BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

297

EDHECMATS

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Lundi 4 mai 2009 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

• On admet que si une suite $(T_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires converge en probabilité, alors la limite de cette suite est une variable aléatoire presque sûrement unique.

Plus précisément, si l'on a $T_n \xrightarrow{P} T$ et $T_n \xrightarrow{P} T'$, alors $P(T = T') = 1$.

• On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires converge en moyenne vers une variable aléatoire U si et seulement si : pour tout entier naturel n, la variable aléatoire $|U_n - U|$ possède une espérance et $\lim\limits_{n\to+\infty} E(|U_n - U|) = 0$.

• On rappelle l'inégalité de Markov, valable pour une variable V à valeurs positives et possédant une espérance mathématique :

$$\forall \varepsilon > 0, P(V > \varepsilon) \leq \frac{E(V)}{\varepsilon}.$$

1) Dans cette question, on considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire X, elle aussi définie sur cet espace probabilisé.
Montrer que, si la suite (X_n) converge en moyenne vers X, alors elle converge en probabilité vers X.

On se propose, dans la suite, d'étudier un exemple montrant que la réciproque de cette propriété est fausse.

Pour ce faire, on considère une suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre λ (avec $\lambda > 1$).

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $Y_n = \prod_{k=1}^{n} Z_k$.

2) a) Pour tout entier naturel n non nul, déterminer $P(Y_n \neq 0)$.

b) Soit ε un réel strictement positif. Comparer les événements $(Y_n > \varepsilon)$ et $(Y_n \neq 0)$.

c) En déduire que la suite (Y_n) converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.

3) a) Montrer que, si la suite (Y_n) convergeait en moyenne vers une variable aléatoire Y, alors on aurait $P(Y = 0) = 1$.

b) Calculer l'espérance de Y_n.

c) Établir que $E(|Y_n - Y|) \geq E(Y_n) - E(Y)$, puis déterminer $\lim_{n\to+\infty} E(|Y_n - Y|)$.

4) Conclure.

Exercice 2

On désigne par α un entier strictement supérieur à 1 et on pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}.$$

Dans la suite de l'exercice, on écrira u_n au lieu de $u_n(\alpha)$.

1) a) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le réel u_n est bien défini et que $u_n > 0$.

b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ et en conclure qu'elle converge.

2) a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n\alpha(u_n - u_{n+1})$.

b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \frac{1}{k\alpha})$.

3) Montrer, en considérant $\ln(u_n)$, que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n\alpha}{\alpha - 1} u_{n+1}$.

b) En déduire que : $\forall n \geq 2$, $\ln(S_n) = \ln(u_1) + \sum_{k=2}^{n} \left[\ln(1 - \frac{1}{k\alpha}) - \ln(1 - \frac{1}{k}) \right]$.

c) À l'aide d'un développement limité d'ordre 1 en $\frac{1}{k}$, donner un équivalent, lorsque k est au voisinage de $+\infty$, de $\ln(1 - \frac{1}{k\alpha}) - \ln(1 - \frac{1}{k})$.

d) Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n.

5) Dans cette question, on suppose que $\alpha = 2$.

Compléter la déclaration de fonction récursive, ci-dessous écrite en Pascal, afin qu'elle retourne la valeur de u_n :

```
Function u(n : integer) : real ;
Begin
If (n = 1)   then  u : = ------
             else  u : = ------ ;
end ;
```

Exercice 3

On note E l'espace vectoriel constitué des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $2n+1$.

Pour tout k de $\{0, 1, \ldots, 2n+1\}$, on admet que l'expression $X^{2n+1}\times\dfrac{1}{X^k}$ désigne le polynôme X^{2n+1-k}.

On désigne par Id l'endomorphisme identique de E et on note f l'application qui à toute fonction P de E associe la fonction $f(P)$ définie par : $f(P) = X^{2n+1}P(\dfrac{1}{X})$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de E.

2) a) Vérifier que $f \circ f = Id$.
   b) En déduire les deux valeurs propres possibles de f.

3) Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$ un polynôme quelconque de $\mathrm{Ker}(f-Id)$.
   a) Montrer que les a_k $(0 \leq k \leq 2n+1)$ sont solutions du système : $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $a_k = a_{2n+1-k}$.
   b) En déduire une base de $\mathrm{Ker}(f-Id)$.

4) Déterminer de la même façon une base de $\mathrm{Ker}(f+Id)$.

5) On considère l'application φ de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout couple (P,Q) de polynômes de E associe le réel $\varphi(P,Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k b_k$, où l'on a noté $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} b_k X^k$.
   a) Montrer que φ est un produit scalaire défini sur E.
   b) Établir alors que f est un endomorphisme symétrique
   c) En déduire que $\mathrm{Ker}(f+Id)$ et $\mathrm{Ker}(f-Id)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Problème

Partie 1 : préliminaire

Dans cette partie, x désigne un réel élément de $[0,1[$.

1) a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0,x]$, simplifier la somme $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

   b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$.

   c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0$.

   d) Établir alors que la série de terme général $\dfrac{x^p}{p}$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$.

2) a) Après avoir vérifié que, pour tout entier naturel n non nul, on a $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, montrer que la série de terme général $\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ est convergente.

   b) Utiliser la première question pour établir que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\ln(1-x)$.

Partie 2

On considère une variable aléatoire X de densité f, nulle sur $]-\infty, 0[$, continue sur $[0, +\infty[$ et strictement positive sur $[0,+\infty[$. On note alors F la fonction de répartition de X.

1) Justifier que, pour tout réel x, on a : $1-F(x) > 0$.
On définit alors la fonction g par :

$$g(x) = \begin{cases} -f(x)\ln(1-F(x)) \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}.$$

2) Montrer que g peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire Y.
3) Étude d'un cas particulier.
  a) Montrer qu'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle vérifie les conditions imposées dans cette partie.
  b) On suppose ici que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Reconnaître alors la loi de Y puis donner son espérance et sa variance.

Partie 3

Dans cette partie, on considère une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, ayant toutes la même loi que X (c'est-à-dire de densité f, nulle sur $]-\infty, 0[$, continue sur $[0, +\infty[$, strictement positive sur $[0, +\infty[$, et de fonction de répartition notée F).

On se propose, à partir de cette suite, de construire une variable aléatoire Z ayant comme densité la fonction g, nulle sur $]-\infty, 0[$, et définie pour tout réel x positif par : $g(x) = -f(x)\ln(1-F(x))$.

Pour ce faire, on considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de nombre réels positifs, définie par $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

On considère dès lors une variable aléatoire N, définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante des variables X_i, et dont la loi est donnée par : $\forall n\in\mathbb{N}^*, P(N = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

On pose alors $Z = \text{Sup}(X_0, X_1, \ldots, X_N)$, ce qui signifie que :
$\forall \omega \in\Omega, Z(\omega) = \text{Max}(X_0(\omega), X_1(\omega), \ldots, X_{N(\omega)}(\omega))$.

2) a) Montrer que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et que sa fonction de répartition F_Z est donnée par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F_Z(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(F(x))^{n+1}}{n(n+1)}.$$

  b) Utiliser le préliminaire pour en déduire, à l'aide de la fonction F, une expression explicite de F_Z sur $[0, +\infty[$.
  c) Vérifier que Z est une variable aléatoire à densité et qu'elle admet bien la fonction g comme fonction densité.