac{x^k}{k!}$ est convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$.*

THÉORÈME — **série de Riemann**

*On appelle **série de Riemann**, une série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.*
Cette série est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Critères de convergence pour les séries à termes positifs

PROPOSITION — **critère de comparaison**

Soient u et v deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.
- *Si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n aussi.*
- *Si la série de terme général u_n diverge, alors la série de terme général v_n aussi.*

THÉORÈME — **critères de négligeabilité et d'équivalence**

Soient u et v deux suites réelles.

- *Si*
  - → $u_n = o(v_n)$
  - → *v est positive à partir d'un certain rang*
  - → *la série de terme général v_n converge,*

alors la série de terme général u_n converge.

- *Si*
  - → $u_n \sim v_n$
  - → *v est positive à partir d'un certain rang,*

alors les séries de terme général u_n et v_n sont de même nature.

Remarque. On a des critères analogues si v est négative à partir d'un certain rang.

Intégrales généralisées

Définitions et règles de calculs

DÉFINITION — **intégrale généralisée en b**

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.
L'intégrale généralisée *(ou impropre) de f sur $[a,b[$ est notée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Elle est dite* ***convergente*** *si $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers b avec $x < b$. Dans ce cas, on pose*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x\to b \\ x<b}} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si la limite n'existe pas ou qu'elle est infinie, l'intégrale est dite ***divergente****.*

Remarques. • La définition s'étend aux fonctions continues sur $]a,b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$.
• Si f est une fonction continue sur un intervalle $]a,b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.
L'intégrale généralisée de f sur $]a,b[$ est notée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Elle est dite **convergente** si pour un réel $c \in]a,b[$, les intégrales généralisées $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes. Dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

• Sous réserve de convergence, les propriétés de linéarité, de croissance de l'intégrale, l'inégalité triangulaire et la relation de Chasles sont encore valables. Par contre, pour effectuer une intégration par parties, on se ramène à un segment.

THÉORÈME — **changement de variable**

Soit f continue sur un intervalle $]a,b[$.
Si $\varphi\ :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$, alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$ et $\int_\alpha^\beta \varphi'(t)f\big(\varphi(t)\big)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Dans le cas de convergence,

$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta \varphi'(t)f\big(\varphi(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Convergence absolue

Définition

$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est dite **absolument convergente** si* $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ *est convergente.*

Théorème — convergence absolue

Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est absolument convergente, alors elle est convergente.*

Critères de convergence

À l'aide du théorème de convergence monotone, on montre que, pour $f : [a;b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue positive, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'application $x \in [a;b[\mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.

Proposition — critère de comparaison et de négligeabilité

Soient f, g deux fonctions continues définies sur $[a,b[$.

- *Si*
  - → *f et g sont positives,*
  - → *pour tout $x \in [a,b[$, $\quad f(x) \leqslant g(x)$,*
  - → $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *est convergente,* *alors* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est aussi convergente.*
- *Si*
  - → *g est positive sur un voisinage de b ;*
  - → $f \underset{b^-}{=} o(g)$;
  - → $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *est convergente,* *alors* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est aussi convergente.*

Proposition — critère d'équivalence

Soient f, g deux applications continues définies sur $[a,b[$.

Si
- → *f et g sont de signe constant sur un voisinage de b,*
- → $f \underset{b^-}{\sim} g$,

alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *sont de même nature.*

Remarque. En pratique, on compare souvent aux **intégrales de Riemann.**

- L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente en 0 si et seulement si $\alpha < 1$;
- L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Dérivées successives

On définit la dérivée n-ième par récurrence.

Définition **dérivée d'ordre supérieur sur I, en a**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- *f est n **fois dérivable sur** I si la dérivée $(n-1)$-ième est dérivable. On note*

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \quad \text{et} \quad f^{(0)} = f.$$

- *De plus, f est n **fois dérivable en** a si f est $n-1$ fois dérivable dans un voisinage de a et $f^{(n-1)}$ est dérivable en a.*

Remarque. La dérivée $(n+1)$-ième d'une fonction polynomiale de degré au plus n est nulle.

Notation. Pour $n \in \mathbb{N}$.
- $\mathcal{D}^n(I)$ est l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I ;
- $\mathcal{C}^n(I)$ est l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I et dont la dérivée n-ième est continue ;
- $\mathcal{C}^\infty(I)$ est l'ensemble des fonctions infiniment dérivables sur I.
  Par exemple, les fonctions polynomiales ainsi que la fonction exponentielle appartiennent à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

On a la suite d'inclusions :

$$\mathcal{C}^\infty(I) \subset \cdots \subset \mathcal{D}^{n+1}(I) \subset \mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{D}^n(I) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{D}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I).$$

Théorème **linéarité - formule de Leibniz**

Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur I et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Alors la somme $\lambda f + \mu g$ et le produit $f \cdot g$ sont aussi n fois dérivables sur I avec

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$$

et

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}.$$

Remarque. Si f est n fois dérivable sur I et si f ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{f}$ est n fois dérivable sur I.

Théorème **composition**

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset J$.
Si f et g sont n fois dérivables (respectivement sur I et J), alors $g \circ f$ est n fois dérivable sur I.

Formules de Taylor

THÉORÈME — **formule de Taylor avec reste intégral**

Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ et $a \in I$. Pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple. Si on applique cette formule à une fonction polynomiale P (de classe $\mathcal{C}^\infty$) où $n > \deg(P)$,

$$P(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

THÉORÈME — **inégalité de Taylor-Lagrange**

Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$, $a, x \in I$, $n \in \mathbb{N}$. Si $|f^{(n+1)}|$ est majorée sur I, on a

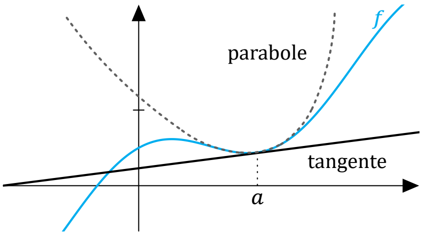
$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant \sup_{t\in[x,a]\cup[a,x]} \left| f^{(n+1)}(t) \right| \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Application. On démontre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

THÉORÈME — **formule de Taylor-Young**

Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. On a, au voisinage de a,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big).$$



Exemples.

- $n = 1$

$$f(x) = \overbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}^{\text{équation de la tangente}} + o(x-a).$$

- $n = 2$

$$f(x) = \overbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}^{\text{équation d'une parabole si } f''(a) \neq 0} + o\big((x-a)^2\big).$$

Développements limités

Généralités

DÉFINITION — **développement limité d'ordre n en x_0**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
*On dit que f possède un **développement limité d'ordre** n **en** x_0 (abrégé par $DL_n(x_0)$) s'il existe $n+1$ réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ et une application $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que :*

$$\forall\, x \in I, \quad f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \varepsilon(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

Autrement dit, f admet un $DL_n(x_0)$ s'il existe $P_n \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que

$$\forall\, x \in I, \qquad f(x) \underset{x_0}{=} P_n(x-x_0) + o\big((x-x_0)^n\big).$$

Exemples. • Lorsque f est dérivable en x_0 alors f admet un $DL_1(x_0)$ et

$$f(x) \underset{x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0).$$

• Plus généralement, si $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$, alors, d'après la formule de Taylor-Young, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f admet un développement limité à l'ordre n en tout point de I.
Par le changement de variable $h = x - x_0$, on obtient

$$f(x_0+h) \underset{0}{=} f(x_0) + \frac{h}{1!}f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + o(h^n).$$

• Dans la suite, P_n sera la partie régulière du développement limité.

THÉORÈME — **unicité du développement limité**

Si on peut trouver $(a_i)_{i=0,\dots,n}$ et $(b_i)_{i=0,\dots,n}$ tels que pour tout réel x dans un voisinage de x_0,

$$f(x) \underset{x_0}{=} \sum_{i=0}^{n} a_i(x-x_0)^i + o\big((x-x_0)^n\big) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x_0}{=} \sum_{i=0}^{n} b_i(x-x_0)^i + o\big((x-x_0)^n\big),$$

alors pour tout indice i, $\qquad a_i = b_i.$

PROPOSITION — **combinaison linéaire**

Si f et g, définies sur un voisinage de x_0, admettent un $DL_n(x_0)$ de partie régulière respective P_n et Q_n alors $\lambda f + \mu g$ admet un $DL_n(x_0)$ de partie régulière $\lambda P_n + \mu Q_n$ (où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).

Proposition **produit**

Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de 0 admettant un $DL_n(0)$ de partie régulière respective P_n et Q_n, alors $f \cdot g$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est la troncature à l'ordre n du produit $P_n \cdot Q_n$ (c'est-à-dire que l'on ne gardera que les termes de degré inférieur ou égal à n).

Attention. Cet énoncé n'est valable qu'au voisinage de 0. Dans les autres cas, pour un voisinage de x_0, on effectue un changement de variable préalable $h = x - x_0$.

Développements limités usuels au voisinage de 0

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- **DLs, fractions et puissances**

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &\underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right);\\
\frac{1}{1-x} &\underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right);\\
\frac{1}{1+x} &\underset{0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right).
\end{aligned}$$

Exemple. On obtient le développement limité d'ordre 4 de $\sqrt{1+x}$ en utilisant le premier développement limité avec $\alpha = 1/2$:

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + o(x^5).$$

- **DLs, exponentielle et logarithme**

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &\underset{0}{=} 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right);\\
\ln(1+x) &\underset{0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o\left(x^n\right).
\end{aligned}$$

- **DLs des fonctions trigonométriques**

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \quad \text{et} \quad \sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6).$$

Généralisations :

$$\begin{aligned}
\sin(x) &\underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right);\\
\cos(x) &\underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right).
\end{aligned}$$

Extrema, convexité

Allure du graphe d'une fonction au voisinage d'un point

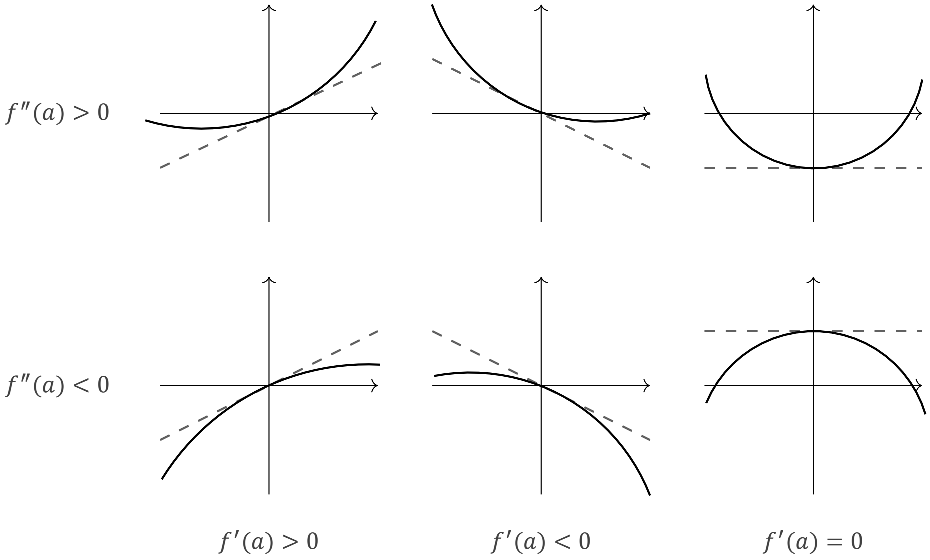
Partons d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $a \in \mathbb{R}$. D'après la formule de Taylor-Young, pour tout x dans un voisinage de a,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o_a\big((x-a)^2\big).$$

Graphiquement, au voisinage de a, la courbe représentative de f est « proche » de la courbe d'équation

$$x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

Lorsque $f''(a) \neq 0$, la courbe est une parabole.
Distinguons suivant le signe de $f'(a)$ et $f''(a)$. En gras, la parabole, en pointillés, la tangente.



Extrema

THÉORÈME — **existence d'un maximum et d'un minimum**

Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
L'ensemble image $f([a,b]) = \{f(x)\ ;\ x \in [a,b]\}$ est un segment $[m,M]$. En particulier, le minimum et le maximum de f sont bien définis. On note alors

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

THÉORÈME — **extremum et point critique**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Si
- → *f admet un extremum local en a ;*
- → *a appartient à un intervalle ouvert dans I ;*
- → *f est dérivable en a.*

Alors $f'(a) = 0$.

On dit alors que a est un ***point critique*** *de f.*

Remarques. • Il faut bien distinguer les hypothèses sur l'intervalle de définition de f.
→ Dans le premier théorème, I est un intervalle fermé et bornée (segment).
→ Dans le second, on se place sur un ouvert.

• Pour déterminer les éventuels extrema sur un ouvert, on calcule, dans un premier temps, les points critiques. Dans un deuxième temps, on vérifie si ces derniers sont bien des extrema locaux ou non, des extrema globaux ou non.

THÉORÈME — **condition suffisante pour un extremum**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et a appartenant à un intervalle ouvert inclus dans I.
On suppose que a est un point critique de la fonction et $f''(a) \neq 0$.
Alors la fonction admet un extremum local en a. Plus précisément :

- *Si $f''(a) > 0$ alors f admet un* ***minimum local*** *en a.*
- *Sinon $f''(a) < 0$ alors f admet un* ***maximum local*** *en a.*

Remarque. Nous renvoyons aux graphes de la page précédente pour une illustration de ces résultats.

Convexité, concavité

Définition — **fonctions convexes/concaves**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- *f est une fonction **convexe** si*

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \forall (t_1,t_2) \in [0,1]^2 \quad \textit{tels que} \quad t_1 + t_2 = 1, \quad f\big(t_1 x + t_2 y\big) \leqslant t_1 f(x) + t_2 f(y).$$

- *f est une fonction **concave** si*

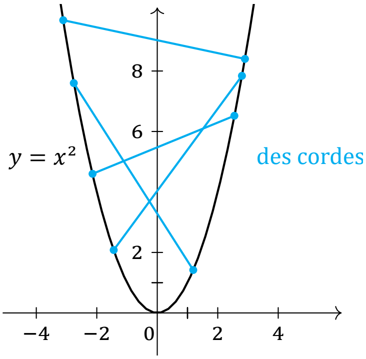
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \forall (t_1,t_2) \in [0,1]^2 \quad \textit{tels que} \quad t_1 + t_2 = 1, \quad f\big(t_1 x + t_2 y\big) \geqslant t_1 f(x) + t_2 f(y).$$

Remarques.

- La fonction f est concave si et seulement si $-f$ est convexe. On peut donc se limiter à des énoncés dans le cas convexe.

- Le graphe d'une fonction convexe (respectivement concave) est en dessous (respectivement au-dessus) de n'importe laquelle de ses cordes.

- Ci-contre, la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est convexe.



Théorème — **généralisation de l'inégalité de convexité**

Considérons une fonction convexe $f : I \to \mathbb{R}$.

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \quad \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n, \ \textit{tels que} \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,$$

on a

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

Théorème — **caractérisation des fonctions convexes $\mathcal{C}^1$**

*Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont **équivalentes**.*

- *f est convexe sur I.*
- *f' est une fonction croissante.*
- *La courbe représentative de f est située au-dessus de chacune de ses tangentes.*
  C'est-à-dire, $\quad \forall a \in I, \quad \forall x \in I, \quad f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x - a).$

Exemples. $\exp'$ et $\ln'$ sont respectivement croissante et décroissante, les fonctions exponentielle et logarithme sont respectivement convexe et concave. En considérant les tangentes en 0 et 1, on démontre que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant 1 + x, \qquad \forall t \in \mathbb{R}_*^+, \quad \ln(t) \leqslant t - 1.$$

Théorème — caractérisation des fonctions convexes $\mathcal{C}^2$

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- *f est convexe sur I ;*
- *f'' est une fonction positive.*

Théorème — condition suffisante pour un minimum global

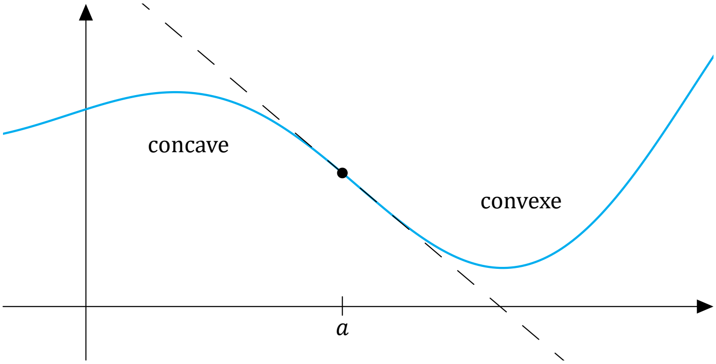
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et a appartenant à un intervalle ouvert inclus dans I.

Si
- → *f est convexe ;*
- → *f est dérivable en a ;*
- → *a est un point critique ($f'(a) = 0$) ;*

Alors, f admet un minimum global en a.

Remarque. On pourra comparer ce résultat avec le troisième énoncé de ce rappel de cours (condition suffisante pour un extremum). La convexité permet d'avoir un résultat global.

Lorsqu'il y a un changement de convexité, on parle de point d'inflexion.



Définition — point d'inflexion

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2(I)$ et a un point intérieur à I.
*On dit que a est un **point d'inflexion** si $f''(a) = 0$ et qu'il y a un changement de signe de f'' au voisinage de a.*

Espaces probabilisés

Ce chapitre complète le chapitre 17 (rappel page 51) et l'étend au cas où l'univers des possibles Ω est infini.

Définitions

On représente le résultat d'une expérience aléatoire comme un élément ω de l'ensemble Ω de tous les résultats possibles.
Dans la suite, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est un ensemble des événements.

- $\Omega \in \mathcal{A}$.
- *$\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire :* $\quad \forall A \in \mathcal{A}, \quad \overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.
- *$\mathcal{A}$ est stable par union et intersection finie ou dénombrable* : si I est fini ou dénombrable et si pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{A}$, alors
$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}.$$

Définition — l'application probabilité

Soient Ω, un univers des possibles et $\mathcal{A}$ un ensemble d'événements.
*Une **probabilité** est une application $\mathbb{P}$ réelle définie sur $\mathcal{A}$ vérifiant les conditions suivantes.*

→ $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0{,}1]$;
→ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
→ *$\mathbb{P}$ est σ-**additive** :*
Pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ finie ou dénombrable d'événements deux à deux disjoints,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

*Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A)$ est appelée **la probabilité de l'événement** A.*

Remarque. Dans le cas où l'ensemble des indices I est dénombrable (par exemple, $\mathbb{N}$), la définition suppose la convergence de la série $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$.

Vocabulaire. • La donnée d'un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où Ω est un univers des possibles, $\mathcal{A}$ un ensemble d'événements sur Ω et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, définit un **espace probabilisé**.
- Un événement de probabilité nulle est dit **négligeable**.
- Un événement de probabilité 1 est dit **presque-sûr**.

Les théorèmes

THÉORÈME **de la limite monotone**

Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'événements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- *Si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** pour l'inclusion (c'est-à-dire, $\forall\, i \in \mathbb{N},\ A_i \subset A_{i+1}$),*

  Alors
  $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

- *Si la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** pour l'inclusion ($\forall\, i \in \mathbb{N},\ B_{i+1} \subset B_i$),*

  Alors,
  $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n).$$

Conséquence. Si $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un suite d'événements alors

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} C_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k\right) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} C_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} C_k\right).$$

Les définitions et formules vues au premier semestre s'étendent au cas général.
Définition de la probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées ... *Voir page 51*

Remarque. Si A est un événement non négligeable, alors $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_A)$ est un espace probabilisé.

THÉORÈME **formules des probabilités totales**

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements non négligeables. Pour tout événement B,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n \cap B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B).$$

THÉORÈME **formules de Bayes (ou de probabilité des causes)**

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements non négligeables. Pour tout événement B,

$$\mathbb{P}_B(A_k) = \frac{\mathbb{P}(A_k \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_k)\cdot\mathbb{P}_{A_k}(B)}{\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)\cdot\mathbb{P}_{A_n}(B)}.$$

DÉFINITION **suite infinie d'événements mutuellement indépendants**

*Une suite infinie d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **mutuellement indépendante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une suite finie d'événements mutuellement indépendants.*

Variables aléatoires discrètes

Variable discrète et loi

Définition — **variable aléatoire discrète**

*Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une **variable aléatoire discrète** est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$*

telle que
- *$\to$ $X(\Omega) = \{x_i \,;\, i \in I\}$ où I est une partie finie ou infinie de $\mathbb{N}$;*
- *$\to$ pour tout $i \in I$, $[X = x_i]$ est un événement.*

Vocabulaire. Donner **la loi** d'une variable aléatoire (v.a) X signifie donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X et pour chaque $x \in X(\Omega)$, la probabilité $\mathbb{P}(X = x)$.

Remarque. À une v.a discrète X est associé le système complet d'événements $\big([X = x]\big)_{x\in X(\Omega)}$.

En particulier, il vient
$$\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Définition — **indépendance**

- *Soient X et Y sont deux v.a discrètes sur un même espace probabilisé.*
*On dit que X et Y sont **indépendantes** si*
$$\forall\,(x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega),\quad \mathbb{P}\big(\,[X = x] \cap [Y = y]\,\big) = \mathbb{P}(X = x)\cdot \mathbb{P}(Y = y).$$
- *Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si*
$$\forall\,(x_1,\cdots,x_n) \in X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega),\quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i).$$

Espérance et variance

Définition — **espérance**

Soit X une variable aléatoire dénombrable. On note $X(\Omega) = \{x_k \,;\, k \in \mathbb{N}^*\}$. X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $x_k\,\mathbb{P}(X = x_k)$ est absolument convergente. Alors on définit l'espérance de X par
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k\,\mathbb{P}(X = x_k).$$

Remarques. • Cette somme est indépendante du choix de l'indexation.
• L'espérance est linéaire.
Pour tous réels λ, μ, toutes v.a X et Y admettant une espérance, $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et

$$\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda\,\mathbb{E}(X) + \mu\,\mathbb{E}(Y).$$

PROPOSITION — **existence par domination**

Soient X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur un même espace probabilisé.

Si
- → $0 \leqslant |X| \leqslant Y$,
- → *Y admet une espérance,*

alors, X admet une espérance et $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

Attention. Il ne faut pas confondre l'énoncé précédent avec la propriété de croissance de l'espérance

Si
- → X admet une espérance ;
- → Y admet une espérance ;
- → $X \leqslant Y$

alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

THÉORÈME — **formule de transfert**

Soit X une v.a discrète sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. On note $X(\Omega) = \{x_k\ ;\ k \in I\}$.
Soit g définie sur $X(\Omega)$. La variable aléatoire $g(X)$ possède une espérance si et seulement si la série de terme général $g(x_k)\,\mathbb{P}(X = x_k)$ est absolument convergente, et dans ce cas

$$\mathbb{E}\big(g(X)\big) = \sum_{k\in I} g(x_k)\,\mathbb{P}(X = x_k).$$

DÉFINITION — **variance**

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. La ***variance*** *de X est, sous réserve de convergence, définie par*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\Big).$$

PROPOSITION — **propriétés et formule de Koenig-Huygens**

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ possédant une variance.
- *Une variable aléatoire est presque sûrement constante si et seulement si sa variance est nulle.*
- *Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,*
$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\,\mathbb{V}(X).$$
- *Formule de Kœnig-Huygens*
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Conséquence. Soit X une va discrète admettant une espérance. Notons $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$, l'écart-type.

Alors $$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} \text{ est une v.a centrée réduite.}$$

C'est-à-dire, une v.a d'espérance nulle et et de variance 1.

Méthode. En général, on calcule la variance à l'aide de la formule de Kœnig-Huygens.
→ Avant la variance, on calcule l'espérance, puis $\mathbb{E}(X)^2$.
→ À l'aide du théorème de transfert, sous réserve de convergence absolue, on calcule

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k \in I} {x_k}^2 \, \mathbb{P}(X = x_k).$$

Fonction de répartition

Définition — fonction de répartition

La fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t)$$

*est la **fonction de répartition** de la variable aléatoire X.*

Proposition — propriétés de la fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire réelle et F_X sa fonction de répartition. Alors,

- *F_X est croissante.*
- $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ *et* $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$.
- *Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$,* $\qquad \mathbb{P}\big(X \in \,]a,b]\,\big) = F_X(b) - F_X(a)$.

Lois usuelles (suite)

Pages ??et p ??

Cette page complète le rappel sur les lois usuelles finies, page 55.

Définition — loi géométrique $\mathcal{G}(p)$

Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$.
*On dit que la variable aléatoire X suit une **loi géométrique** de paramètre p, notée $\mathcal{G}(p)$, si*

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad et \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p = q^{k-1}p.$$

Proposition — espérance et variance de $\mathcal{G}(p)$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors X admet une espérance et une variance avec

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad et \quad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Modélisation. Une loi géométrique modélise un premier temps d'arrêt.
Si X renvoie le rang du premier succès dans une succession d'expériences de Bernoulli identiques, mutuellement indépendantes, alors X suit une loi géométrique où p est la probabilité de succès d'une expérience de Bernoulli.

Définition — loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Soit λ un réel strictement positif.
*On dit que la variable aléatoire X suit **une loi de Poisson** de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si*

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad et \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Proposition — espérance et variance de $\mathcal{P}(\lambda)$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance avec

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad et \quad \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

Modélisation. On utilise souvent la loi de Poisson pour dénombrer les « événements rares ».

Couples de V.A

Lois, lois marginales, indépendance

Définition — **loi d'un couple**

La loi (conjointe) *d'un couple (X,Y) de variables aléatoires discrètes, c'est la donnée de la valeur de $\mathbb{P}\big([X=x]\cap[Y=y]\big)$ pour tout couple $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$.*

Définition — **indépendance**

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. On dit que X et Y sont ***indépendantes*** *si, pour tout couple $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$,*

$$\mathbb{P}\big([X=x]\cap[Y=y]\big) \;=\; \mathbb{P}(X=x)\cdot\mathbb{P}(Y=y).$$

Les lois de X et Y sont appelées **lois marginales**. Elles s'obtiennent à partir de la loi du couple en utilisant la formule des probabilités totales :

$$\forall x\in X(\Omega),\quad \mathbb{P}(X=x)=\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbb{P}\big(\,[X=x]\cap[Y=y]\,\big)$$

Une formule analogue donne la loi de Y.

Attention. Les lois marginales de X et Y ne permettent pas de retrouver la loi du couple.
Par exemple, soient X et Y deux variables de Bernoulli de paramètre $1/2$.
Voici trois exemples donnant trois lois de couples différentes :
1) X et Y indépendantes ; 2) $Y=X$; 3) $Y=1-X$.

Par contre si X et Y sont indépendantes, la loi du couple (X,Y) est connue.

Calculs d'espérance

La loi conjointe des deux variables permet le calcul, lorsqu'elle existe de l'espérance de $g(X,Y)$.

Théorème — **de transfert pour un couple de variables**

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes, et soit g une fonction à valeurs réelles définie sur le sous-ensemble $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ de $\mathbb{R}^2$. Sous réserve de convergence absolue,

$$\mathbb{E}\big(g(X,Y)\big)=\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ y\in Y(\Omega)}} g(x,y)\cdot\mathbb{P}\big([X=x]\cap[Y=y]\big).$$

Voici deux applications de ce théorème.

THÉORÈME **linéarité de l'espérance**

Soient X et Y deux variables aléatoires, et soient λ et μ deux réels.
Si X et Y admettent une espérance, alors $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et

$$\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y).$$

THÉORÈME **espérance d'un produit de variables indépendantes**

Soient X et Y deux variables aléatoires.

Si X et Y
- *→ admettent une espérance et*
- *→ sont indépendantes,*

alors $X \cdot Y$ admet une espérance et $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$.

Loi d'une somme, exemples

Soient (X,Y) un un couple de variables aléatoires.
Soit $Z = X + Y$. Alors $Z(\Omega) = \{x + y \mid (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)\}$. Pour tout $z \in Z(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ x+y=z}} \mathbb{P}\big([X = x] \cap [Y = y]\big) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ z-x\in Y(\Omega)}} \mathbb{P}\big([X = x] \cap [Y = z - x]\big).$$

Si les variables X et Y sont indépendantes, alors la loi de Z est donnée par la formule du **produit de convolution discret**. Pour tout $z \in Z(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ z-x\in Y(\Omega)}} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = z - x).$$

THÉORÈME **stabilité des lois binomiale et de Poisson**

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes, supposées indépendantes.
- *Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ et que $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ pour deux entiers m et n et pour un même réel $p \in [0,1]$, alors*

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m + n, p).$$

- *Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ pour deux réels strictement positifs λ et μ, alors*

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu).$$

Loi du maximum, du minimum

Pour déterminer la loi de $\max(X,Y)$, on passe par la fonction de répartition.
Pour la loi du $T = \min(X,Y)$, on passe par la fonction d'anti-répartition ($\mathbb{P}(T > x)$).

Convergences et approximations

Inégalités

PROPOSITION **inégalité de Markov**

Soit Z une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

Si
- $\rightarrow$ *Z est positive,*
- $\rightarrow$ *Z admet une espérance,*

alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$,
$$\mathbb{P}\big(Z \geqslant \lambda\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Z)}{\lambda}.$$

Remarque. Cette inégalité s'applique à toute variable aléatoire positive possédant une espérance. Elle peut se révéler bonne si Z prend des valeurs proches de λ. On a même égalité lorsque Z est la variable certaine égale à λ. Mais elle peut aussi donner une majoration par un réel plus grand que 1.

Conséquence. En considérant la variable $Z = \big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2$, on en déduit :

PROPOSITION **inégalité de Bienaymé-Tchebychev**

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.
Si X admet une variance, alors

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Remarque. Par passage au complémentaire, on obtient

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \quad \mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}(X)| < \varepsilon\big) \geqslant 1 - \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Théorèmes de convergence

THÉORÈME — **loi faible des grands nombres**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Si
- → *les variables X_n sont mutuellement indépendantes,*
- → *et de même loi,*
- → *admettant une espérance m et une variance,*

alors, si on note $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\mathbb{P}\big(|\,\overline{X_n} - m| \geqslant \varepsilon\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque. Ce théorème est une conséquence directe de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Application. Considérons une expérience aléatoire, et un événement A de probabilité théorique p associé à cette expérience. Répétons une infinité de fois l'expérience de manière indépendante.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, notons X_i la v.a égale à 1 (resp. 0) en cas de succès (resp. échec) à la i-ème étape.

$$\overline{X_n} = \frac{\text{Nbre de succès sur } n \text{ étapes}}{n : \text{le nombre d'étapes}} \quad \text{est la fréquence empirique d'apparition de l'événement } A.$$

D'après la loi faible des grands nombres,

$$\forall\, \varepsilon > 0, \qquad \mathbb{P}\Big(\big|\overline{X_n} - p\big| > \varepsilon\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

C'est une première formulation mathématique de l'approche intuitive de la probabilité d'un événement comme « limite » des fréquences empiriques.

Un énoncé plus général sera vu en seconde année : la loi forte des grands nombres.

Donnons maintenant un second énoncé de convergence de variables aléatoires.

THÉORÈME — **convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson**

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires binomiales $\mathcal{B}(n,\lambda/n)$.
Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(X = k) \quad \text{où} \quad X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda).$$