edhec

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD
EDHEC GRADUATE SCHOOL OF MANAGEMENT

ÉCOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

Option Scientifique

Mardi 5 Mai 1998, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

EXERCICE 1

Question préliminaire :
La suite (x_n) est une suite de nombres réels positifs. Montrer que si la série de terme général x_n converge, alors la série de terme général x_n^2 converge aussi (on montrera qu'il existe un entier naturel N tel que : si $n \geq N$, alors $x_n^2 \leq x_n$).

On considère, d'une part, la fonction numérique, notée ch, définie par $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

et d'autre part la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\mathrm{ch}(u_n)} \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

1) Étudier la fonction ch et dresser son tableau de variations.
2) Donner le développement limité à l'ordre 2 de ch au voisinage de 0.
3) a. Montrer que la suite (u_n) est strictement positive et strictement décroissante.
   b. En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.
4) On pose, pour tout n élément de $\mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est strictement négative.
   b. Montrer que (v_n) est convergente de limite nulle.
   c. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k)$.
   En déduire que la série de terme général v_n est divergente.
5) a. Montrer que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{u_n^2}{2}$.
   b. En déduire que la série de terme général u_n^2 est divergente.
   c. En utilisant le préliminaire, conclure quant à la nature de la série de terme général u_n.

EXERCICE 2

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc "Pile" ou "Face" avec la probabilité 1/2.

On note P_k (resp F_k) l'événement : " on obtient Pile (resp Face) au $k^{\text{ème}}$ lancer ".

Pour ne pas surcharger l'écriture on écrira, par exemple, $P_1 F_2$ à la place de $P_1 \cap F_2$.

On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient, pour la première fois, "Pile" puis "Face" dans cet ordre aux lancers k−1 et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), X prenant la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.

On note Y la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient, pour la première fois, "Pile" suivi de "Pile" aux lancers k−1 et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), Y prenant la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.

L'objet de l'exercice est de calculer les espérances de X et Y et de vérifier que, "contre toute attente", $E(Y) > E(X)$.

1) Calculer $P(X = 2)$.

2) a. Soit k un entier supérieur ou égal à 3. Montrer que si le premier lancer est un "Pile", alors il faut et il suffit que $P_2 P_3 \dots P_{k-1} F_k$ se réalise pour que $(X = k)$ se réalise.

b. En déduire que :

$$\forall\, k \geq 3,\ P(X = k) = \frac{1}{2} P(X = k\text{-}1) + \frac{1}{2^k}.$$

c. On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $u_k = 2^k P(X = k)$.

Déterminer u_k, puis donner la loi de X.

3) Montrer que X a une espérance, notée E(X), et la calculer.

4) a. Montrer que (F_1, P_1P_2, P_1F_2) est un système complet d'événements.

b. En déduire que, pour pour tout entier k supérieur ou égal à 4 :

$$P(Y = k) = \frac{1}{2} P(Y = k-1) + \frac{1}{4} P(Y = k-2). \quad (*)$$

c. On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $v_k = P(Y = k)$.

Déterminer v_2 et v_3 puis montrer qu'en posant $v_0 = 1$ et $v_1 = 0$, on a,

pour tout entier k supérieur ou égal à 2 : $v_k = \dfrac{1}{2} v_{k-1} + \dfrac{1}{4} v_{k-2}$.

d. En déduire la suite $(v_k)_{k \geq 0}$ puis donner la loi de Y.

e. Montrer que Y a une espérance, notée E(Y), et la calculer.

EXERCICE 3

1) On dit que Z suit une loi exponentielle bilatérale si une densité de Z est f, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2} e^{-|x|}$.

a. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

b. Déterminer la fonction de répartition de Z.

c. Soient Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle bilatérale, déterminer une densité de $V = Z_1 + Z_2$.

2) Dans cette question, X et Y sont deux variables indépendantes suivant toutes les deux la loi exponentielle de paramètre 1 et on pose $Z = X - Y$.

a. Déterminer la fonction de répartition, puis une densité de $-Y$.
b. Déterminer une densité de Z et vérifier que Z suit la loi exponentielle bilatérale.
c. Déterminer l'espérance de Z.
d. On pose $T = |Z|$. Déterminer la fonction de répartition de T et vérifier que T suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

PROBLÈME

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n ; on rappelle que $\mathcal{B} = (1, X, \ldots X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Un polynôme est dit unitaire si le coefficient de son monôme de plus haut degré est égal à 1.
On note φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme $\varphi(P) = Q$ défini par : $Q = (X-1)P' - XP''$.

Partie I : étude de φ.

1) a. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
b. Pour tout j élément de $[\![0, n]\!]$, calculer $\varphi(X^j)$.
c. Écrire la matrice M de φ dans $\mathcal{B}$.
d. En déduire que φ est diagonalisable.

2) Pour tout k élément de $[\![0, n]\!]$, on désigne par L_k l'unique polynôme unitaire vérifiant $\varphi(L_k) = kL_k$ et on écrit $L_k = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$, avec $a_p = 1$.

a. Montrer que $p = k$, c'est-à-dire que L_k est de degré k.
b. Déterminer L_0.
c. Écrire, lorsque k est supérieur ou égal à 1, le système d'équations dont $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ sont solutions.
d. En déduire que : $\forall i \in [\![0, k]\!]$, $a_i = (-1)^{k-i}(k-i)!\left[C_k^i\right]^2$.

3) On note f_k la fonction réelle définie par $f_k(x) = x^k e^{-x}$.
Montrer que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $L_k(x) = (-1)^k e^x f_k^{(k)}(x)$.

Partie II : étude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1) P et Q étant des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\psi(P, Q) = (P / Q) = \int_0^{+\infty} e^{-x} P(x)Q(x)\,dx .$$

a. Montrer que, pour tout entier naturel k , l'intégrale $I_k = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$ converge.

b. Vérifier que l'intégrale définissant (P / Q) est convergente.

c. Montrer que ψ est un produit scalaire défini sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Soit k un entier naturel non nul. Les fonctions f et g étant de classe C^k sur l'intervalle [a, b] de $\mathbb{R}$, montrer la formule d'intégration par parties d'ordre k :

$$\int_a^b f(t)g^{(k)}(t)\,dt = \left[\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j f^{(j)}(t)\, g^{(k-j-1)}(t)\right]_a^b + (-1)^k \int_a^b f^{(k)}(t)g(t)\,dt .$$

3) Montrer que : $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$, $f_k^{(i)}(0) = 0$. (f_k étant la fonction définie à la question I3)

4) Soient i et k deux entiers naturels.

a. Montrer que:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x L_i(t)\, f_k^{(k)}(t)\,dt = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j L_i^{(j)}(x)\, f_k^{(k-j-1)}(x) + (-1)^k \int_0^x L_i^{(k)}(t)\, f_k(t)\,dt .$$

b. En déduire que $\int_0^{+\infty} L_i(t) L_k(t) e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} L_i^{(k)}(t) f_k(t)\,dt$

c. Montrer que, pour le produit scalaire ψ, la famille $(L_0, L_1, ..., L_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

d. Montrer que $I_{k+1} = (k + 1) I_k$, puis donner la valeur de I_k.
En déduire la norme de L_k, notée $\| L_k \|$, puis donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie III : étude des racines de L_n.

On rappelle que n est un entier supérieur ou égal à 1.

On pose $R(x) = \prod_{j=1}^{p}(x - x_j)$, où $x_1, x_2, ..., x_p$ sont les racines positives, distinctes, d'ordre impair de L_n. On convient que $R(x) = 1$ si L_n n'a pas de racine d'ordre impair dans $\mathbb{R}^+$.

1) Montrer que RL_n est positif sur $\mathbb{R}^+$.

2) On suppose dans cette question que $p < n$.

a. En remarquant que R est élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, montrer que $(R / L_n) = 0$.

b. En déduire que RL_n est le polynôme nul.

3) a. En notant la contradiction obtenue en 2b), conclure que $p = n$.

b. En déduire que L_n a n racines réelles distinctes et toutes positives.