edhec

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD
EDHEC GRADUATE SCHOOL OF BUSINESS

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Mardi 7 mai 1996, de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Seules sont autorisées :

- Règles graduées
- Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21cm x 15cm de large, sans limitation de nombre.

EXERCICE 1

Soit F la fonction réelle définie par : $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ si $x \in]0,1[$, $F(0) = 0$ et $F(1) = \ln 2$.

1) Vérifier que F est bien définie sur $[0,1]$.

2) a. Pour tout x élément de $]0,1[$, vérifier que $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)} = \ln 2$.

   b. Montrer que, pour tout x de $]0,1[$: $x^2 \ln 2 \leq F(x) \leq x \ln 2$.

   c. En déduire que F est continue sur $[0,1]$.

3) a. Montrer que F est dérivable sur $]0,1[$ et calculer $F'(x)$ pour tout x de $]0,1[$.

   b. En déduire que F' est continue sur $[0,1]$.

4) On considère l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt$.

   Montrer que I est une intégrale convergente puis donner sa valeur.

EXERCICE 2

Toutes les matrices en jeu dans cet exercice sont considérées comme éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ où $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ désigne le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre deux à coefficients réels.
Une matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ est dite involutive si et seulement si $M^2 = I$.

Ecole de Hautes Etudes Commerciales du Nord. Association régie par la loi de 1901.
58, rue du Port 59046 LILLE Cedex. Tél. 20.15.45.00. Fax 20.15.45.01. SIRET 783 707 060 00027. APE 803 Z. CCP LILLE 247723J.
393, promenade des Anglais B.P. 116 06202 NICE CEDEX 3. Tél. 93.18.99.66. Fax 93.83.08.10. SIRET 783 707 060 00035. APE 803 Z.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1) a. Montrer que $M^2 = (a + d) M - (ad - bc) I$.

b. En déduire que M est inversible si et seulement si : $ad - bc \neq 0$.

c. Dans le cas où $ad - bc \neq 0$, écrire M^{-1} en fonction seulement de a, b, c et d.

2) a. Montrer que la matrice αI, α désignant un nombre réel, est involutive si et seulement si $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$.

b. On suppose, dans cette question que $M \neq I$ et $M \neq -I$.
Montrer que M est involutive si et seulement si $a + d = 0$ et $ad - bc = -1$.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Trouver un nombre réel α tel que $A = \alpha I + B$, B étant une matrice involutive.

b. Calculer, pour tout entier naturel n, A^n en fonction de I et B.

c. Montrer que A est inversible et vérifier que la formule trouvée en 3)b est encore valable pour $n = -1$.

EXERCICE 3

Dans cet exercice, x désigne un réel de $]\,0, \pi/2\,[$.

1) Soit la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = \cos x$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n \cos(\frac{x}{2^{n+1}}).$$

a. Montrer que la suite de terme général $v_n = u_n \sin\frac{x}{2^n}$ est géométrique.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de x et n.

c. Montrer enfin que (u_n) est convergente et donner sa limite.

2) On considère l'algorithme suivant :

```
Program schw ;
var x, a, b : real ;
    k, n : integer ;
Begin
Readln(x) ; Readln(n) ; a := 1 ; b := 1/cos(x) ;
For k := 1 to n do begin
                   a := (a + b)/2 ;
                   b := sqrt (a * b) ;
                   end ;
Writeln(a, b) ;
end .
```

a. Montrer que, lorsque x appartient à $]\,0, \pi/2\,[$, cet algorithme permet le calcul des $(n + 1)$ premiers termes de deux suites (a_n) et (b_n) dont les premiers termes sont respectivement $a_0 = 1$ et $b_0 = 1/\cos(x)$.

b. Vérifier que $b_1 = \dfrac{\cos(x/2)}{\cos(x)}$.

c. Écrire, pour $n \geq 1$, les relations de récurrence liant a_n, b_n, a_{n-1} et b_{n-1}.

d. Montrer que, pour tout entier naturel n : $a_n > 0$ et $b_n > 0$.

3) a. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n - a_n = \dfrac{\sqrt{a_n}}{2(\sqrt{b_{n-1}} + \sqrt{a_n})}(b_{n-1} - a_{n-1})$.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n < b_n$.

c. En déduire les variations des suites (a_n) et (b_n).

d. En utilisant le résultat obtenu à la question 3)a , montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{\cos(x)} - 1\right).$$

e. Montrer finalement que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et ont même limite ℓ.

4) a. Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a : $a_n = \dfrac{u_n \cos(\frac{x}{2^n})}{\cos^2(x)}$ et $b_n = \dfrac{u_n}{\cos^2(x)}$.

b. En déduire la valeur de ℓ.

PROBLÈME

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe d'origine O ; à chaque instant, il est soit en O (d'abscisse 0), soit en A (d'abscisse 1), soit en B (d'abscisse 2) soit en C (d'abscisse 3)
Les règles de ce "voyage" sont les suivantes :

- Le mobile est en O à l'instant 0.
- Le point O est "réfléchissant", c'est-à-dire que, si à l'instant n le mobile est en O, il est certain qu'à l'instant (n + 1) il sera en A.
- Si à l'instant n le mobile est en A , alors à l'instant (n + 1), il sera soit en O, soit en B et ceci de façon équiprobable.
- Si à l'instant n le mobile est en B , alors à l'instant (n + 1), il sera soit en A, soit en C et ceci de façon équiprobable.
- Le point C est "absorbant", c'est-à-dire que, si à l'instant n le mobile est en C, il est certain qu'à l'instant (n + 1) il sera encore en C.

Pour tout entier naturel n :

- On désigne par X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse de ce mobile à l'instant n.
- On appelle M la matrice réelle, carrée d'ordre 4, dont l'élément de la $(i+1)^{\text{ème}}$ ligne et de la $(j+1)^{\text{ème}}$ colonne est $P\left(X_{n+1} = i \,/\, X_n = j\right)$, pour tous i et j appartenant à $\{0, 1, 2, 3\}$.
- On pose $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

Partie I

1) a. Déterminer la matrice M.

b. Montrer que $U_{n+1} = M\,U_n$.

2) a. Vérifier que 0, 1, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont valeurs propres de M.

b. En déduire l'existence d'une matrice P inversible, qu'on choisira de telle manière que chacune de ses colonnes contienne un nombre maximum de "1", et vérifiant $M = PDP^{-1}$,

avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

c. Vérifier que $P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 2 & -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d. Montrer que $M^n = PD^nP^{-1}$ et expliciter la première colonne de M^n. (on distinguera les cas $n = 0$ et $n \geq 1$)

e. Préciser U_0 et en déduire, pour tout entier naturel n, la loi de X_n.

Partie II

1) On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de déplacements nécessaires au mobile pour atteindre C la première fois.

a. Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 3 :

$$(Y = j) = \left[\bigcap_{k=0}^{j-1}(X_k \neq 3)\right] \cap (X_j = 3)$$

b. Montrer que $(X_{j-1} \neq 3) \cap (X_j = 3) = (X_{j-1} = 2) \cap (X_j = 3)$.

c. En déduire, en comparant les événements $(X_{j-1} = 2)$ et $\left[\bigcap_{k=0}^{j-2}(X_k \neq 3)\right]$, que :

$(Y = j) = (X_{j-1} = 2) \cap (X_j = 3)$, puis donner la loi de Y.

d. Montrer que Y a une espérance et en déduire le nombre moyen de déplacements nécessaires au mobile pour atteindre C la première fois.

2) On désigne par Z la variable aléatoire égale au nombre de déplacements nécessaires au mobile pour atteindre B la première fois.

a. Pourquoi ne peut-on pas écrire, d'une manière analogue à celle utilisée dans la première question de cette partie, que : $(Z = j) = (X_{j-1} = 1) \cap (X_j = 2)$?

b. Exprimer, pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'événement $(Z = 2j)$ à l'aide d' événements liés aux variables $X_0, X_1, \ldots, X_{2j}$. En déduire $P(Z = 2j)$ pour tout j de $\mathbb{N}$.

c. Pour tout j de $\mathbb{N}$, calculer $P(Z = 2j + 1)$.

d. En déduire que Z a une espérance, puis déterminer le nombre moyen de déplacements nécessaires au mobile pour atteindre B la première fois.