ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Vendredi 7 mai 1999, de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction g_n par : $\forall x \in [n, +\infty[$, $g_n(x) = \int_n^x e^{t^2}\,dt$.

1) Étude de g_n.
   a. Montrer que g_n est dérivable sur son domaine et donner son sens de variation.
   b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x)$.
   c. En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté x_n, élément de $[n, +\infty[$, tel que $g_n(x_n) = 1$.

2) Étude de la suite (x_n).
   a. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.
   b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-x_n^2} \leq x_n - n \leq e^{-n^2}$.

3) On pose $u_n = x_n - n$
   a. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
   b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} n\,u_n$.
   c. Déduire de l'encadrement obtenu en 2b) que $x_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-n^2}$.

Exercice 2

Une urne contient une boule noire et $(n-1)$ boules blanches, n désignant un entier supérieur ou égal à 2. On vide l'urne en effectuant des tirages d'une boule de la manière suivante : le premier tirage s'effectue sans remise, le deuxième s'effectue avec remise, le troisième s'effectue sans remise, le quatrième s'effectue avec remise... D'une manière générale, les tirages d'ordre impair s'effectuent sans remise et les tirages d'ordre pair s'effectuent avec remise de la boule tirée.

1) a. Quel est le nombre total N de tirages effectués lors de cette épreuve ?

b. Pour j élément de $[\![1, n-1]\!]$, combien reste-t-il de boules avant le $(2j)^{\text{ème}}$ tirage ? Combien en reste-t-il avant le $(2j+1)^{\text{ème}}$ tirage ?

On désigne par X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule noire est obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage (que ce soit la première fois ou non) et 0 sinon. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions de la boule noire lors de cette épreuve.

2) a. Calculer $P(X_1 = 1)$, $P(X_2 = 1)$.

b. Pour tout entier naturel j de $[\![1, n-1]\!]$, calculer $P(X_{2j+1} = 1)$ et $P(X_{2j} = 1)$.

c. En déduire la loi suivie par toutes les variables X_k.

3) Pour tout j élément de $[\![1, n]\!]$, on note U_j l'événement :
"On obtient la boule noire pour la $1^{\text{ère}}$ fois au $(2j-1)^{\text{ème}}$ tirage".

a. En considérant l'état de l'urne avant le $(2n-2)^{\text{ème}}$ tirage, montrer que $P(U_n) = 0$.

Montrer que : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $P(U_j) = \dfrac{n-j}{n(n-1)}$.

b. Exprimer l'événement $(X = 1)$ en fonction des U_j, puis en déduire la valeur de $P(X = 1)$.

c. Montrer que $P(X = n) = \dfrac{1}{n!}$.

4) Montrer que $X = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} X_k$, puis en déduire l'espérance de X.

5) Soit i un entier naturel compris entre 0 et $n-2$.

a. Pour tout j de $[\![1, 2n-2i-2]\!]$, donner la valeur de $P(X_{2i+j+1} = 1 / X_{2i+1} = 1)$.

b. En déduire que : $\forall j \in [\![1, 2n-2i-2]\!]$, $\operatorname{cov}(X_{2i+1}, X_{2i+j+1}) = \dfrac{-1}{n^2}$.

6) Soit i un entier naturel compris entre 1 et $n-1$.

a. Montrer que, pour tout k de $[\![1, n-i-1]\!]$, $P(X_{2i+2k} = 1 / X_{2i} = 1) = \dfrac{1}{n-i}$.

b. Montrer que, pour tout k de $[\![0, n-i-1]\!]$, $P(X_{2i+2k+1} = 1 / X_{2i} = 1) = \dfrac{1}{n-i}$.

c. En déduire que : $\forall j \in [\![1, 2n-2i-1]\!]$, $\operatorname{cov}(X_{2i}, X_{2i+j}) = \dfrac{i}{n^2(n-i)}$.

7) Montrer que la variance de X est : $V(X) = \dfrac{(2n+1)(n-1)}{n^2} - \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\dfrac{1}{j}$.

Exercice 3

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^2$ et θ l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{B} = (i, j)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Le but de cet exercice est de trouver les couples (u, v) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les 4 assertions suivantes :
(A_1) : $u^2 = -Id$ (il faut comprendre $u \circ u = -Id$).
(A_2) : $v \neq Id$.
(A_3) : $(v - Id)^2 = \theta$.
(A_4) : $Ker(u + v - Id) \neq \{0\}$.

1) Étude d'un exemple.
Vérifier que les endomorphismes u et v dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont respectivement $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont solutions du problème posé.

On revient au cas général et on considère un couple (u, v) solution du problème.
2) a. Montrer que u et v sont des automorphismes de $\mathbb{R}^2$, puis donner u^{-1} et v^{-1} en fonction de u, v et Id.
b. Pour tout entier naturel n, exprimer v^n comme combinaison linéaire de v et Id.
3) a. Établir que : $Im(v - Id) \subset Ker(v - Id)$.
b. En déduire, en raisonnant sur les dimensions, que : $Im(v - Id) = Ker(v - Id)$.
4) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que : $dim\, Ker(u + v - Id) = 1$.
5) Soit (e_2) une base de $Ker(u + v - Id)$, on pose : $e_1 = -u(e_2)$.
a. Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
b. Donner les matrices de u et v dans cette base.
6) Donner la conclusion de cet exercice.

Problème

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions réelles $f_0, f_1, ..., f_n$ définies par :
$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_0(x) = e^{-x}$ et $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_k(x) = x^k e^{-x}$.
On appelle E_n l'espace vectoriel engendré par la famille $(f_0, f_1, ..., f_n)$.
On note d l'application qui à toute fonction de E_n associe sa fonction dérivée.

Partie 1

1) Montrer que la famille $(f_0, f_1, ..., f_n)$ est une base de E_n.
2) a. Calculer $d(f_0)$, puis montrer que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $d(f_k) = k f_{k-1} - f_k$.
b. Montrer que d est un endomorphisme de E_n.

3) a. Vérifier que d est un automorphisme de E_n.

b. Justifier que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $d(\frac{1}{k!} f_k) = \frac{1}{(k-1)!} f_{k-1} - \frac{1}{k!} f_k$.

c. En déduire, pour tout j de $[\![0, n]\!]$, l'expression de $d^{-1}(f_j)$ dans la base $(f_0, f_1, ..., f_n)$.

4) Utiliser la question précédente pour montrer que, pour tout entier naturel j, l'intégrale $I_j = \int_0^{+\infty} x^j e^{-x}\, dx$ converge, puis donner sa valeur en fonction de j.

5) Montrer que l'application qui à tout couple (f, g) de E_n associe :

$(f / g) = \int_0^{+\infty} f(x)\, g(x)\ e^x dx$ est un produit scalaire sur E_n.

Pour tout f de E_n, on note désormais $\|f\|$ la norme de f.

Partie 2

1) On pose $E_{n-1} = \text{vect}\,(f_0, f_1, ..., f_{n-1})$.

a. Rappeler le théorème qui assure l'existence d'un unique élément h de E_{n-1} vérifiant :

$\|f_n - h\| = \underset{g \in E_{n-1}}{Inf} \|f_n - g\|$.

On pose désormais $h = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j f_j$.

b. Pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, rappeler pourquoi $f_n - h \perp f_k$.

c. En déduire que pour tout k élément de $[\![0, n-1]\!]$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j\,(j+k)!\ +\ (k+n)! = 0.$$

2) On considère la fonction P définie pour tout x réel par :

$$P(x) = a_0\ +\ \sum_{j=1}^{n-1} a_j\,(x+1)\ldots(x+j)\ +\ (x+1)\,(x+2)\ldots(x+n).$$

a. Vérifier que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $P(k) = 0$.

b. En déduire explicitement P, puis vérifier que $P(n) = n!$.

3) a. Montrer que $\|f_n - h\|^2 = (f_n - h / f_n)$.

b. En déduire la valeur de $m = \underset{(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}) \in IR^n}{Inf} \int_0^{+\infty} (x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k)^2\ e^{-x}\ dx$.