Nom :

Mathématiques approfondies
Cours ECG 2

Partie VIII

Thèmes de révision

Analyse

Algèbre

Probabilités

Python

Lycée Saint Louis 2022/2023

Analyse

Révisé ?

- **$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ et sommes**

— Coefficient binomiaux (définition, formule explicite, formule du triangle de Pascal). ☐☐☐ √
— Formule du binôme de Newton $(a+b)^n = ...$, factorisation de $a^n - b^n = ...$ ☐☐☐ √
— Somme géométrique. ☐☐☐ √
— Définition d'un maximum (minimum), de la borne supérieure (inférieure). ☐☐☐ √
— Théorème de la borne supérieure. ☐☐☐ √

- **Application**

— Définitions de : Injectivité, surjectivité, bijectivité. ☐☐☐ √
— Composition d'applications injectives/surjectives/bijectives. ☐☐☐ √

- **Polynôme**

— Racine. Nombre de racines d'un polynôme de degré n. ☐☐☐ √
— Diviseur. Division euclidienne. ☐☐☐ √
— Définition d'une racine et caractérisations. Multiplicité d'une racine. ☐☐☐ √
— Factorisation dans le cas réel d'un polynôme. ☐☐☐ √

- **Calcul matriciel**

— Formule du produit matriciel. Transposée. Trace. ☐☐☐ √
— Matrices symétriques/antisymétriques. ☐☐☐ √
— Système linéaire, pivot de Gauss. ☐☐☐ √
— Déterminant d'une matrice de taille 2. ☐☐☐ √

- **Suites et séries**

— Théorème de limite monotone. ☐☐☐ √
— Suites adjacentes. ☐☐☐ √
— Comment obtenir l'expression explicite d'une suite arithmético-géométrique (exemple $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 3u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 ? ☐☐☐ √
— Règles de calculs sur les limites. Croissances comparées. ☐☐☐ √
— Théorème d'encadrement. ☐☐☐ √
— Petit "o", équivalent. Exemples usuels. ☐☐☐ √
— Séries de référence : séries géométriques, série exponentielle, série de Riemann. ☐☐☐ √
— Critères de convergence pour les séries à termes positifs. ☐☐☐ √

- **Limite et continuité**

— Définition de la continuité en un point a, sur un intervalle I. ☐☐☐ √
— Théorème des valeurs intermédiaires. Théorème de la bijection. ☐☐☐ √
— Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ et f est continue en a, $f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$. ☐☐☐ √
— Existence d'un maximum et minimum sur une fonction continue sur un segment. ☐☐☐ √

- **Dérivation d'une fonction d'une variable**

— Définition du nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement. Interprétation avec la tangente. ☐☐☐ √
— Développement limité d'ordre 1 : $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o_a(x-a)$. ☐☐☐ √
— Formules de dérivation d'une composée, d'une réciproque ☐☐☐ √
— Théorème de Rolle. Égalité et inégalité des accroissements finis. ☐☐☐ √
— Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$. ☐☐☐ √
— Dérivées successives. Formule de Leibniz. ☐☐☐ √

- **Intégration sur un segment**

— Définition de l'intégrale avec l'aire. Croissance de l'intégrale lorsque les bornes sont dans le bon sens. ☐☐☐ √
— Approximation d'intégrales par les sommes de Riemann. ☐☐☐ √

— Connaître les primitives usuelles. ☐☐☐ √
— Changement de variable. ☐☐☐ √
— Intégration par parties. ☐☐☐ √
— Simplification d'une intégrale d'une fonction paire (ou impaire) sur un intervalle symétrique centrée en 0. ☐☐☐ √
— Si f est continue, positive et d'intégrale sur $[a;b]$ alors f est nulle sur $[a;b]$. ☐☐☐ √

- **Intégration sur un intervalle quelconque**

— Définitions et règles de calculs. ☐☐☐ √
— Critère de convergence (par majoration, négligeabilité et équivalent). ☐☐☐ √
— Intégrales de Riemann. ☐☐☐ √
— Intégrales issues des lois à densité (exemple, fonction Γ). ☐☐☐ √

- **Fonctions de plusieurs variables**

— Définition d'un ouvert/fermé. Exemples. Cas des ensembles $\{x \,\|\, \varphi(x) < r\}$.
— Boules ouvertes, fermées. Définition d'un ensemble borné. ☐☐☐ √
— Graphe et lignes de niveau d'une fonction de plusieurs variables. ☐☐☐ √
— Définition d'un extrema (local/global). ☐☐☐ √
— Définition de la continuité d'une fonction de plusieurs variables. ☐☐☐ √
— Somme, produit, quotient, composition et continuité. ☐☐☐ √
— Définition de la dérivée partielle d'ordre k en a. ☐☐☐ √
— Définition du gradient. Donner le gradient de $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|^2$. ☐☐☐ √
— Savoir prouver qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$. ☐☐☐ √
Exemple : $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to x \ln\left(1 + x^2 + y^2\right)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
— Développement limité d'ordre 1. ☐☐☐ √
— Interprétation géométrique : plan tangent, le gradient donne la direction de plus grande pente, le gradient est orthogonal aux lignes de niveau. ☐☐☐ √
— Dérivées directionnelles $g_{a,u}$. ☐☐☐ √
— Point critique. Et lien avec les extrema lorsque f est définie sur un ouvert $\mathscr{O}$. ☐☐☐ √
— Existence d'un minimum et maximum d'une fonction continue sur un fermé bornée. ☐☐☐ √

- **Compléments sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$**

— Définition d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Définition de la matrice hessienne. ☐☐☐ √
— Théorème de Schwarz. ☐☐☐ √
— Forme quadratique associée à une hessienne. Développement limité à l'ordre 2. ☐☐☐ √
— Condition suffisante d'ordre 2 pour un minimum local en a. ☐☐☐ √
— Définition d'une partie convexe. ☐☐☐ √
— Condition de convexité (du type pour tout x, $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x)) \subset \mathbb{R}^+$) pour qu'un point critique donne un extremum global. ☐☐☐ √

- **Optimisations sous contraintes linéaires**

— Définition d'une contrainte linéaire $\mathscr{C}$. ☐☐☐ √
— Définition d'un extremum local/global sous une contrainte linéaire $\mathscr{C}$. ☐☐☐ √
— Point critique sous la contrainte $\mathscr{C}$ en un point a. Lien avec l'extremum sous contrainte. ☐☐☐ √
—

Algèbre

- **Algèbre linéaire, 1ère année**

— Définition du noyau et de l'image. Lien avec l'injectivité et la surjectivité. ☐☐☐ √
— Définition et propriétés des projecteurs (noyau, image, $p \circ p$..) ☐☐☐ √
— Définition du rang, formule du rang. ☐☐☐ √
— Lien entre le rang et l'injectivité/surjectivité/bijectivité. Cas des endomorphismes. ☐☐☐ √
— Matrice d'une famille, de passage et d'une application linéaire. ☐☐☐ √
— Composition application et produit matriciel : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G,\mathscr{B}_E}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G,\mathscr{B}_F}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(f)$. ☐☐☐ √

— Bijectivité et inversibilité : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,B_F}\left(f^{-1}\right) = ..$ ☐☐☐ √
— En dimension finie, isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Conséquence $\dim \mathscr{L}(E,F) = ...$ ☐☐☐ √
— Polynôme d'endomorphisme et de matrice. ☐☐☐ √

• **Rappels et compléments sur l'algèbre linéaire**
— Définitions et caractérisations des supplémentaires. ☐☐☐ √
— Formule de Grassmann. ☐☐☐ √
— Somme directe de 2 puis n sous-espaces vectoriels. Lien avec les concaténations de base. ☐☐☐ √
— En dimension finie, une somme $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe ssi $\sum_{i=1}^{n} \dim(F_i) = \dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right)$. ☐☐☐ √
— Formule de changement de bases. Définition des matrices de passage. ☐☐☐ √
— Matrices semblables. Invariance du rang par similitude. ☐☐☐ √
— Trace d'une matrice et propriété de la trace. ☐☐☐ √
— Définition d'un espace stable. ☐☐☐ √

• **Diagonalisation**
— Définitions d'un vecteur propre pour une matrice, un endomorphisme. ☐☐☐ √
— $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ ssi $A - \lambda I_n$ non inversible ssi $\ker(A - \lambda I_n)$ ssi $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$. ☐☐☐ √
— Définition d'un espace propre. Les espaces propres associés à des valeurs propres
différentes sont en somme directe. ☐☐☐ √
— Lien entre polynôme annulateur et spectre. ☐☐☐ √
— Cas particulier : spectre d'une matrice de taille 2. ☐☐☐ √
— Cas particulier : spectre d'une matrice triangulaire. ☐☐☐ √
— Définition d'une matrice, d'un endomorphisme diagonalisable. ☐☐☐ √
— Un endomorphisme est diagonalisable ssi $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) = \dim(E)$. ☐☐☐ √
— Cas particulier d'un endomorphisme avec $\dim E$ valeurs propres. ☐☐☐ √
— Savoir calculer le spectre par un calcul du rang par pivot de Gauss. ☐☐☐ √
— Savoir calculer une base de vecteurs propres de $E_\lambda(A)$ par un pivot de Gauss. ☐☐☐ √
— Savoir diagonaliser la matrice Atilla $J = (1)_{i,j}$. ☐☐☐ √
— Spectre, vecteurs propres et diagonalisabilité des projecteurs. ☐☐☐ √

• **Algèbre bilinéaire**
— Définition d'un produit scalaire de la norme. ☐☐☐ √
— Savoir montrer que $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \mathrm{Tr}({}^t AB)$, $(f,g) \in \mathscr{C}^0([a;b])^2 \mapsto \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, ☐☐☐ √
$(P,Q) \in \mathbb{R}[x]^2 \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$, $(P,Q) \in \mathbb{R}[x]_n^2 \mapsto \sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i)$ sont des produits scalaires.
— Propriétés de la norme, inégalité triangulaire. ☐☐☐ √
— Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. ☐☐☐ √
— Théorème de Pythagore. Preuve. ☐☐☐ √
— Vecteurs orthogonaux. Espace orthogonaux. Famille orthogonale. Lien avec la liberté. ☐☐☐ √
— Définition du sous-espace orthogonal à sous-espace vectoriel. ☐☐☐ √
— Espace euclidiens. Exemples. ☐☐☐ √
— Définition d'une base orthonormée. Expression des coordonnées d'un vecteur dans un b.o.n. ☐☐☐ √
— Expression du produit scalaire et de la norme sous la forme $\langle u,v\rangle = {}^t UV$ et $\|u\|^2 = {}^t UU$. ☐☐☐ √
— Définition d'une matrice orthogonale. ☐☐☐ √
— Lien entre le changement de bases orthonormées et matrices orthogonales. ☐☐☐ √
— Lien entre $\dim F^\perp$ et $\dim F$ où F est un sev. ☐☐☐ √

• **Endomorphismes symétriques**
— Définition d'une matrice symétrique, antisymétrique. Dimension des s.e.v associés. ☐☐☐ √
— Définition des endomorphismes symétriques. ☐☐☐ √
— En dimension finie. φ est symétrique ssi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\left\langle \varphi\left(e_i\right), e_j\right\rangle = \left\langle e_i, \varphi\left(e_j\right)\right\rangle$. ☐☐☐ √
— En dimension finie. φ est symétrique ssi $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ dans une b.o.n est symétrique. ☐☐☐ √
— Si φ est symétrique, les sous-espaces propres sont orthogonaux. Preuve. ☐☐☐ √

— Théorème spectral (version endomorphisme et matriciel). ☐☐☐ √
— Forme quadratique associée à une matrice symétrique. ☐☐☐ √
— Encadrement de Rayleigh et signe d'une forme quadratique en fonction du spectre. ☐☐☐ √

- **Projecteurs orthogonaux**

— Définition d'un projecteur orthogonal. ☐☐☐ √
— Le projecteur est orthogonal ssi le projecteur est symétrique. traduction matricielle. ☐☐☐ √
— Expression du projeté. Cas d'un projeté sur une droite ou sur un hyperplan. ☐☐☐ √
— Distance à un sev. Théorème de minimisation par le projecteur orthogonal. ☐☐☐ √

Probabilités

- **Généralités sur les probabilités**

— Définition d'une probabilité (comme une application de ...) ☐☐☐ √
— Formule du crible $\mathbf{P}(A \cup B) = \ldots$ ☐☐☐ √
— Définition de l'indépendance entre événements. ☐☐☐ √
— Probabilité conditionnelle. Formule des probabilités composées. ☐☐☐ √
— Définition d'un système complet d'événements. ☐☐☐ √
— Formule des probabilités totales. ☐☐☐ √
— Formule de Bayes. ☐☐☐ √
— Théorème de la limite monotone. ☐☐☐ √

- **Variables aléatoires**

— Définition d'une variable aléatoire et de la fonction de répartition. ☐☐☐ √
— Propriété de la fonction de répartition. Caractérisation de la loi. ☐☐☐ √
— Définition d'une variable aléatoire discrète. Indépendance. ☐☐☐ √

- **Lois usuelles**

— Les discrètes finies. Bernoulli, binomiale, uniforme discrète. ☐☐☐ √
— Les discrètes infinies dénombrables. Géométrique, Poisson. ☐☐☐ √
— Les continues. Uniforme continue, exponentielle, normale, gamma. ☐☐☐ √

- **Espérance et variance**

— Définition des moments et de la variance. ☐☐☐ √
— Croissance de l'espérance et linéarité. ☐☐☐ √
— Espérance et variance des lois usuelles. ☐☐☐ √
— Existence par le théorème de domination. ☐☐☐ √
— Montrer que si X admet un moment d'ordre r, alors X admet un moment d'ordre $s \leqslant r$. ☐☐☐ √
— Formule de transfert (version discrète et continue). ☐☐☐ √
— Formule de Koenig-Huygens. ☐☐☐ √

- **Espérance conditionnelle**

— Définition. ☐☐☐ √
— Formule de l'espérance totale. ☐☐☐ √

- **Variable à densité**

— Définition d'une variable à densité avec la fonction de répartition. ☐☐☐ √
— Caractérisation d'une densité. Lien entre densité et fonction de répartition. ☐☐☐ √
— Méthode d'inversion et simulation. Exemple si $U \hookrightarrow \mathscr{U}(]0;1[)$, $-\ln(1-U) \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$. ☐☐☐ √
— Règles de transformation affine. Si X de densité f_X, donner une densité de $aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. ☐☐☐ √

- **Vecteurs aléatoires**

— Loi d'un couple de variables discrètes. Lois marginales de variables discrètes. ☐☐☐ √
— Généralisation : Loi d'un vecteur aléatoire avec la fonction de répartition, loi marginale. ☐☐☐ √

— Théorème de l'égalité en loi. Si g continue, $(X_i)_i$, $(Y_i)_i$ même loi alors $g(X_i)_i$, $g(Y_i)_i$ ont même loi. □□□ √
— Définition de l'indépendance de n v.a, d'une suite de v.a avec la fonction de répartition. □□□ √
— Traduction de l'indépendance dans le cas discret. □□□ √
— Lemme des coalitions. □□□ √
— Formule de transfert pour un couple de variables aléatoires discrètes. □□□ √
— Loi d'une somme de lois binomiales indépendantes. □□□ √
— Loi d'une somme de lois de Poisson indépendantes. □□□ √
— Espérance d'un produit dans le cas d'indépendance. □□□ √
— Variance d'une somme de variables indépendantes. □□□ √
— Définition de la covariance. Formule de Huygens. □□□ √
— Propriété de la covariance. Forme bilinéaire, symétrique positive (mais non définie). □□□ √
— Si 2 variables sont indépendantes alors la covariance est nulle. Preuve. □□□ √
— $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + 2\operatorname{cov}(X,Y) + \mathbf{V}(Y)$. Généralisation à n v.a. □□□ √
— Inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas de la covariance. □□□ √
— Coefficient de corrélation. Définition et propriété. □□□ √

- **Compléments sur les variables à densité**

— Loi d'un maximum et minimum de variables indépendantes (calcul des densités et fonctions de répartition). □□□ √
— Théorème de sommation pour des v.a. à densité indépendantes (avec le produit de convolution). □□□ √
— Sommes de loi gamma indépendantes. □□□ √
— Sommes de loi normale indépendantes. □□□ √

- **Convergences et approximations**

— Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev. □□□ √
— Définition de la convergence en probabilité. □□□ √
— Convergence en probabilité d'une somme. □□□ √
— Convergence en probabilité et composition par une fonction continue. □□□ √
— Loi faible des grands nombres. Preuve. □□□ √
— Définition de la convergence en loi. □□□ √
— Cas de la convergence en loi pour des variables aléatoires discrètes. □□□ √
— Convergence en loi et composition par une fonction continue. □□□ √
— Convergence en loi de lois binomiales vers une loi de Poisson. □□□ √
— Énoncé du théorème limite central. □□□ √
— Cas particulier des lois binomiales (théorème de Moivre-Laplace). □□□ √
— Cas particulier des lois de Poisson. □□□ √

- **Estimations**

— Définitions d'un échantillon et d'un estimateur. □□□ √
— Définition du biais d'un estimateur. □□□ √
— Définition d'un estimateur convergent. □□□ √
— Exemple de d'estimateur de la moyenne empirique $\overline{X_n}$ (convergent, loi faible, sans biais). □□□ √
— Composition par une fonction continue d'un estimateur convergent. □□□ √
— Condition suffisante de convergence d'un estimateur (asymptotiquement sans biais et $\mathbf{V}(T_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$). □□□ √
— Définition d'un intervalle de confiance. □□□ √
— Construction d'un intervalle de confiance par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. □□□ √
— Intervalle de confiance asymptotique. Exemple avec le TCL. □□□ √

- **Statistiques**

— Définition d'une moyenne, variance et covariance empiriques. □□□ √

Thème : Révisions de première année Analyse

Exercice 1. ✧ Donner les développements limités à l'ordre 2 et $n \in \mathbb{N}$ de :

$$(1+x)^{\alpha} = \qquad , \frac{1}{1-x} = \qquad , \mathrm{e}^{x} = \qquad , \ln(1+x) = \qquad , \cos(x) = \qquad , \sin(x) = \qquad .$$

Exercice 2. ✧ **Constante γ d'Euler**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad u_n = \mathrm{H}_n - \ln n.$$

1. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose $v_n = u_n - u_{n-1}$.
   Déterminer un équivalent de v_n. En déduire la nature de la série de terme général v_n.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
3. En déduire l'existence de $\gamma \in \mathbb{R}^+$ tel que $\mathrm{H}_n = \gamma + \ln(n) + o(1)$.

≫ *Pour aller plus loin, EMLyon 2002 pour une expression intégrale de γ.* ✦

Exercice 3. ✦ Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ avec $a<b$ et ne s'annulant pas sur $[a,b]$. En appliquant l'égalité des accroissements finis à une fonction convenablement choisie, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que
$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left((b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}\right).$$

Exercice 4. ✦ **Nature d'une série de maximums** *D'après EMLyon 2011, partie IV*

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application
$$g_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n admet un maximum, noté M_n, et calculer M_n. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\mu_n = \sqrt{n}\mathrm{M}_n \quad \text{et} \quad a_n = \ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n.$$
2. Former le développement limité de a_n, à l'ordre 2 lorsque l'entier n tend vers l'infini.
3. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$.
4. Établir que la suite $\left(\mu_n\right)_{n\geqslant 1}$ converge et que sa limite est strictement positive.
5. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{M}_n$?

Exercice 5. ✦✦ **Exemple de suite implicite** *D'après EDHEC 2018, épreuve annulée*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = 1 - x - x^n.$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x possède une seule solution, notée u_n.
2. (a) Vérifier que u_n appartient à $]0;1[$.
   (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite $(u_n)_n$ est croissante.
   (c) Conclure que la suite $(u_n)_n$ converge et que sa limite appartient à $[0;1]$.
   (d) Montrer par l'absurde que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = 1 - u_n$.
   (a) Justifier que v_n est strictement positif, puis montrer que $\ln v_n \underset{+\infty}{\sim} -n v_n$.

(b) Établir que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln v_n}{n v_n}\right)}{-\ln v_n} = 0 \quad \text{puis} \quad \ln v_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln n.$$

(c) Montrer enfin que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.

4. Donner la nature des séries de termes généraux v_n et ${v_n}^2$.

Exercice 6. ✦✦ Sommes de Riemann

Rappeler le principe des sommes de Riemann et le théorème. En déduire l'équivalent pour $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Exercice 7. ✦✦ Fonction W de Lambert *D'après ESCP 2022, n13*

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x\mathrm{e}^x$.
2. (a) Montrer que la restriction de f à $[-1, +\infty[$ réalise une bijection sur un intervalle J qu'on déterminera. On note W la réciproque de cette bijection.
   (b) Déterminer W(0) et W′(0).
   (c) Déterminer un équivalent de W(x) lorsque x tend vers 0 et un équivalent de W(x) lorsque x tend vers $+\infty$.
   (d) Tracer les courbes représentatives de f et W.
3. Montrer rapidement que la restriction de f à $]-\infty, -1[$ réalise une bijection sur un intervalle J′ qu'on déterminera. On note V la réciproque de cette bijection.
4. Soit m, un réel.
   (a) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x\mathrm{e}^x = m$.
   Exprimer, lorsqu'elles existent, ces solutions à l'aide des fonctions W et V.
   (b) Soient a, b deux réels non nuls. Soit l'équation $\mathrm{e}^{ax} + bx = 0$. Déterminer le nombre de solutions de cette équation en fonction de a et b. Exprimer, lorsqu'elles existent, ces solutions à l'aide des fonctions W et V.
5. Soit $x \in \left[-\mathrm{e}^{-1}; \mathrm{e}\right]$. On définit la suite w par

$$w_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = x\mathrm{e}^{-w_n}.$$

   (a) Si la suite w est convergente, exprimer la limite à l'aide de la fonction V.
   (b) En déduire un programme Python qui prend en argument n et renvoie w_n.

Exercice 8. ✦✦✦ Suites adjacentes *D'après HEC 2000*

Dans ce qui suit on suppose que K est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Soit M un majorant de K et a un élément de K. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = \mathrm{M} \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_{n+1}, v_{n+1}) = \begin{cases} \left(\frac{u_n+v_n}{2}, v_n\right) & \text{si } \frac{u_n+v_n}{2} \text{ ne majore pas K} \\ \left(u_n, \frac{u_n+v_n}{2}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. On suppose, dans cette question seulement, que $\mathrm{K} = [0, 1[\cup[3, 4[$, $a = 0$ et que $\mathrm{M} = 10$. Déterminer (u_n, v_n) pour tout entier n appartenant à $\{1, 2, 3, 4\}$.
2. On revient désormais au cas général.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$.
   (b) Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers un réel b.
   (c) Montrer que pour tout entier positif n, v_n est un majorant de K, puis que b majore K.
   (d) Montrer qu'il existe une suite d'éléments de K qui converge vers b.
   (e) On suppose que b' est un majorant de K.
   - Montrer que $b' \geqslant b$.
   - En déduire que b ne dépend pas des choix initiaux de a et M pourvu que a appartienne à K et que M majore K.

Thème : Révisions de première année
Algèbre

Exercice 9. ✦ **Sommes de projecteur**

1. Soit p un projecteur de E, démontrer que $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.
2. En déduire que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p)$.
3. Soit s un endomorphisme de E. Montrer que si s est une somme finie de projecteurs p_i, avec $i \in [\![1, m]\!]$, alors

$$\mathrm{Tr}(s) \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(s) \geqslant \mathrm{rg}(s).$$

≫ Pour aller plus loin, je vous conseille l'exercice 3, EDHEC 2020

Exercice 10. ✦ **Endomorphisme sur un espace fonctionnel**
Dans la suite, on définit les fonctions sinus et cosinus hyperbolique par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Soient $\mathrm{E} = \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(\sin, \cos, \mathrm{sh}, \mathrm{ch})$ et d l'endomorphisme de E : $\mathrm{d}(f) = f'$ (dérivation).

1. Donner la dimension de F. Démontrer que F est stable par d. On note φ l'endomorphisme de F induit par d.
2. Écrire la matrice M de φ dans une base bien choisie de F. Calculer M^n pour tout naturel n.
3. Démontrer que φ est un endomorphisme bijectif de F et calculer M^{-1}.

Exercice 11. ✦✦ **Noyaux itérés et décomposition de Fitting**
Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\ker\left(f^{k}\right) \subset \ker\left(f^{k+1}\right)$ et $\mathrm{Im}\left(f^{k+1}\right) \subset \mathrm{Im}\left(f^{k}\right)$.
2. (a) Démontrer que si $\ker\left(f^{k}\right) = \ker\left(f^{k+1}\right)$, alors $\ker\left(f^{k+1}\right) = \ker\left(f^{k+2}\right)$.
   (b) Démontrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que :
   → si $k < p$, alors $\ker\left(f^{k}\right) \neq \ker\left(f^{k+1}\right)$;
   → si $k \geqslant p$, alors $\ker\left(f^{k}\right) = \ker\left(f^{k+1}\right)$.
   (c) Démontrer que $p \leqslant n$.
3. Démontrer que si $k < p$, alors $\mathrm{Im}\left(f^{k}\right) \neq \mathrm{Im}\left(f^{k+1}\right)$ et si $k \geqslant p$, alors $\mathrm{Im}\left(f^{k}\right) = \mathrm{Im}\left(f^{k+1}\right)$.
4. En déduire que
$$\ker\left(f^{p}\right) \oplus \mathrm{Im}\left(f^{p}\right) = \mathrm{E}.$$
5. ✦✦✦
   Démontrer qu'il existe deux sous-espaces F et G de E tels que F et G sont supplémentaires, la restriction de f à F, notée $f_{|\mathrm{F}}$, est nilpotent et la restriction de f à G, notée $f_{|\mathrm{G}}$, induit un isomorphisme de G.
6. Soit $d_k = \dim\left(\mathrm{Im}\left(f^{k}\right)\right)$. Montrer que la suite $(d_k - d_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Exercice 12. ✦✦✦ **Matrice positive et productive** *d'après EML 2004*
Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles à n lignes. Une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite positive si et seulement si tous les coefficients de M sont positifs ou nuls. On notera alors $\mathrm{M} \geqslant 0$. Une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite strictement positive si et seulement si tous les coefficients de M sont strictement positifs. On notera alors $\mathrm{M} > 0$. Si M et N sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ou deux matrices de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la notation $\mathrm{M} \geqslant \mathrm{N}$ (respectivement $\mathrm{M} > \mathrm{N}$) signifie que $\mathrm{M} - \mathrm{N} \geqslant 0$ (respectivement $\mathrm{M} - \mathrm{N} > 0$). Une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite productive si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes : M est positive et il existe une matrice positive P de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{P} - \mathrm{MP} > 0$.

I - Étude d'exemples

1. En considérant $U = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, montrer que la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ est productive.

2. Montrer que la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ n'est pas productive.

II - Caractérisation des matrices positives

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, si M est positive, alors, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif.
2. Réciproquement, montrer que, si, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif, alors la matrice M est positive.

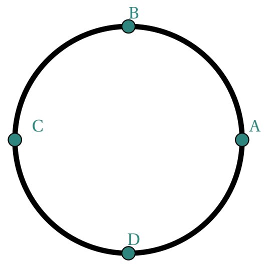
III - Caractérisation des matrices productives

1. Soit A une matrice productive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est noté a_{ij}, et P une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $P - AP > 0$. On note $p_1, \ldots, p_n$ les coefficients de la matrice colonne P.
   (a) Montrer que $P > 0$.
   (b) Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geqslant AX$. On note $x_1, \ldots, x_n$ les coefficients de la matrice colonne X. On désigne par c le plus petit des réels $\frac{x_j}{p_j}$ lorsque l'entier j décrit l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ et k un indice tel que $c = \frac{x_k}{p_k}$.
   Établir que $c\left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj} p_j\right) \geqslant 0$. En déduire que $c \geqslant 0$ et que X est positive.
   (c) Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X = AX$. En remarquant que $-X \geqslant A(-X)$, montrer que X est nulle. En déduire que $I_n - A$ est inversible, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (d) Montrer que, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $Y = (I_n - A)^{-1} X$ est positive (on pourra utiliser III.1.b). En déduire que $(I_n - A)^{-1}$ est positive.
   (e) Dans cette question, on considère une matrice positive B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n - B$ soit inversible et telle que $(I_n - B)^{-1}$ soit positive. On note $V = (I_n - B)^{-1} U$, où U est la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
   Montrer que $V - BV > 0$. Conclure.
   (f) Donner une caractérisation des matrices productives.
   (g) *Application.* Soit M une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $2M^2 = M$. Vérifier que $(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n$ et en déduire que M est productive.

Thème : Révisions
Probabilités

Exercice 13. ✦

Un pion se déplace sur les 4 points $A = (1,0)$, $B = (0,1)$, $C = (-1,0)$ et $D = (0,-1)$ du cercle trigonométrique selon la règle suivante. Au top d'horloge n, le pion



- reste sur le point où il se trouve avec un probabilité $1/2$;
- se déplace sur l'un des deux points voisins avec une probabilité $1/4$ pour chacun d'eux.

Au top 0, le pion est en A. On introduit les événements :

- A_n : « le pion est sur A au top n » ;
- B_n : « le pion est sur B au top n » ;
- C_n : « le pion est sur C au top n » ;
- D_n : « le pion est sur D au top n » ;

On note $a_n = \mathbf{P}(A_n)$, $b_n = \mathbf{P}(B_n)$, $c_n = \mathbf{P}(C_n)$, $d_n = \mathbf{P}(D_n)$ et $X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix}$.

1. Trouver une matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Déterminer J telle que $A = \frac{1}{2}(I_4 + \frac{1}{2}J)$.
   On pose $K = \frac{1}{2}J^2$. Calculer KJ.
3. Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\left(I_4 + \frac{1}{2}J\right)^n = I_4 + u_nJ + v_nK.$$
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n + v_n$. Quel type usuel de suite reconnaît-on ?
   Calculer w_n. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n et v_n.
5. Conclure en exprimant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n, b_n, c_n et d_n.

Exercice 14. ✦✦✦ On dispose d'une pièce de monnaie équilibrée. Les faces sont numérotées 0 et 1. On lance indéfiniment la pièce de monnaie et on note X_i le résultat du i-ème lancer. On se fixe une séquence $s = (s_1, s_2, \cdots, s_k) \in \{0,1\}^k$ de longueur k. On veut montrer que cette séquence apparaît dans la suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une infinité de fois avec une probabilité de 1.

On définit les événements :

- A : « La suite s apparaît une infinité de fois » ;
- pour tout $i \in \mathbb{N}$, A_i : « La suite s apparaît au moins une fois à partir du $(k \times i + 1)$-ième lancer ;
- pour tout $j \in \mathbb{N}$, $B_j = \bigcap_{m=1}^{k} [X_{kj+m} = s_m]$.

1. Justifier que $A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$.
   Indication. On pourra raisonner par double inclusion sur les complémentaires.
2. En déduire $\mathbf{P}(A) = \lim_{i\to+\infty} \mathbf{P}(A_i)$.
3. Montrer que $\bigcup_{j=i}^{+\infty} B_j \subset A_i$.
4. Soit $i \in \mathbb{N}$, on pose $C_i = \bigcup_{j=i}^{+\infty} B_j$. On veut montrer que $\mathbf{P}(C_i) = 1$.
   (a) Montrer que les événements $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants.
   (b) Déterminer, pour $n \geqslant i$, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=i}^{n} \overline{B_j}\right)$.

(c) En déduire que $\mathbf{P}(C_i) = 1$

5. Montrer que la séquence s apparaît dans la suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une infinité de fois avec une probabilité de 1.

Exercice 15. ✦✦✦ **Exemple de convergence presque-sûr** *Oral ESCP 2022, sujet 37*

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $\lambda_n = \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n^2}$.

1. (a) Déterminer un équivalent de $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   (b) En déduire que la série de terme général λ_n converge.

   Dans la suite de l'exercice, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geqslant 1}$ définies sur cet espace, indépendantes et telles que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Poisson de paramètre λ_n.

   (a) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(X_n \neq 0)$ converge.

   (b) Soit $(E_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements de $\mathscr{A}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

   $$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(E_i)\,.$$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $\lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{n\geqslant N} [X_n \neq 0]\right) = 0$.

   (d) En déduire que $\mathbf{P}\left(\bigcup_{N\geqslant 1}\left(\bigcap_{n\geqslant N} [X_n = 0]\right)\right) = 1$.

   (e) On note $B = \left\{\omega \in \Omega \mid \sum_{n\geqslant 1} X_n(\omega) \text{ converge}\right\}$.
   Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} X_n$ converge presque sûrement, c'est-à-dire que $\mathbf{P}(B) = 1$.

Thème : Série à paramètre

Exercice 16. ✦✦ *d'après EMLyon 2005*

PARTIE I : Calcul de la somme d'une série convergente

1. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$
On admet dans la suite que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0,\pi]$:
$$\sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = \frac{\cos\frac{(m+1)t}{2}\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.$$
On calcule classiquement cette somme par les nombres complexes (hors-programme). On peut aussi faire une récurrence mais c'est assez fastidieux.

2. Soit $u : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$.
Montrer, à l'aide d'une intégration par parties : $\displaystyle\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

3. Soit l'application $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\frac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin\frac{t}{2}}$ si $t \in]0,\pi]$ et $f(0) = -1$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$

4. (a) Montrer : $m \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t)\sin\frac{(2m+1)t}{2}\,\mathrm{d}t.$

   (b) Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ et montrer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

PARTIE II : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente.

1. (a) Montrer que, pour tout couple $(x,y) \in ([0,+\infty[)^2$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ convergent.

   (b) Montrer que, pour tout x de $[0,+\infty[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ converge.

   On note S l'application définie, pour tout x de $[0,+\infty[$, par $\mathrm{S}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

2. Calculer $\mathrm{S}(0)$ et $\mathrm{S}(1)$.

3. (a) Établir : $\forall (x,y) \in [0,+\infty[^2, \quad \mathrm{S}(y) - \mathrm{S}(x) = (y-x)\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}.$

   (b) En déduire : $\forall (x,y) \in [0,+\infty[^2, \quad |\mathrm{S}(y) - \mathrm{S}(x)| \leqslant \dfrac{\pi^2}{6}|y-x|.$

   (c) Montrer alors que la fonction S est continue sur $[0,+\infty[$.

4. (a) Montrer, pour tout couple (x,y) de $[0,+\infty[^2$ tel que $x \neq y$:
$$\left|\frac{\mathrm{S}(y)-\mathrm{S}(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}\right| \leqslant |y-x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

   (b) En déduire que la fonction S est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que :
$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad \mathrm{S}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

   (c) Préciser les valeurs de $\mathrm{S}'(0)$ et $\mathrm{S}'(1)$.

5. On admet que S est deux fois dérivable sur $[0,+\infty[$ et que :
$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad \mathrm{S}''(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n+x)^3}.$$
Montrer que S est concave.

6. Soit $x \in]0,+\infty[$ fixé. On note ω la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par :

$$\forall t \in [1,+\infty[, \quad \omega(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}.$$

   (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \omega(n+1) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \omega(n)$, et en déduire : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

   (c) Conclure que $\mathrm{S}(x)$ équivaut à $\ln x$ en $+\infty$.

7. (a) Dresser le tableau de variation de S, en précisant la limite de S en $+\infty$.

   (b) Tracer l'allure de la courbe représentative de S.

Thème : Intégrale à paramètre

≫ Reprendre le DM1.

Exercice 17. ✦✦ **Un exemple d'intégrale de Frullani**

Soit $(a,b) \in]0;+\infty[^2$.

1. Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$ converge.
2. (a) Établir, en utilisant des changements de variable, pour tout $(\varepsilon, X) \in]0;+\infty\left[^2\right.$ tel que $\varepsilon \leqslant X$:
$$\int_\varepsilon^X \frac{e^{-ax}}{x}\,dx = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y}\,dy \quad \text{et} \quad \int_\varepsilon^X \frac{e^{-bx}}{x}\,dx = \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,dy.$$
   (b) En déduire, pour tout $(\varepsilon, X) \in]0;+\infty\left[^2\right.$ tel que $\varepsilon \leqslant X$:
$$\int_\varepsilon^X \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,dy - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,dy$$
3. (a) Montrer que l'application
$$h : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, y \mapsto h(y) = \begin{cases} \frac{1-e^{-y}}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$
   est continue sur $[0;+\infty[$.
   (b) En déduire : $\displaystyle\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,dy \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \ln\frac{b}{a}$.
   (c) Établir : $\forall X \in]0;+\infty[,\quad \displaystyle\int_0^X \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,dy.$
   (d) En déduire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}$.
4. *Facultatif.* Adapter le raisonnement pour établir
$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(bx)-\arctan(ax)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

≫ ✦✦ On pourra aussi regarder EML 2004, voie S pour d'autres intégrales à paramètres.

Exercice 18. ✦✦✦ **Transformée de Laplace** *d'après HEC 2002*

Les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{B}, \mathbf{P})$ et à valeurs réelles.

Partie I : Définition de l'application L

On note E l'ensemble des fonctions f réelles définies, continues sur $[0,+\infty[$ et telles que, pour tout réel x strictement positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt$ converge absolument.

1. (a) Vérifier que E est un espace vectoriel réel.
   (b) Vérifier que E contient les fonctions continues et bornées sur $[0,+\infty[$.
2. Pour tout élément f de E on note $L(f)$ la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par :
$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt.$$
   (a) Vérifier que L est une application linéaire de E dans l'espace vectoriel des fonctions de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
   (b) Pour tout réel λ positif ou nul, on note ε_λ la fonction réelle définie par $\varepsilon_\lambda(t) = e^{-\lambda t}$ pour tout réel t positif ou nul. Vérifier que, pour tout réel λ positif ou nul, la fonction ε_λ est dans E et, pour tout réel x strictement positif, calculer $L(\varepsilon_\lambda)(x)$.

(c) Montrer que, pour tout réel λ positif ou nul et toute fonction f de E, la fonction $\varepsilon_\lambda f$ est aussi dans E et vérifie, pour tout réel x strictement positif, l'égalité : $\mathrm{L}\left(\varepsilon_\lambda f\right)(x) = \mathrm{L}(f)(x+\lambda)$.

3. On considère une fonction H élément de E, de classe $\mathscr{C}^1$, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Montrer que la fonction H' est aussi dans E et, pour tout réel x strictement positif, justifier l'égalité :

$$\mathrm{L}\left(\mathrm{H}'\right)(x) = -\mathrm{H}(0) + x\mathrm{L}(\mathrm{H})(x)$$

4. Soit une fonction f élément de E. Pour tout entier naturel n, montrer que la fonction qui à tout réel t positif ou nul associe $t^n f(t)$ est aussi élément de E.

Partie II : Dérivabilité de la fonction $\mathrm{L}(f)$

Dans toute cette partie, on considère un réel x strictement positif et une fonction f élément de E.

1. Soit h un réel non nul vérifiant l'inégalité $|h| < \frac{x}{2}$.

   (a) Pour tout réel t strictement positif, justifier l'inégalité :

$$\left|\mathrm{e}^{-(x+h)t} - \mathrm{e}^{-xt} + ht\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant \frac{h^2t^2}{2}\mathrm{e}^{-xt/2}.$$

   (b) Pour tout réel T strictement positif, justifier l'inégalité :

$$\left|\int_0^{\mathrm{T}} \left(\frac{\mathrm{e}^{-(x+h)t} - \mathrm{e}^{-xt}}{h} f(t) + t\mathrm{e}^{-xt} f(t)\right) \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 \left|f(t)\right| \mathrm{e}^{-xt/2}\,\mathrm{d}t.$$

   (c) En déduire que $\mathrm{L}(f)$ est dérivable en x et que son nombre dérivé en x vaut :

$$\left(\mathrm{L}(f)\right)'(x) = -\int_0^{+\infty} t f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

   (d) Montrer que la fonction $\mathrm{L}(f)$ est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout entier naturel k, donner à l'aide d'une intégrale la valeur de la dérivée k-ième de $\mathrm{L}(f)$ en x.
   On note $\mathrm{L}(f)^{(k)}$*, la dérivée* k*-ième de* $\mathrm{L}(f)$.

Partie III : Injectivité de l'application $\mathrm{L} : f \mapsto \mathrm{L}(f)$

Dans toute cette partie, on considère un réel x strictement positif et une fonction f continue et bornée sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Ainsi f est élément de E.

1. Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre égal à $\frac{1}{x}$. Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$.

   (a) Donner une densité de la variable aléatoire S_n.

   (b) Donner une densité, qu'on notera φ_n, de la variable aléatoire $\frac{\mathrm{S}_n}{n}$.

2. (a) Soit α un réel strictement positif. Prouver l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - x\right| > \alpha\right]\right) = 0$$

   (b) En utilisant la continuité de la fonction f en x, pour tout réel ε strictement positif, justifier l'existence d'un réel α strictement positif tel que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\left[\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(x)\right| > \varepsilon\right] \subset \left[\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - x\right| > \alpha\right]$$

   (c) Soit ε un réel strictement positif. Prouver l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(x)\right| > \varepsilon\right]\right) = 0$$

3. On note M un majorant de $|f|$ sur $[0, +\infty[$.

(a) Soit ε un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n, on note A_n l'événement :

$$A_n = \left[\left| f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right| \leqslant \varepsilon \right]$$

et $\mathbf{1}_{A_n}$ son indicatrice [1]. Justifier l'inégalité suivante entre variables aléatoires :

$$\left| f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right| \leqslant \varepsilon \mathbf{1}_{A_n} + 2M\left(1 - \mathbf{1}_{A_n}\right).$$

(b) Que vaut $\mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_n})$? En déduire l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = f(x)$$

4. (a) Déduire des questions précédentes l'égalité :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n-1)!x^n} \int_0^{+\infty} t^{n-1} f(t) \mathrm{e}^{-nt/x} \, \mathrm{d}t$$

puis l'égalité

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n(-1)^{n-1}}{(n-1)!x^n} \left(\mathrm{L}(f)\right)^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right).$$

(b) Montrer que si deux fonctions f et g continues et bornées sur l'intervalle $[0, +\infty[$ vérifient $\mathrm{L}(f) = \mathrm{L}(g)$ alors f et g sont égales.

(c) Montrer, plus précisément, que si deux fonctions f et g continues et bornées sur l'intervalle $[0, +\infty[$ vérifient $\mathrm{L}(f)(x) = \mathrm{L}(g)(x)$ seulement pour tout x dans $]a, +\infty[$ (où a est positif ou nul) alors f et g sont encore égales.

≫ Voir aussi ESSEC 2010 pour une autre utilisation de la transformée de Laplace. La transformée de Laplace a de nombreux avantages, elle est notamment utilisée en sciences industrielles pour la résolution des équations différentielles linéaires.

1. Pour rappel, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbf{1}_{A_n}(\omega) = 1$ si $\omega \in A_n$ et 0 sinon.

Thème : Comparaison série/intégrale

Exercice 19. ✦

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\ln(n+1) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n) + 1$.
2. En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 20. ✦ **Équivalent des sommes partielles d'une série divergente**

L'objectif est de prouver la divergence de la série $\sum_{k\geqslant 3} \frac{1}{k\ln k}$ et de déterminer un équivalent des sommes partielles :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln k}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t\ln t}$.
2. (a) Montrer que pour tout $k \geqslant 2$: $\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \frac{1}{k\ln k}$.

   (b) En déduire, pour tout $k \geqslant 3$,
$$\int_3^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \int_3^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$$
3. Calculer, pour tous a, b réels strictement supérieurs à 1 : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
4. (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\ln k}$ diverge.

   (b) Utiliser la question 2.(b) pour trouver un équivalent de S_n.

Exercice 21. ✦✦✦ *Oral ESCP 2001, n°9*

1. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

   (a) Montrer que f est positive et tend vers 0 en $+\infty$.

   (b) Montrer que, pour tout réel $h > 0$ et tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$:
$$h\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} f(nh) \leqslant \int_0^{\mathrm{N}h} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant h\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} f(nh).$$

   (c) En déduire que, pour tout réel $h > 0$, la série de terme général $f(nh)$ converge et que :
$$-hf(0) + h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) \leqslant \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh).$$

   (d) Montrer que, quand h tend vers 0 par valeurs supérieures :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) \underset{h\to 0^+}{\sim} \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. (a) Montrer que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} t^{n^2}$ converge pour tout réel $t \in]-1, 1[$.

   (b) Montrer que, quand t tend vers 1 par valeurs inférieures,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^{n^2} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-t}}.$$

Thème : Inégalités et optimisation

Exercice 22. ✧ Soient $a_1, a_2, \cdots, a_n$ n réels. Justifier que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leqslant n\left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right).$$

Exercice 23. Inégalité arithmético-géométrique
Soient $a_1, a_2, \cdots, a_n$ n réels strictement positifs. On pose :

$$\mathrm{M}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i, \quad \mathrm{G}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \quad \text{et} \quad \mathrm{H}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \frac{n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}.$$

On propose de montrer de plusieurs manières que :

$$\mathrm{G}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leqslant \mathrm{M}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \qquad \text{(IAG)}$$

1. ✧ *Par convexité.*
   Soient $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}_*^+$. On pose $m = \mathrm{M}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.
   (a) Justifier que pour tout x strictement positif, $\ln(x) \leqslant x - 1$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{m} - 1\right) = 0$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{a_i}{m}\right) \leqslant 0$, puis conclure en montrant (IAG).
   (d) En utilisant $\mathrm{M}(1/a_1, 1/a_2, \cdots, 1/a_n)$, justifier que $\mathrm{H}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leqslant \mathrm{G}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

2. ✦ *Par l'inégalité de Jensen.*
   Voir la question 2.(a) de l'exercice suivant.

3. ✦✦ *Via de l'optimisation sous contrainte*
   Soient $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\mathcal{K} = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^n \mid \mathrm{M}(x_1, \ldots, x_n) = 1\right\}$.
   (a) Déterminer les points critiques de G sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ sous la contrainte $\mathrm{M}(x_1, \ldots, x_n) = 1$.
   (b) Montrer que G possède un maximum sur $\mathcal{K}$ et que celui-ci est atteint sur $\mathcal{K} \cap \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$.
   (c) En déduire (IAG).
   (d) Adapter la démarche pour établir que $\mathrm{H}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leqslant \mathrm{G}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

Exercice 24. ✦✦✦ **Inégalité de Carleman** *d'après EDHEC 2012*
On admet le lemme de Cesaro : si une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ, alors on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \ell.$$

Dans toute la suite, on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels positifs telle que la série de terme général x_n converge.
Pour tout entier naturel n non nul, on note :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad \mathrm{T}_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{S}_k \quad \text{et} \quad y_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i x_i.$$

1. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)x_i$.
   En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k = \mathrm{T}_n$.

(b) En utilisant le résultat admis au début de ce problème, établir que la série de terme général y_n converge et que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$.

2. Dans cette question, on pose, pour tout entier naturel n non nul : $z_n = \left(\prod\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}$. On se propose de montrer que la série de terme général z_n converge et que sa somme vérifie :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant \mathrm{e} \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

(a) On rappelle que si une fonction f est concave sur un intervalle I, alors, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathrm{I}^n, \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) \leqslant f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right).$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

(b) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $z_n = \frac{1}{(n!)^{1/n}}\left(\prod\limits_{k=1}^{n} k x_k\right)^{1/n}$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad z_n \leqslant \frac{n+1}{(n!)^{1/n}} y_n.$$

(c) Montrer que, pour tout réel x positif, on a $\ln(1+x) \leqslant x$.

(d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$.

(e) Établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$.

Montrer enfin que la série de terme général z_n converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant \mathrm{e} \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour tout k élément de $[\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

(b) Calculer l'intégrale $\int_{1/n}^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}x$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\}, \quad -1+\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}.$$

(c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$, puis établir que :

$$\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}}{n}.$$

4. On admet que si deux séries à termes positifs, de termes généraux équivalents, divergent, alors leurs sommes partielles d'ordre m sont équivalentes lorsque m est au voisinage de $+\infty$. Soit N un entier naturel non nul quelconque. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ particulière que l'on note $(x_n(\mathrm{N}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$x_n(\mathrm{N}) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \in [\![1, \mathrm{N}]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose, comme à la deuxième question : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n(\mathrm{N}) = \left(\prod\limits_{k=1}^{n} x_k(\mathrm{N})\right)^{1/n}$.

(a) Écrire $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n(\mathrm{N})$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n(\mathrm{N})$ sous forme de sommes finies.

(b) En déduire que $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} \frac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n(\mathrm{N})}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n(\mathrm{N})} = \mathrm{e}$.

5. Conclure que e est la plus petite des constantes λ telles que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant \lambda \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Thème : Matrices classiques

Matrice de rang 1

Exercice 25. ✦✦ Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$.

1. Montrer que $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si et seulement si il existe deux matrices colonnes non nulles U, V telles que $M = U{}^tV$.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note U et V deux matrices colonnes non nulles de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U{}^tV$ et on note $a = \mathrm{Tr}(A)$.
   (a) Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
   (b) Montrer : ${}^tVU = (a)$, puis : $A^2 = aA$.
   (c) Montrer que si $a = 0$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (d) On suppose $a \neq 0$. Calculer AU. Déduire des questions précédentes que A est diagonalisable.
   (e) Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 soit diagonalisable.

Matrice de Vandermonde

Exercice 26. ✦ **Lien avec les polynômes de Lagrange**
Soit $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^{n+1}$. On pose

$$V_a = \begin{bmatrix} 1 & a_0 & {a_0}^2 & \ldots & {a_0}^n \\ 1 & a_1 & {a_1}^2 & \ldots & {a_1}^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_n & {a_n}^2 & \ldots & {a_n}^n \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

1. Notons $C_0, C_1, \ldots, C_n$, les $n+1$ colonnes de A. À quelle condition sur les réels a_0, a_1, …, a_n les colonnes de A forment une famille libre ? En déduire une condition pour l'inversibilité de A.
   On suppose cette condition vérifiée dans la suite.
   Notons $\mathscr{B} = (1, x, \ldots, x^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ et $(e_0, \ldots, e_n)$, la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.
2. Montrer que l'application suivante est un isomorphisme
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & \big(P(a_0), \ldots, P(a_n)\big). \end{array} \right.$$
3. Pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, on définit le polynôme $L_i = \varphi^{-1}(e_i)$. Montrer que la famille $\mathscr{C} = (L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ et que
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[x], \qquad P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)\, L_i.$$
4. Préciser ${P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}}^{-1}$ où $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ désigne la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$.

Matrice de Hilbert

Voir DM 5

Matrice Compagnon

Exercice 27. ✦✦ Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I_n la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note id l'application identité de $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On considère un n-uplet $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ de $\mathbb{R}^n$ et le polynôme :

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

La matrice compagnon C du polynôme P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie par

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

1. (a) Exprimer, pour tout $i \in [[1, n-1]]$, $f(e_i)$ en fonction de e_{i+1}.
   (b) En déduire : $\forall j \in [[1, n-1]]$, $f^j(e_1) = e_{j+1}$ et $f^n(e_1) = -(a_0 e_1 + a_1 e_2 + \ldots + a_{n-1} e_n)$.
2. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $g = f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \ldots + a_1 f + a_0 \,\mathrm{id}$.
   (a) Vérifier : $g(e_1) = (0, \ldots, 0)$.
   (b) Montrer que : $\forall i \in \mathbb{N}$, $g \circ f^i = f^i \circ g$.
   (c) En déduire : $\forall i \in [[1, n]]$, $g(e_i) = (0, \ldots, 0)$.
   (d) Montrer que le polynôme P est annulateur de l'endomorphisme f. Que dire des valeurs propres de C ?
   (e) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $A^5 = A^3 + 2A^2 + I_5$.

Matrice symétrique, matrice de Gram

Exercice 28. ✦ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On note α la plus petite valeur propre de S, et β la plus grande valeur propre de S. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique et de la norme associée $\|\cdot\|$.
Montrer : $\quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad a\|X\|^2 \leqslant {}^t XSX \leqslant \beta\|X\|^2$.

Exercice 29. ✦✦✦ Soit N un entier tel que $N \geqslant 2$. *D'après oraux 1.18 escp 2021*

1. Soient $a_1, \cdots, a_N \in \mathbb{R}$ tels que $(a_1, \cdots, a_N) \neq (0, \cdots, 0)$. On note $M = \left(m_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant N}$ la matrice de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1, N]\!]^2, \quad m_{i,j} = a_i a_j.$$

   (a) Déterminer une matrice colonne A telle que $M = A\,{}^t A$.
   (b) Exprimer la trace de M en fonction de A et déterminer un polynôme annulateur de M de degré 2.
   (c) Déterminer le spectre de M. Montrer que nécessairement $\mathrm{tr}(M) > 0$.
2. Soit $(E, \langle\rangle)$, un espace euclidien de dimension N. Soit un entier $n \in [\![1, N]\!]$ et $\mathcal{F} = \{u_1, \cdots, u_n\}$ une famille de n vecteurs non tous nuls de E. On note $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{F}$ et $G = \left(g_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad g_{i,j} = \langle u_i, u_j \rangle$$

   (a) Montrer que si $\mathcal{F}$ est une famille liée alors G n'est pas inversible.

   On suppose dans la suite du problème que la famille $\mathcal{F}$ est libre.

   (b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de F. On note $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice telle que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la colonne d'indice j est constituée des coordonnées du vecteur u_j dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que

$$G = {}^t PP$$

   puis que le rang de G est égal à celui de la famille $\mathcal{F}$.
   (c) Montrer que toute valeur propre λ de G vérifie : $\quad 0 < \lambda \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$.
   (d) Soit $x \in E$ et $p(x)$ le projeté orthogonal de x sur $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. Montrer que

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \quad \text{où} \quad \alpha_1, \cdots, \alpha_n \ \text{ sont } n \text{ réels donnés par :} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{bmatrix} \langle u_1, x \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, x \rangle \end{bmatrix}.$$

Thème : Diagonalisation

Exercice 30. ✦✦ Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on définit $\Phi(P) = Q$, où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = P(x+2) - P(x+1).$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.
3. En calculant Φ^{n+1} et $\Phi^n(x^n)$, trouver une base dans laquelle la matrice de Φ est triangulaire inférieure.
4. Montrer que $(I - \Phi)$ est un automorphisme et donner son inverse.

Exercice 31. ✦✦ On note E l'espace vectoriel réel des applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ définies sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit l'application φ de E dans E par :

$$\varphi(f) = g \quad \text{où} \quad \forall x \in]0;+\infty[, \ \ g(x) = x f'(x).$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de F. Est-il surjectif? Est-il injectif? Préciser le noyau de φ.
2. Déterminer le spectre de φ.

Exercice 32. ✦✦ **Diagonalisation du crochet de Lie sur un exemple** *d'après Oraux ESCP 2001, n17*
Soient A et B les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser dans une base orthonormée.
2. Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient toutes deux diagonales.
3. Soit F l'application définie sur $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ par, pour tout $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$F : X \longmapsto AX - XB.$$

   (a) Montrer que l'application F est un endomorphisme de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Soit U un vecteur colonne propre de A et V un vecteur colonne propre de B. Calculer $F\left(U\,{}^tV\right)$.
   (c) F est-elle un automorphisme de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
   (d) F est-elle diagonalisable ?

≫ *Voir aussi le cas général : DS 5*

Thème : Polynômes orthogonaux

≫ ✦✦ Voir les polynômes de Tchebychev de seconde espèce, EML 2005

Exercice 33. ✦✦
On pose $A(x) = x^2 - 1$, $B(x) = 2x$.

1. **Une application linéaire**
   On considère l'application $\Phi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ définie par :
$$\Phi(P) = AP'' + BP'.$$
   (a) Montrer que, pour tout entier n, la restriction, notée Φ_n de Φ à $\mathbb{R}_n[x]$, définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
   (b) Montrer brièvement que :
$$(P, Q) \longmapsto \langle P(x), Q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt.$$
   définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$. Vérifier que $\langle xP(x), Q(x) \rangle = \langle P(x), xQ(x) \rangle$.
2. **Une base de vecteurs propres**
   (a) Soient P et Q deux polynômes. Déterminer deux polynômes U et V tels que :
$$\langle \Phi(P), Q \rangle - \langle P, \Phi(Q) \rangle = \int_{-1}^{1} \big(A(t)U(t) + A'(t)V(t)\big)\, dt.$$
   En déduire que pour tout entier n, l'endomorphisme Φ_n est symétrique.
   (b) Écrire la matrice de $\Phi_n : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ dans la base canonique $\{1, x, \cdots, x^n\}$ et en déduire les valeurs propres de Φ_n.
   (c) Montrer qu'il existe une base $(P_0, \cdots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[x]$ formée de vecteurs propres de Φ_n unitaires tels que $\deg P_k = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
   (d) Montrer que si $i \neq k$ alors $\langle P_i, P_k \rangle = 0$. En déduire que P_n est dans l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
   (e) Expliciter les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3, puis déterminer leurs racines.

≫ ✦✦✦ Reprendre le CB-A pour un autre exemple.

Thème : Polynômes de Lagrange et partition de l'unité

Exercice 34. ✦✦ *EDHEC S 2019*

Partie 1 : exemple

On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. (a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2 .

   (b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).

   (c) En Python, la commande `linalg.matrix_rank(M)` de la bibliothèque `numpy` renvoie le rang de la matrice `M`. On a saisi

   Editeur

```python
import numpy as np
A = np.array([[1, 0, 0],[-2, 3, -2],[-1,1,0]])
r1=np.linalg.matrix_rank(A-np.eye(3))
r2=np.linalg.matrix_rank(A-2*np.eye(3))
print('r1=',r1,'r2=',r2)
```

   Python a répondu

   Console

```
>>> # script executed
r1= 1 r2= 2
```

   Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres de f et à la dimension des sous-espaces propres associés ?

   (d) Donner une base de chacun des noyaux $\operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \operatorname{id})$ et $\operatorname{Ker}(f - \lambda_2 \operatorname{id})$. En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

2. (a) Justifier qu'il existe une base (u_1, v_1, v_2) de $\mathbb{R}^3$, où (u_1, v_1) est une base de $\operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \operatorname{id})$ et (v_2) une base de $\operatorname{Ker}(f - \lambda_2 \operatorname{id})$. *On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de u_1 et la première de v_1 étant nulles.*

   (b) On note $x = (a, b, c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer, en fonction de a, b et c les coordonnées de x dans la base (u_1, v_1, v_2).

Partie 2 : généralisation

Soit n et p deux entiers naturels tels que $n \geqslant p \geqslant 2$, soit E un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme diagonalisable de E ayant p valeurs propres, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, deux à deux distinctes. On se propose de déterminer la décomposition de chaque vecteur x de E sur la somme directe $\bigoplus_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}(f - \lambda_k \operatorname{id})$, où Id désigne l'endomorphisme identité de E.

3. Soit $\mathscr{B}$ une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D.

   (a) En notant I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :

   $$(D - \lambda_1 I_n)(D - \lambda_2 I_n) \ldots (D - \lambda_p I_n) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

   (b) En déduire un polynôme annulateur de f.

Pour chaque k de $[\![1, p]\!]$, on définit le polynôme $L_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}$.

4. (a) En distinguant les cas $i = k$ et $i \neq k$, calculer $L_k(\lambda_i)$.

   (b) Montrer que $(L_1, L_2, \ldots, L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

   (c) Établir alors que :

   $$\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}[x], \quad P = \sum_{k=1}^{p} P(\lambda_k) L_k$$

   (d) En déduire que $\sum_{i=1}^{p} L_i = 1$.

5. (a) Montrer que, pour tout x de E, $L_k(f)(x)$ appartient à $\operatorname{Ker}(f - \lambda_k Id)$, où $L_k(f)(x)$ désigne l'image du vecteur x de E par l'endomorphisme $L_k(f)$.

(b) En déduire la décomposition cherchée.

6. Vérifier que cette dernière décomposition redonne celle obtenue pour l'endomorphisme f de la partie 1, si l'on choisit $n = 3, \mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ et $p = 2$.

Exercice 35. ✦✦✦ **Partition de l'identité** *HEC 2016*

Soient k endomorphismes $u_1, u_2, \ldots, u_k$ d'un espace vectoriel E. On dit que $u_1, u_2, \ldots, u_k$ constituent une partition de l'identité de E si :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_k = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}.$$

1. *Exemple 1.*

   Dans cette question, $n = 3$ et $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$. Soit $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Préciser le spectre de la matrice A et montrer que A n'est pas diagonalisable.

   (b) Montrer que le polynôme $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[x]$ tel que $\mathrm{Q}(x) = x^3 + x^2$ est un polynôme annulateur de A.

   (c) Existe-t-il un polynôme de degré 2 annulateur de A ?

   (d) Trouver deux polynômes Q_1 et Q_2 de $\mathbb{R}[x]$ pour lesquels les deux endomorphismes $\mathrm{Q}_1(f)$ et $\mathrm{Q}_2(f)$ sont des projecteurs et constituent une partition de l'identité de $\mathbb{R}^3$.

2. *Exemple 2.*

   On considère dans cette question un endomorphisme f de E diagonalisable et possédant k valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Pour tout $i \in [[1,k]]$, on note :

   - L_i le polynôme de $\mathbb{R}[x]$ défini par
   $$\mathrm{L}_i(x) = \prod_{\substack{j\in[[1,k]] \\ j\neq i}} \left(\frac{x-\lambda_j}{\lambda_i - \lambda_k}\right);$$
   - $\mathrm{E}_{\lambda_i}(f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i ;
   - v_i l'endomorphisme de E défini par $v_i = \mathrm{L}_i(f)$.

   (a) Justifier l'égalité $\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{E}_{\lambda_i}(f)$. En déduire que $\prod_{j=1}^{k}\left(x - \lambda_j\right)$ est un polynôme annulateur de f.

   (b) Établir pour tout $i \in [[1,k]]$, l'inclusion : $\mathrm{Im}(v_i) \subset \mathrm{E}_{\lambda_i}(f)$.

   (c) Pour tout $j \in [[1,k]]$, calculer la somme : $\sum_{i=1}^{k} \mathrm{L}_i\left(\lambda_j\right)$. En déduire que les endomorphismes $v_1, v_2, \ldots, v_k$ constituent une partition de l'identité de E.

   (d) Établir pour tout $i \in [[1,k]]$, l'égalité : $\mathrm{Im}(v_i) = \mathrm{E}_{\lambda_i}(f)$. Identifier l'endomorphisme v_1.

3. Soit k endomorphismes $u_1, u_2, \ldots, u_k$ de E qui constituent une partition de l'identité de E. Pour tout $i \in [[1,k]]$, on note r_i le rang de u_i.

   (a) Établir les relations : $\mathrm{E} = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(u_i)$ et $n \leqslant \sum_{i=1}^{k} r_i$.

   (b) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(u_1), \mathrm{Im}(u_2), \ldots, \mathrm{Im}(u_k)$ sont en somme directe si et seulement si on a l'égalité $n = \sum_{i=1}^{k} r_i$.

   (c) Dans cette question, on cherche à montrer l'équivalence des propriétés (1), (2) et (3) suivantes :

   (1) $n = \sum_{i=1}^{k} r_i$

   (2) Les endomorphismes $u_1, u_2, \ldots, u_k$ sont des projecteurs.

   (3) Pour tout $(i,j) \in [[1,k]]^2$, avec $i \neq j$, on a : $u_i \circ u_j = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$.

   i. En utilisant la trace des matrices de projecteurs, justifier l'implication (2) ⇒ (1).

   ii. À l'aide de la question 3.*b* et en écrivant, pour $x \in \mathrm{E}$, les vecteurs $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_k(x)$ comme des sommes de k vecteurs, établir l'implication (1) ⇒ (3).

   iii. Conclure en établissant une troisième implication.

Thème : Projection et minimisation par projection orthogonale

Exercice 36. ✦
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$\mathrm{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Montrer que f est un projecteur orthogonal dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 37. ✦
Soit f un endomorphisme d'une espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer que f est un projecteur si et seulement si f est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(f) = \{0;1\}$.

Exercice 38. ✦✦ *d'après EDHEC 1999*
Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions réelles $f_0, f_1, \dots, f_n$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_0(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_k(x) = x^k \mathrm{e}^{-x}.$$

On appelle E_n l'espace vectoriel engendré par la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$. On note d l'application qui à toute fonction de E_n associe sa fonction dérivée.

Partie 1

1. Montrer que la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est une base de E_n.
2. (a) Calculer $d(f_0)$, puis montrer que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $d(f_k) = k f_{k-1} - f_k$.
   (b) Montrer que d est un endomorphisme de E_n.
3. (a) Vérifier que d est un automorphisme de E_n (c'est-à-dire un endomorphisme bijectif).
   (b) Justifier que :
   $$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad d\left(\frac{1}{k!} f_k\right) = \frac{1}{(k-1)!} f_{k-1} - \frac{1}{k!} f_k.$$
   (c) En déduire, pour tout j de $[\![0, n]\!]$, l'expression de $d^{-1}(f_j)$ dans la base $(f_0, f_1, \dots, f_n)$.
4. Utiliser la question précédente pour montrer que, pour tout entier naturel j, l'intégrale
   $$\mathrm{I}_j = \int_0^{+\infty} x^j \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$
   converge, puis donner sa valeur en fonction de j.
5. Montrer que l'application qui à tout couple (f, g) de E_n associe :
   $$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x) g(x) \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$$
   est un produit scalaire sur E_n.
   Pour tout f de E_n, on note désormais $\|f\|$ la norme de f.

Partie 2

1. On pose $\mathrm{E}_{n-1} = \mathrm{vect}(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$.
   (a) Rappeler le théorème qui assure l'existence d'un unique élément h de E_{n-1} vérifiant :
   $$\|f_n - h\| = \inf_{g \in \mathrm{E}_{n-1}} \|f_n - g\|.$$
   On pose désormais $h = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j f_j$.
   (b) Pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, rappeler pourquoi $f_n - h \perp f_k$.

(c) En déduire que pour tout k élément de $[[0, n-1]]$: $\sum_{j=0}^{n-1} a_j (j+k)! + (k+n)! = 0$.

2. On considère la fonction P définie pour tout x réel par :

$$\mathrm{P}(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j (x+1)\ldots(x+j) + (x+1)(x+2)\ldots(x+n).$$

(a) Vérifier que : $\forall k \in [[0, n-1]]$, $\mathrm{P}(k) = 0$.

(b) En déduire explicitement P, puis vérifier que $\mathrm{P}(n) = n!$.

3. (a) Montrer que $\left\| f_n - h \right\|^2 = \langle f_n - h, f_n \rangle$.

(b) En déduire la valeur de $m = \inf_{(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \left(x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k \right)^2 \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$.

Exercice 39. ✦✦✦ **Loi du khi deux et algèbre** *D'après l'oral de l'ESCP*

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

(a) Reconnaître la loi de $\mathrm{X}^2/2$, en déduire la loi de $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathrm{X}_i)_{i \in [[1;n]]}$ une famille de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale centrée réduite et $\mathrm{Y}_n = \sum_{i=1}^{n} {\mathrm{X}_i}^2$. Déterminer la loi de Y_n ainsi que son espérance et sa variance sous réserve d'existence.
On dit que Y_n suit une loi du khi deux à n degrés de liberté.

2. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$\mathrm{A} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Montrer que f est un projecteur orthogonal dont on précisera les éléments caractéristiques.

3. Un point M, extrémité d'un vecteur V, se déplace de façon aléatoire dans l'espace $\mathbb{R}^3$.
$\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.
Les coordonnées $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3$ de M sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi normale centrée réduite.

(a) Quelle est la loi de la variable aléatoire $\|\mathrm{V}\|^2$?

(b) Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation : $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. On note D la variable aléatoire égale au minimum de la distance de M au plan $\mathscr{P}$. C'est-à-dire,

$$\mathrm{D} = \min_{\mathrm{V}' \in \mathscr{P}} \|\mathrm{V} - \mathrm{V}'\|.$$

Vérifier qu'une densité de D est donnée par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f_{\mathrm{D}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(-t^2/2)\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(t).$$

(c) Quelle est, en moyenne, la distance de ce point au plan ?

Exercice 40. ✦✦ **Inverse du produit de lois uniformes** *D'après ESC 2009*

Soient U, V deux variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $[0;1]$. On considérera que, du fait que $[U=0]$ et $[V=0]$ sont de probabilité nulle, $U(\Omega)=]0,1]$, $V(\Omega)=]0,1]$. On pose

$$X=-\ln(U) \quad \text{et} \quad Y=-\ln(V).$$

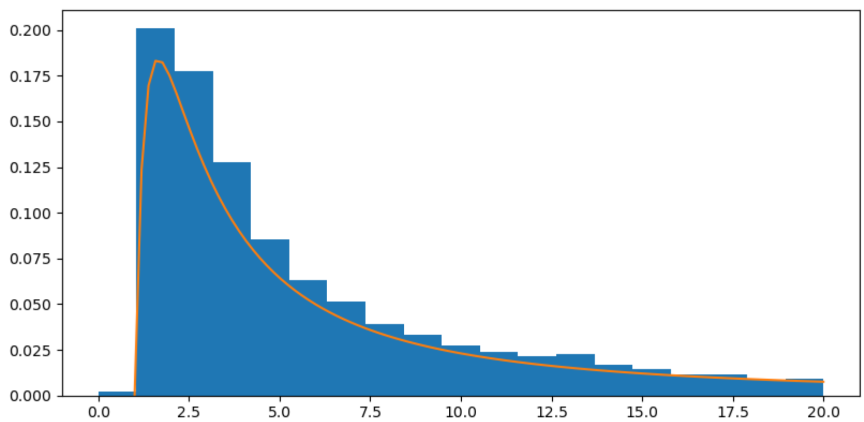
1. Montrer que $X(\Omega)=\mathbb{R}^+$ et que la variable X suit une loi exponentielle de paramètre 1.
2. (a) Quelle est la loi de Y? Justifier que X et Y sont indépendantes.
   (b) Déterminer une densité f de Z. Vérifier que si $x \geqslant 0$, alors $f(x)=xe^{-x}$.
   (c) Déterminer la fonction de répartition de Z.
3. On note $T=e^Z$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de T et montrer que T est une variable à densité.
   (b) En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<1\\ \frac{\ln(t)}{t^2} & \text{si } t\geqslant 1\end{cases}$$

   est une densité de la variable aléatoire $\frac{1}{UV}$.
4. Écrire une fonction Python nommée **Simu** qui simule la variable $1/(UV)$.
   On rappelle que la commande **np.random.rand()** simule une variable à densité suivant la loi uniforme sur $[0,1]$, dont les exécutions successives donnent des variables indépendantes.
5. Commenter le code suivant :

Editeur

```
E=[]
for i in range(5000):
    E.append(Simu())

x=np.linspace(1,20,100)
y=np.log(x)/x**2
plt.hist(E,bins=np.linspace(0,20,20),density=True)

plt.plot(x,y)


plt.show()
```



Thème : Espérance conditionnelle

Exercice 41. ✧ Rappeler la définition de l'espérance conditionnelle et donner la formule de l'espérance totale.

Exercice 42. ✦✦ *D'après ESC 2005*

Dans tout l'exercice, S désigne un entier naturel non nul fixé. Une urne contient initialement 4S boules indiscernables au toucher, dont S boules rouges, S boules vertes et 2S boules bleues.
On effectue des tirages successifs d'une boule, au hasard, et avec le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, on ne la remet pas dans l'urne, mais on remet dans l'urne une boule bleue ;
- si la boule tirée est verte, on la remet dans l'urne ;
- si la boule tirée est bleue, on ne la remet pas dans l'urne, mais on remet dans l'urne une boule rouge.

On note, pour tout entier naturel n non nul, X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne après le n-ème tirage, et on note X_0 la variable aléatoire certaine égale à S.

1. Déterminer la loi de X_1, et calculer son espérance.
2. Déterminer la loi de X_2 et calculer son espérance.
3. On suppose désormais que n est un entier supérieur ou égal à 2S, de sorte que
$$X_n(\Omega) = \{0, \dots, 3S\}.$$
   (a) Soit $k \in [\![1, 3S-1]\!]$.
   Quelle est la composition de l'urne une fois l'événement $[X_n = k]$ réalisé ?
   En déduire la loi de X_{n+1} conditionnellement à l'événement $[X_n = k]$.
   (b) Montrer que $\mathbf{E}(X_{n+1} \mid X_n = k) = \left(1 - \frac{1}{2S}\right)k + \frac{3}{4}$. Cette formule est-elle encore vraie pour $k = 0$ et $k = 3S$?
   (c) En déduire par la formule de l'espérance totale que $\mathbf{E}(X_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{2S}\right)\mathrm{E}(X_n) + \frac{3}{4}$.
4. On note, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2S, $u_n = \mathbf{E}(X_n)$.
   (a) Donner l'expression de u_n en fonction de n, S et u_{2S}.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n) = \dfrac{3S}{2}$.
5. Écrire en Python une fonction **simul(S,n)** qui prend en entrée deux paramètres S et n, simule une série de n tirages dans une urne de 4S boules et retourne le nombre de boules rouges restant dans l'urne à l'issue de ces n tirages.

Exercice 43. ✦✦

1. • **Préliminaires**
   Dans cette question, x désigne un nombre réel strictement compris entre 0 et 1.
   (a) Justifier la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 1} x^k/k$.
   (b) Vérifier, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0,1[$, l'égalité : $\dfrac{1}{1-t} = \dfrac{t^m}{1-t} + \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} t^k$.
   (c) Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{t^m}{1-t}\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand l'entier m tend vers l'infini.
   (d) En déduire la somme de la série $\sum_{k\geqslant 1} x^k/k$.
2. • **Application**
   Soient $U_1, U_2, \dots, U_N$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $[0;1]$ et N une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p indépendante de la suite $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$. On pose
$$X = \max_{1\leqslant i\leqslant N} U_i.$$
   Calculer l'espérance de X.

Thème : Intégrales de Wallis et formule de Stirling

≫ ✦ Reprendre le sujet 0 de Ecricome, ou le problème EDHEC 2018.

Exercice 44. ✦✦ Une démonstration probabiliste de la formule de Stirling *D'après HEC maths 2 2017, voie S*

Dans tout le problème :

- toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathrm{A}, \mathbf{P})$;
- on note θ un paramètre réel.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit h_n la fonction définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad h_n(x) = \left((1-x)\mathrm{e}^x\right)^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 h_n(x)\mathrm{d}x$.

1. (a) À l'aide du changement de variable $u = n(1-x)$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{I}_n = \dfrac{e^n}{n^{n+1}} \displaystyle\int_0^n u^n \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$.

   (b) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $x + \ln(1-x) \leqslant -\dfrac{x^2}{2}$.

   (c) En se référant à une densité de la loi normale centrée réduite, en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

2. On note h_n^* la restriction à l'intervalle $]0,1[$ de la fonction h_n.
   On pose pour tout $x \in]0,1[$:

$$h_n^*(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\mathrm{H}(x)\right) \quad \text{et} \quad g(x) = (1-x)\ln(1-x) + x - \frac{x^2}{2}.$$

   (a) Montrer que H est prolongeable par continuité en 0. On note encore H la fonction ainsi prolongée.

   (b) Montrer que la fonction g est convexe et strictement positive sur $]0,1[$.

   (c) En déduire que la fonction H réalise une bijection strictement croissante de $[0,1[$ sur $[1,+\infty[$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente de limite nulle telle que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n\sqrt{n} = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n < 1$.

   (a) Donner un exemple d'une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (b) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \mathrm{H}(u_n)$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

   (c) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement : $\mathrm{I}_n \geqslant \displaystyle\int_0^{u_n} h_n(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{\sqrt{nv_n}} \int_0^{u_n\sqrt{nv_n}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y$.

   (d) Déduire des questions 1.c) et 3.c), un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Soit $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n \in \mathrm{N}^*$, on pose : $\mathrm{S}_n = \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 + \cdots + \mathrm{T}_k$.

   (a) Rappeler la loi suivie par la variable aléatoire S_n et montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([\mathrm{S}_n \leqslant n]) = \frac{1}{2}$.

   (b) Pour tout $n \in \mathrm{N}^*$, on pose : $\mathrm{U}_n = \dfrac{\mathrm{T}_{n+1}}{\sqrt{n}}$. Montrer que la suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathrm{N}^*}$ converge en probabilité vers la constante 0.

   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([\mathrm{S}_{n+1} \leqslant n]) = \frac{1}{2}$.

5. Montrer que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$ (formule de Stirling).

≫ La partie II est intéressante sur la somme de loi de Cauchy.

Thème : Fonctions génératrices

Cas des variables aléatoires finies

Pour toute variable aléatoire X finie et à valeurs dans $[\![0;n]\!]$, on définit la fonction polynomiale G_X par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \sum_{x \in X(\Omega)} t^x \, \mathbf{P}(X = x).$$

Exercice 45. ✧ **Premières propriétés de la fonction génératrice**
Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![0;n]\!]$.

1. Exprimer l'espérance et la variance de X à l'aide de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$.
2. Justifier que X et Y ont même loi si et seulement si elles ont même fonction génératrice.
3. *Fonction génératrice d'une somme et application*
   (a) Justifier que
   $$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad G_X(t)G_Y(t) = G_{X+Y}(t).$$
   (b) Calculer $G_X(t)$ lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n;p)$.
   (c) Retrouver le fait que si $X_1, \dots, X_k$ sont de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et qui suivent des lois binomiales $\mathscr{B}(n_i, p)$ alors la somme $S_n = \sum_{i=1}^{k} X_i$ suit encore une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
4. *Fonction génératrice d'une combinaison linéaire*
   Soit $\in \mathbb{N}^*$. On considère des variables aléatoires X_1, X_2, …, X_k indépendantes, à valeurs dans $[\![0;n]\!]$, de fonctions génératrices G_1, G_2, …, G_k. Exprimer la fonction génératrice G de $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i$ en fonction de G_1, G_2, …, G_k et des réels λ_1, λ_2, …, λ_k.

Exercice 46. ✦✦ **Convergence en loi et fonctions génératrices**
On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X, définies sur le même espace probabilisé, à valeurs dans $[\![x_0, x_m]\!]$. Les fonctions génératrices sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$G_{X_n}(t) = \sum_{k=0}^{m} P(X_n = x_k) \cdot t^k \quad \text{et} \quad G_X(x) = \sum_{k=0}^{m} P(X = x_k) \cdot t^k.$$

1. Vérifier que, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X, alors :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_{X_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} G_X(x) \qquad (\bullet)$$
2. L'objectif de la suite, est d'établir la réciproque. On suppose donc que la propriété $(\bullet)$ est vérifiée. On pose de plus
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 & \dots & {x_0}^m \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 & \dots & {x_1}^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_m & {x_m}^2 & \dots & {x_m}^m \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{m+1}(\mathbb{R})$$
   (a) Notons $C_0, C_1, \dots, C_m$, les $m+1$ colonnes de A. Justifier que les colonnes de A forment une famille libre, en déduire l'inversibilité de A.
   (b) Soit $k \in [\![0;m]\!]$. En déduire que la suite $(\mathbf{P}(X_n = k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ_k, la limite.
   (c) Montrer que les réels $(\ell_k)_{0\leqslant k\leqslant m}$ sont les coefficients d'une loi de probabilité, et en déduire que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi.
3. • **Application.**
   On dispose d'une infinité de boites $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$
   Dans B_n, il y a des boules blanches en proportion p_n et des boules noires en proportion $q_n = 1 - p_n$. On effectue successivement dans chacune de ces boites m tirages avec remise, $m \in \mathbb{N}^*$.
   Soit X_n, le nombre de boules blanches tirées dans la boite B_n.
   Donner une condition nécessaire et suffisante de convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et reconnaitre la loi limite, lorsque cette condition est remplie.

Exercice 47. ✦✦✦ **Un exemple de processus de type Galton-Watson**
Une cellule se reproduit ainsi : elle donne deux cellules-filles avec probabilité p, et aucune descendante avec probabilité $q = 1 - p$. Elle meurt ensuite. On suppose $p > q$.
On part d'une seule cellule et on cherche à déterminer si la population va s'éteindre ou non. On suppose que les comportements des descendances sont mutuellement indépendants et on note, pour $n \in \mathbb{N}$, X_n, la variable aléatoire égale au nombre de cellules à la n-ième génération.

1. Expliciter l'ensemble des valeurs prises par X_n, noté $X_n(\Omega)$.
2. Montrer que $\mathbf{P}_{[X_n=i]}(X_{n+1} = 2k) = \binom{i}{k} p^k \cdot q^{i-k}$, où $k \in [\![1; i]\!]$.
3. Soit G_n, la fonction génératrice de X_n, c'est-à-dire la fonction définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_n(x) = \sum_{j \in X_n(\Omega)} \mathbf{P}\left(X_n = j\right) \cdot x^j.$$
   (a) En appliquant convenablement la formule des probabilités totales, montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_{n+1}(x) = G_n\left(q + p \cdot x^2\right).$$
   (b) Calculer $G_1(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et en déduire que $G_{n+1}(x) = q + p \cdot G_n(x)^2$.
4. Soit $m = \min(1; q/p)$. Étudier la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par
$$u_1 \in [0; m] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = q + p{u_n}^2.$$
5. Soit T_n, la variable aléatoire égale à 1 lorsque la population est éteinte et à 0 sinon. Justifier que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

Cas des variables aléatoires dénombrables

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose :
$$\forall t \in [-1, 1], \qquad G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \mathbf{P}(X = k).$$

Exercice 48. ✦ **Définition et exemple**

1. Soit $t \in [-1, 1]$. Montrer que la série qui définit $G_X(t)$ est absolument convergente, puis exprimer $G_X(t)$ à l'aide de l'espérance d'une variable aléatoire.
2. (a) On suppose que X suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. Calculer $G_X(t)$ pour tout $t \in [-1, 1]$.
   (b) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = k) = \dfrac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$.
   Cette dernière égalité est un fait général.

Exercice 49. ✦✦ **Lien entre la fonction génératrice et l'espérance**

1. (a) Exprimer $G_X(t)$ comme espérance d'une variable aléatoire.
   (b) Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes prenant leurs valeurs dans $\mathbb{N}$, alors
$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_{X+Y}(t) = G_X(t) \cdot G_Y(t).$$
2. (a) On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $t \in [0, 1[$
$$p_k = \mathbf{P}(X = k) \quad \text{et} \quad H(t) = \frac{G_X(t) - G_X(1)}{t - 1}.$$
   Montrer que
$$H(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k \left(1 + t + t^2 + \cdots + t^{k-1}\right).$$
   En déduire que la fonction H est croissante sur $[0, 1[$.
   (b) On suppose que X admet une espérance. Prouver que
$$\forall t \in [0, 1[, \quad H(t) \leqslant \mathbf{E}(X).$$

(c) En déduire que G_X est dérivable à gauche en 1. Quelle relation existe-t-il entre $\mathbf{E}(X)$ et la dérivée à gauche de G_X en 1 ?

(d) On suppose maintenant que G_X est dérivable à gauche en 1. Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k p_k \leqslant (G_X)'_g(1).$$

En déduire que X possède une espérance. Quelle relation entre $(G_X)'_g(1)$ et $\mathbf{E}(X)$ peut-on en déduire ?

(e) Conclure en donnant le lien entre G_X et $\mathbf{E}(X)$.

3. Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction génératrice de la variable aléatoire X, et retrouver ainsi la valeur de $\mathbf{E}(X)$ et celle de $\mathbf{V}(X)$.

(a) X suit la loi géométrique de paramètre p.

(b) X suit la loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice 50. ✦✦✦ Identités de Wald et sommes aléatoires de variables aléatoires

Soient X et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi et admettant une espérance. Soit N, une nouvelle variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et admettant aussi une espérance. On pose pour tout $\omega \in \Omega$

$$S(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) + \cdots + X_{N(\omega)}(\omega) & \text{si } N(\omega) \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0. \end{cases}$$

On admet que S est une variable aléatoire.

1. • **Espérance de S : une formule, deux approches.**

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{P}(N = n) \neq 0$. Justifier l'existence et calculer l'espérance $\mathbf{E}\big(S \mid [N = n]\big)$.

(b) En déduire l'existence de l'espérance de S et l'égalité $\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(N)$.

2. (a) Justifier que pour tout $t \in [-1;1]$

$$G_S(t) = G_N\big(G_X(t)\big).$$

On pourra admettre que l'on peut intervertir les sommes doubles.

(b) En admettant que dans le cas d'absolue convergence, l'espérance de la variable X est donnée par $G'_X(1)$, retrouver le résultat de la question 1.(b).

3. • **Variance**

On suppose maintenant que les variables X_i admette un moment d'ordre 2. Justifier que

$$\mathbf{E}\Big(\big(S - N\mathbf{E}(X)\big)^2\Big) = \mathbf{E}(N)\,\mathbf{V}(X).$$

≫ Pour les variables aléatoires à densité, on pourra consulter le DS 2 avec les fonctions génératrices*

Thème : Min/Max et statistiques d'ordre

Exercice 51. ✦ **Convergence en loi et Loi de Gumbel**
Soit V une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose $W = -\ln V$.

1. Justifier que W est une variable à densité et donner une densité.

   On dit que W suit la loi de Gumbel.
   On désigne par n un entier naturel non nul et par $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant une loi $\mathscr{E}(1)$.
   On considère la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
2. Donner l'expression $F_{Y_n}(t)$ où F_{Y_n} est la fonction de répartition de Y_n. Vérifier que Y_n est une variable à densité et donner une densité f_{Y_n} de Y_n.
3. (a) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - F_{Y_n}(t)\right) dt$ est convergente.

   (b) Établir l'égalité suivante :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \int_0^x \left(1 - F_{Y_n}(t)\right) dt = x\left(1 - F_{Y_n}(x)\right) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\, dt.$$

   (c) Montrer que $x\left(1 - F_{Y_n}(x)\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. En déduire que Y_n possède une espérance et prouver l'égalité :
$$\mathbf{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} \left(1 - F_{Y_n}(t)\right) dt.$$
4. (a) Montrer, grâce au changement de variable $u = 1 - e^{-t}$, que l'on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^x \left(1 - F_{Y_n}(t)\right) dt = \int_0^{1-e^{-x}} \frac{1-u^n}{1-u}\, du.$$

   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^x \left(1 - F_{Y_n}(t)\right) dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-e^{-x})^k}{k}$, puis exprimer $\mathbf{E}(Y_n)$ sous forme de somme.
5. On pose $Z_n = Y_n - \ln n$.
   On rappelle que dans la librairie **numpy.random** importée sous **rd**, se trouve la commande **rd.exponential(a,n)** renvoie n simulations d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{a}$.

   (a) Écrire une fonction **SimuG** qui simule une variable aléatoire suivant une loi de Gumbel.

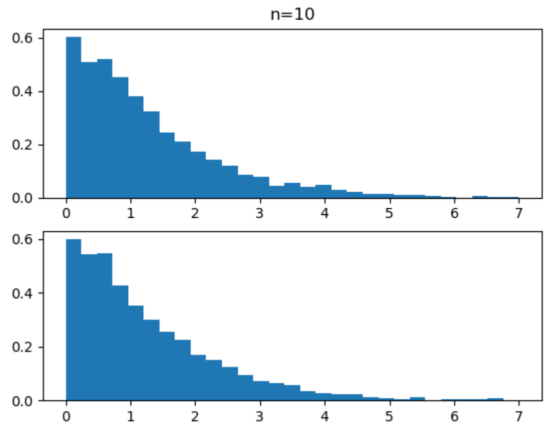
   (b) Écrire une seconde une fonction **SimuZ** qui prend en argument n et simule la variable Z_n.

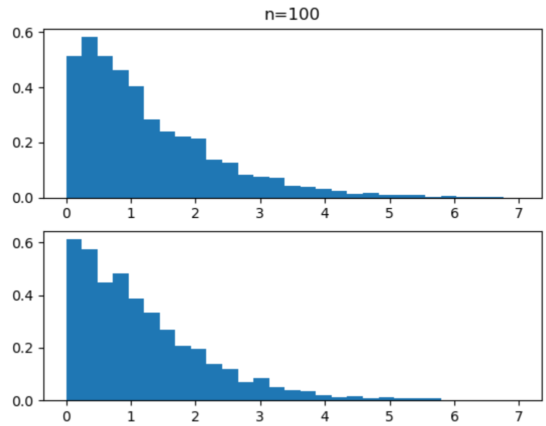
   (c) Voici un premier script

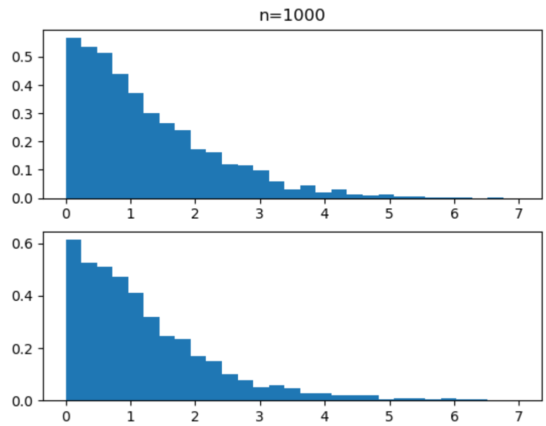
Editeur

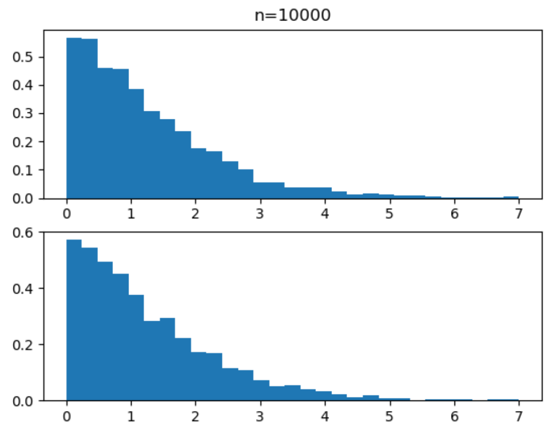
```
echG=[]
echZ=[]
for i in range(5000):
    g=SimuG()
    z=SimuZ(n)
    echG.append(g)
    echZ.append(z)

x=np.linspace(0,7,30)
plt.subplot(211) # permet de séparer les graphes
plt.title('n=10000')
plt.hist(echG,bins=x,density=True)
plt.subplot(212)
plt.hist(echZ,bins=x,density=True)
plt.show()
```

   et les réponses pour plusieurs valeurs de n.









Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite des variables aléatoires (Z_n).

6. On note F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n.

   (a) Justifier que, pour tout réel x, on a : $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln n)$.

   (b) Montrer que, pour tout réel x, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$.

   (c) Démontrer le résultat conjecturé à la question 5.(c).

Exercice 52. ✦✦✦ Quelques propriétés des statistiques d'ordre *Partie I de maths II 2011*

Toutes les variables aléatoires qui apparaissent dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Dans tout le problème, on considère une variable aléatoire X de fonction de répartition F_X et admettant une densité f_X. Les solutions éventuelles de l'équation $F_X(x) = \frac{1}{2}$ s'appellent les médianes théoriques de X. Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on considère un n-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ i.i.d (indépendant, identiquement distribué[2]) de la loi de X et on définit la variable aléatoire :

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k,$$

qui est la moyenne empirique de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$.
On admet l'existence de variables aléatoires à densité $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ telles que, pour tout ω de Ω, les réels $Y_1(\omega), Y_2(\omega), \ldots, Y_n(\omega)$ constituent un réarrangement par ordre croissant des réels $X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)$, de telle sorte que, pour tout ω de Ω :

$$Y_1(\omega) \leqslant Y_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant Y_n(\omega).$$

En particulier, $Y_1 = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Plus généralement, pour tout k de $[\![1, n]\!]$, il existe une fonction ψ_k définie et continue sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles, telle que $Y_k = \psi_k(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Si n est un entier impair ($n = 2\ell + 1$, avec $\ell \in \mathbb{N}$), alors la variable aléatoire $Y_{\ell+1}$ est appelée la médiane empirique de l'échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

2. C'est-à-dire, de même loi.

Pour tout réel x et tout entier k de $[\![1,n]\!]$, on note $J_k(x)$ la variable aléatoire de Bernoulli définie par

$$J_k(x)=\begin{cases}1 & \text{si } [X_k \leqslant x] \text{ est réalisé}\\ 0 & \text{si } [X_k > x] \text{ est réalisé.}\end{cases}$$

On pose $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} J_k(x)$.

1. (a) Montrer que les fonctions f_{Y_1} et f_{Y_n} définies pour tout x réel par :

$$f_{Y_1}(x)=n\,(1-F_X(x))^{n-1}\,f_X(x) \quad \text{et} \quad f_{Y_n}(x)=n\,(F_X(x))^{n-1}\,f_X(x)$$

sont des densités de Y_1 et Y_n respectivement.

(b) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $S_n(x)$?

(c) Justifier l'égalité entre événements suivante : $[Y_k \leqslant x]=[S_n(x)\geqslant k]$.

(d) Établir la relation : pour tout x réel, $F_{Y_k}(x)=\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}\big(F_X(x)\big)^j\big(1-F_X(x)\big)^{n-j}$.

(e) En déduire que pour tout k de $[[1,n]]$, la fonction f_{Y_k} définie pour tout x réel par

$$f_{Y_k}(x)=k\binom{n}{k}\big(F_X(x)\big)^{k-1}\big(1-F_X(x)\big)^{n-k}f_X(x)$$

est une densité de Y_k.

(f) Montrer que si X admet un moment d'ordre r ($r\in\mathbb{N}^*$), alors pour tout k de $[\![1,n]\!]$, Y_k admet un moment d'ordre r.

• **Exemple.**

Dans les questions 2 à 4, on suppose que la fonction de répartition F_X est donnée par

$$F_X(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x\geqslant 1\\ 0 & \text{si } x<1\end{cases}$$

2. (a) Tracer la courbe représentative de F_X dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Préciser la demi-tangente à droite au point d'abscisse $x=1$.
Justifier que X est une variable aléatoire à densité et préciser une densité f_X de X.

(b) Montrer que X n'admet aucun moment.

(c) Établir l'unicité de la médiane théorique M de X. Calculer M.

(d) Expliciter, pour tout k de $[\![1,n]\!]$ et pour tout x réel l'expression $f_{Y_k}(x)$ d'une densité de Y_k. En déduire un équivalent de $f_{Y_k}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. On suppose dans cette question que $n\geqslant 3$.

(a) Montrer que pour tout k de $[\![1,n-2]\!]$, Y_k admet une espérance.

(b) En justifiant l'emploi du changement de variable $t=\frac{1}{\sqrt{x}}$, établir pour tout k de $[\![1,n-2]\!]$ la formule :

$$\mathbf{E}(Y_k)=k\binom{n}{k}\int_0^1 t^{n-k-2}(1-t)^{k-1}\,\mathrm{d}t.$$

(c) Pour tout couple (r,s) de $(\mathbb{N}^*)^2$, on pose :

$$I_{r,s}=\int_0^1 t^{r-1}(1-t)^{s-1}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que pour tout couple (r,s) de $(\mathbb{N}^*)^2$, on a : $\quad I_{r,s}=\dfrac{(r-1)!(s-1)!}{(r+s-1)!}$.

(d) En déduire l'expression de $\mathbf{E}(Y_k)$ pour tout k de $[\![1,n-2]\!]$.

(e) On suppose que n est impair et supérieur ou égal 5, et on pose $n=2\ell+1$. Justifier la définition de la médiane empirique $Y_{\ell+1}$ d'un échantillon, et établir l'égalité $\mathbf{E}(Y_{\ell+1})=4+\frac{6}{\ell-1}$. Commenter

4. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $Z_n=\dfrac{1}{n^2}\max(X_1,X_2,\ldots,X_n)=\dfrac{Y_n}{n^2}$.

(a) Calculer pour tout x réel, $F_{Z_n}(x)$.

(b) On définit la fonction φ_Z par :

$$\varphi_Z(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Montrer que φ_Z est la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z à densité.

(c) Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers Z.

5. • **Simulation**

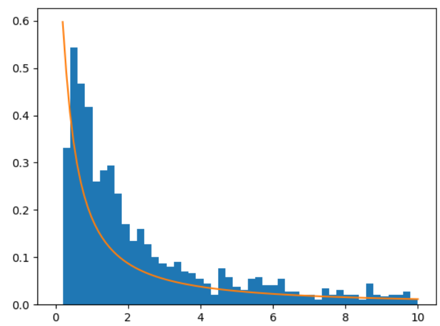
(a) Vérifier que F_X définit une bijection de $[1;+\infty[$ dans $[0;1[$. Soit G, la bijection réciproque.

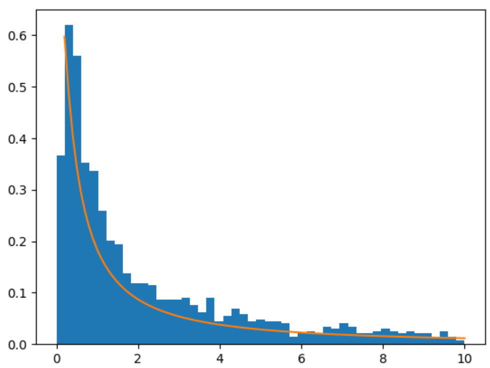
(b) Soit U, une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $]0;1[$. En considérant la variable $G(U)$, donner un programme qui permet de simuler la variable X. En déduire un programme **SimuZ** qui prend en argument n et simule la variable Z_n.

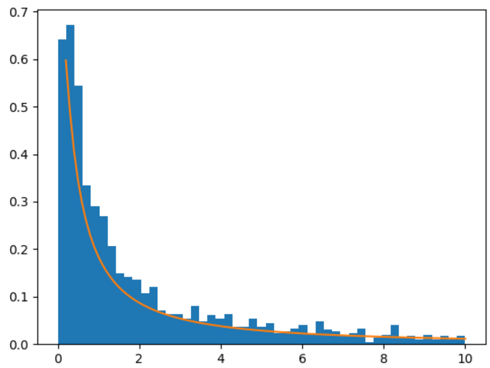
(c) Commenter le code et résultats suivants (pour $n = 2$, $n = 5$, $n = 20$).

Editeur

```
def Mystere(n):
    m=2000
    Ech=np.zeros(m)
    for i in range(m):
        Ech[i]=simuZ(n)
    plt.hist(Ech,bins=np.linspace(0,10,20),density=True)
    x=np.linspace(0,10,100)
    y=(x)**(-3/2)*np.exp(-1/np.sqrt(x))/2
    plt.plot(x,y)
    plt.show()
```







Pour une version plus abordable, on pourra consulter l'exercice 2 : HEC MATHS III 2002 voie E

Thème : Processus de Poisson

Exercice 53. ✦✦✦ *D'après ESSEC 2010, voie E*

- **Préliminaires** [3]

0.(a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Donner la limite de $\lfloor nx \rfloor / n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

0.(b) Soient $\sum a_n$, $\sum b_n$, deux séries absolument convergentes

i. Justifier que pour tout $x \in [-1,1]$, les séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont absolument convergentes (avec la convention que $0^0 = 1$). On pose

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k.$$

ii. Vérifier que pour $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\mathrm{N}} a_k x^k + o_0(x^{\mathrm{N}+1})$.

iii. En déduire que si $f = g$ alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = b_k$.

On considère un système dont le fonctionnement est défini comme suit : pour tout réel t positif, la variable aléatoire N_t à valeurs entières représente le nombre de pannes qui se produisent dans l'intervalle $[0,t]$. On considère que le système est réparé immédiatement après chaque panne.
On notera en particulier que pour $s \leqslant t$, on a $\mathrm{N}_s \leqslant \mathrm{N}_t$.
On suppose qu'on a les quatre propriétés suivantes :

- $\mathrm{N}_0 = 0$ et $0 < \mathrm{P}(\mathrm{N}_t = 0) < 1$ pour tout $t > 0$.
- Pour tous réels $t_0, t_1, \dots, t_n$ tels que $0 \leqslant t_0 < t_1 < \dots < t_n$ les variables $\mathrm{N}_{t_0}, \mathrm{N}_{t_1} - \mathrm{N}_{t_0}, \mathrm{N}_{t_2} - \mathrm{N}_{t_1}, \dots, \mathrm{N}_{t_n} - \mathrm{N}_{t_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes (accroissements indépendants)
- Pour tous réels s et t tels que $0 < s < t, \mathrm{N}_t - \mathrm{N}_s$ suit la même loi que N_{t-s} (accroissements stationnaires)
- On a la limite $\displaystyle\lim_{h \to 0, h>0} \frac{\mathbf{P}(\mathrm{N}_h > 1)}{h} = 0$.

On pose, sous réserve d'existence, pour tout $u \geqslant 0$ et pour tout s dans $[0,1]$, $\mathrm{G}_u(s) = \mathbf{E}\left(s^{\mathrm{N}_u}\right)$, avec la convention $0^0 = 1$.

1. (a) Justifier que pour tout $u \geqslant 0, \mathrm{G}_u(s)$ existe pour tout s dans $[0,1]$ et qu'on a, pour tout s dans $[0,1]$,

$$\mathrm{G}_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathrm{N}_u = k)\, s^k.$$

(b) Montrer par ailleurs que, pour tous réels u et v positifs ou nuls, et pour tout réel s tel que $0 \leqslant s \leqslant 1$, on a

$$\mathrm{G}_{u+v}(s) = \mathrm{G}_u(s)\mathrm{G}_v(s).$$

2. On fixe s tel que $0 \leqslant s \leqslant 1$.

(a) Montrer que $\mathrm{G}_1(s) > 0$.
On pose $\theta(s) = -\ln \mathrm{G}_1(s)$ et, pour $u \geqslant 0, \psi(u) = \mathrm{G}_u(s)$.

(b) Montrer que $\psi(k) = \mathrm{e}^{-k\theta(s)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(c) Soit q un entier naturel non nul. En considérant $\mathrm{G}_{\frac{1}{q}}(s)$, montrer que $\psi\left(\frac{1}{q}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{q}\theta(s)}$.

(d) Montrer que si p est entier naturel et q un entier naturel non nul, on a $\psi(r) = \mathrm{e}^{-r\theta(s)}$ où on a posé $r = \frac{p}{q}$.

(e) Montrer que pour tout réel positif u, $\mathrm{G}_u(s) = \mathrm{e}^{-u\theta(s)}$.

(f) En déduire que pour tout $s \in [0,1]$, $\displaystyle\lim_{h \to 0, h>0} \frac{\mathrm{G}_h(s) - 1}{h} = -\theta(s)$.

3. Montrer par ailleurs que pour tout $s \in [0,1]$,

$$\mathrm{G}_h(s) - 1 = \mathbf{P}(\mathrm{N}_h = 1)(s-1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathrm{N}_h = k)\left(s^k - 1\right).$$

3. Cette partie préliminaire n'était pas présente dans le sujet original.

4. Montrer que pour tout $s \in [0,1]$, $\lim\limits_{h \to 0, h>0} \dfrac{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathrm{N}_h = k)\left(s^k - 1\right)}{h} = 0$

5. (a) En déduire qu'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que $\alpha = \lim\limits_{h \to 0, h>0} \dfrac{\mathbf{P}(\mathrm{N}_h = 1)}{h}$ et que pour pour tout $s \in [0,1]$, $\theta(s) = \alpha(1-s)$.

   (b) En considérant $\mathrm{G}_u(0)$, montrer que $\alpha > 0$.

6. (a) On fixe un temps $u > 0$. Montrer que pour tout $s \in [0,1]$,

$$\mathrm{G}_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\mathrm{e}^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!} \right] s^k.$$

   (b) Déduire que pour tout $u > 0$, la variable aléatoire N_u suit la loi de Poisson de paramètre αu.

   Une famille de variables aléatoires ayant les mêmes caractéristiques que la famille $(\mathrm{N}_t)_{t \geqslant 0}$ est un processus de Poisson et la constante α s'appelle le paramètre du processus de Poisson.

7. Soit T la variable aléatoire désignant la date de la première panne. Soit $t > 0$. Comparer les événements $[\mathrm{T} > t]$ et $[\mathrm{N}_t = 0]$. En déduire que T suit la loi exponentielle de paramètre α.

8. Pour t positif fixé, on pose pour h réel positif, $\mathrm{N}_h = \mathrm{N}_{t+h} - \mathrm{N}_t$.

   (a) Montrer que $\tilde{\mathrm{N}}_h$ est la variable aléatoire qui représente le nombre de pannes survenues dans l'intervalle de temps $]t, t+h]$.

   (b) Montrer que la famille $\left(\tilde{\mathrm{N}}_h\right)_{h \geqslant 0}$ est un processus de Poisson de paramètre α.

   (c) En déduire que la première panne survenant après la date t se produit à une date suivant la loi exponentielle de paramètre α.

   (d) (ADMIS) En déduire que le processus de Poisson a la propriété que, pour chaque date t donnée, le taux de défaillance du système après t est constant.

Thème : Entropie

Exercice 54. ✦✦✦ **Via de l'optimisation sous contrainte** *oraux escp*

Soit h la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$h(x)=\begin{cases} -x\frac{\ln x}{\ln 2} & \text{si } x\in]0,1] \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}.$$

1. Soit n un entier naturel tel que $n\geqslant 2$.

   (a) Soit $\mathcal{O}=\left\{(p_1,\ldots,p_{n-1})\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^{n-1} / 1-p_1-\cdots-p_{n-1}>0\right\}$. Pour $(p_1,\ldots,p_{n-1})\in\mathcal{O}$, on pose

   $$h_n\left((p_1,\ldots,p_{n-1})\right)=h\left(1-p_1-\cdots-p_{n-1}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}h\left(p_k\right)$$

   Montrer que $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$. Montrer que h_n admet au plus un extremum sur $\mathcal{O}$.

   (b) Soit $(p_1,\ldots,p_{n-1},p_n)\in]0,1]^n$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n}p_k=1$. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n}h\left(p_k\right)\leqslant\ln n$.

   (c) Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega)=\{x_1,\ldots,x_n\}$. On pose $H(X)=\sum\limits_{x\in X(\Omega)}h(\mathbf{P}(X=x))$.

   Montrer que $H(X)\leqslant\frac{\ln n}{\ln 2}$. Quand a-t-on égalité ?

2. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p\in]0,1]$. On note $p_k=\mathbf{P}(Y=k)$ et $m=\mathbf{E}(Y)$.

   (a) Montrer que H(Y) existe et déterminer sa valeur.

   (b) Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(X)=m$ et H(X) existe. On suppose que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $q_k=\mathbf{P}(X=k)>0$.
   Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\ln\left(p_k\right)-\ln\left(q_k\right)\leqslant\frac{p_k}{q_k}-1$. En déduire que $H(X)\leqslant H(Y)$.

≫ *Reprendre le DM 4 pour une étude plus complète de l'entropie*

Thème : Simulations des lois

Exercice 55. ✦ **Lois de Pareto** *D'après EMLyon Voie E 2020*

Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x > b \\ a\frac{b^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

   On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Pareto de paramètres a et b lorsqu'elle admet pour densité la fonction f. Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X suivant la loi de Pareto de paramètres a et b.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. (a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$. Montrer que la variable aléatoire $b\mathrm{U}^{-\frac{1}{a}}$ suit la loi de Pareto de paramètres a et b.

   (b) En déduire une fonction Python d'en-tête function `X = pareto (a, b)` qui prend en arguments deux réels a et b strictement positifs et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X.

Editeur

```
import numpy as np

def pareto(a,b):
    u=np.random.rand()
    return b*u**(-1/a)
```

3.(c) On considère la fonction Python ci-dessous. Que contient la liste L renvoyée par la fonction **mystere** ?

Editeur

```
def mystere(a,b):
    L=[]
    for p in range(2,7):
        S=0
        for k in range(1,10**p):
            S+=pareto(a,b)
        L.append(round(S/10**p,5))
    return L
```

On exécute la fonction précédente avec différentes valeurs de a et de b. Comment interpréter les résultats obtenus ?

Editeur

```
>>> mystere(2,1)
[1.86379, 1.96188, 2.03994, 1.97986, 1.99862]
>>> mystere(3,2)
[3.01753, 3.08953, 2.98778, 2.99568, 2.99862]
>>> mystere(1,4)
[70.81249, 27.58769, 52.00457, 79.28056, 54.68078]
>>> mystere(1,4)
[29.62632, 45.92403, 50.88489, 79.99194, 58.12864]
```

4.(a) Montrer que X admet une espérance si et seulement si $a > 1$ et que, dans ce cas :

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \frac{ab}{a-1}.$$

4.(b) Montrer que X admet une variance si et seulement si $a > 2$ et que, dans ce cas :

$$\mathbf{V}(\mathrm{X}) = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}.$$

Exercice 56. ✦✦ *D'après la partie 3 de ESSEC 2014 E*

Dans tout le sujet, $\mathrm{I} =]a, b[$ est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, où a et b sont réels ou infinis. On dit qu'une densité de probabilité f vérifie l'hypothèse CSP(I) lorsque f est :

- continue sur I,
- strictement positive sur I,
- nulle en dehors de I.

On écrira alors simplement : f est CSP(I).

La plupart des langages informatiques possèdent un générateur de nombres aléatoires. En Python par exemple, on dispose de l'instruction **np.random.rand()** de la bibliothèque **numpy** (alias **np**). Ces générateurs produisent une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $]0,1[$.
On propose dans la suite deux méthodes permettant de simuler des lois continues quelconques en utilisant ces générateurs aléatoires.
Jusqu'à la fin du problème : on note Z une variable aléatoire continue à valeurs dans I, de fonction de répartition G et admettant une densité g qui est CSP(I).

a- Simulation par la méthode d'inversion

1. (a) On note H la restriction de G à I. Montrer que H réalise une bijection de I sur $]0,1[$. On note H^{-1} la bijection réciproque. Dresser le tableau de variations de H^{-1}.

   Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$. On pose $\mathrm{X} = \mathrm{H}^{-1}(\mathrm{U})$, et on note F la fonction de répartition de X.

   (b) Montrer que pour tout x dans I, $\mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(x)$.

   (c) En déduire que X suit la même loi que Z.

2. *Simulation de lois exponentielles.*
   On suppose dans cette question que Z suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

   (a) Expliciter l'intervalle I et les fonctions g, G et H^{-1}.

   (b) Écrire une fonction Python d'en-tête **def expo(lambda) :** qui simule la loi exponentielle.

3. *Simulation de la loi de Laplace.*
   On cherche dans cette question à simuler une variable aléatoire de densité g donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|} \quad \text{(densité de Laplace).}$$

   Soit Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
   Soit V une variable aléatoire indépendante de Y suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, ce qui signifie $\mathbf{P}([\mathrm{V} = -1]) = \mathbf{P}([\mathrm{V} = 1]) = \frac{1}{2}$. On pose $\mathrm{X} = \mathrm{VY}$.

   (a) Vérifier que g est une densité de probabilité qui est CSP($\mathbb{R}$).

   (b) Établir :
   - pour tout $x \geqslant 0$, $\mathbf{P}([\mathrm{X} > x]) = \frac{1}{2}\mathbf{P}([\mathrm{Y} > x])$;
   - pour tout $x \leqslant 0$, $\mathbf{P}([\mathrm{X} \leqslant x]) = \frac{1}{2}\mathbf{P}([\mathrm{Y} \geqslant -x])$.

   (c) En déduire une expression de la fonction de répartition de X.

   (d) Conclure que X est une variable aléatoire continue admettant g comme densité.

   (e) Écrire une fonction Python qui simule la loi de Laplace.

b- Simulation par la méthode du rejet

Dans la méthode dite du rejet, pour simuler la loi de Z de densité g, on commence par déterminer une loi de probabilité que l'on sait simuler, de densité f qui est CSP(I), et qui vérifie : il existe une constante $c > 0$ telle que $\forall x \in \mathrm{I},\ g(x) \leqslant c f(x)$.

4. Montrer qu'il existe une fonction h continue sur I et à valeurs dans $[0,1]$ telle que, pour tout $x \in \mathrm{I}, g(x) = c f(x) h(x)$ On considère alors :

   - une suite de variables aléatoires $(\mathrm{U}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui suivent la loi uniforme sur $]0,1[$.

→ une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $]a,b[$, ayant toutes la même loi de densité de probabilité f et de fonction de répartition F.

On suppose de plus que pour tout entier $n \geqslant 1$, les variables $X_1,\dots,X_n,U_1,\dots,U_n$ sont mutuellement indépendantes.
On définit N la variable aléatoire prenant comme valeur le premier indice k vérifiant $U_k \leqslant h(X_k)$.

5. ADMIS. En utilisant la partie 1, prouver l'égalité, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}([U_k \leqslant h(X_k)]) = \frac{1}{c}$.
En déduire que N suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre, l'espérance et la variance.
On définit la variable aléatoire X comme étant la valeur de X_N, c'est-à-dire la valeur de X_k pour le premier indice k vérifiant $U_k \leqslant h(X_k)$.
6. Soit $x\in I$.
   (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Exprimer l'événement $[X\leqslant x]\cap[N=n]$ à partir des événements $[X_n\leqslant x]\cap[U_n\leqslant h(X_n)]$ et $[U_k > h(X_k)]$ pour $k\in[\![1,n-1]\!]$.
   (b) (ADMIS). En utilisant la question 3.(b), montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
   $$\mathbf{P}([X_n\leqslant x]\cap[U_n\leqslant h(X_n)]) = \frac{1}{c}G(x).$$
   (c) En déduire $\mathbf{P}([X\leqslant x]\cap[N=n])$ en fonction de c et de $G(x)$.
   (d) Montrer finalement : $\mathbf{P}([X\leqslant x]) = G(x)$.
7. Conclure.
8. *Simulation de la loi normale.*
Dans cette question, Z suit la loi normale centrée et réduite, donc $I=\mathbb{R}$.
Soit f la densité de Laplace (question 3), définie par $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$.
   (a) Donner une densité g de Z qui est CSP($\mathbb{R}$).
   (b) Étudier les variations sur $[0,+\infty[$ de la fonction $a : x\mapsto e^{x-\frac{x^2}{2}}$.
   (c) Expliciter une constante $c>0$ telle que, pour tout $x\geqslant 0$: $g(x)\leqslant \frac{c}{2}e^{-x}$.
   (d) En déduire que pour tout x réel, $g(x)\leqslant c f(x)$.
   (e) Expliquer alors comment mettre en place la méthode du rejet pour simuler la loi normale centrée et réduite. On explicitera en particulier la fonction h introduite à la question 4.
   (f) Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle simule la loi normale centrée réduite :

Editeur

```
def simulnormaleCR():
    ...

    while ... :

       x=laplace()
       u=np.random.rand()
           ...
    return normale=
```

   (g) Comment simuler une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$?

Exercice 57. ✦
On considère X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1 et pour $n\in\mathbb{N}$, $Y_n=\frac{-X}{1+e^{-nX}}$. On dispose d'une fonction **simulY** qui prend en argument deux entiers n et m, et qui renvoie une m simulations de la réalisation de Y_n.
Que fait le programme suivant?

Editeur

```
import numpy as np
n=int(input ('Entrer la valeur de n '))
print(np.mean(simulY(n, 1000)))
```

Thème : Python

Exercice 58. ✧ **Deux programmes de première année**

1. Écrire un programme qui prend en argument une fonction f, un entier naturel non nul n et deux réels a, b (avec $a < b$) et renvoie la somme de Riemann d'ordre de f :
$$\mathrm{S}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$
2. Donner une approximation de $\sqrt{2}$ par l'algorithme de dichotomie à 10^{-5} près.

Exercice 59. ✦✦
La série $\sum \frac{1}{n^3}$ est convergente. Écrire un programme qui calcule les termes successifs de la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des sommes partielles de cette série jusqu'à ce que $\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1} < 10^{-10}$ et renvoie le dernier S_n calculé.

Exercice 60. ✦✦ **Polynômes de Lagrange**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, $n+1$ nombres réels distincts deux à deux.
Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on définit la fonction polynôme L_k par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{L}_k(x) = \prod_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ j\neq k}} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

1. Écrire une fonction **Lagrange(X,k,x)** qui prend en entrée une matrice ligne **X**= $[x_0, x_1, \dots, x_n]$, un entier $k \in [\![0; n]\!]$ et un réel x, puis renvoie le nombre $\mathrm{L}_k(x)$.
2. Tracer sur l'intervalle $[-3, 3]$ chacune des courbes des polynômes L_k correspondant à **X**= $[-2, -1, 0, 1, 2]$

Exercice 61. ✦
Compléter le script ci-contre pour qu'il calcule et affiche, à l'aide de la méthode de Monte-Carlo, une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^1 \ln\left(1+t^2\right)\,\mathrm{d}t$:

Editeur
```
import numpy as np
U=rd.random(100000)
V=np.ln(1+U**2)
I=   ...
     ...
```

Exercice 62. ✦
On considère X, Y deux variables de Poisson indépendantes de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$.

1. Écrire une fonction d'en-tête **def estime(Lambda) :** qui, prenant en argument un réel Lambda strictement positif, simule un grand nombre de fois les variables aléatoires X et Y, et renvoie une estimation de $\mathbf{P}([\mathrm{X}=\mathrm{Y}])$.
*Rappel. La commande **np.random.poisson(mu,n)** renvoie un tableau de nombres de taille n dont chaque coefficient suit une loi de Poisson d'espérance **mu**.*
2. Adapter le programme pour X et Y suivant une loi géométrique de paramètre p (vérifier par un calcul théorique le résultat obtenu).

Exercice 63. ✧
Soit $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{U}(]0;1])$ et $\mathrm{Y} = -\ln(\mathrm{X})$

1. Donner la loi de Y.
2. Quelle est la loi simulée par le programme ci-contre ?

Editeur
```
def simulation(n): # n est un entier > 1
    u=np.random.rand(n)
    p=np.prod(u) # effectue le produit
        des coefficients de u
    return -np.log(p)
```

Exercice 64. ✦✦ **Pile-Pile** *d'après Ecricome 2021 E*
On lance indéfiniment une pièce équilibrée. On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois

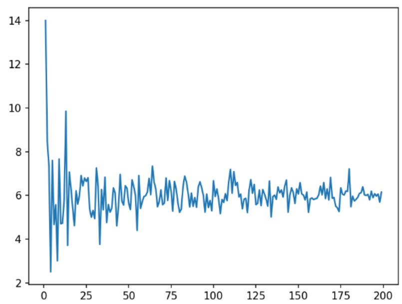
deux «Pile» consécutifs. On modélise cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On note alors X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient deux «Pile» consécutifs. Si on obtient jamais deux «Pile» consécutifs, on conviendra que X vaut -1. Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face,... alors X prend la valeur 5.
1. Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle simule les lancers de la pièce jusqu'à l'obtention de deux «Pile» consécutifs, et qu'elle renvoie le nombre de lancers effectués.

Editeur

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def simulationX():
    tirs=0
    pile=0
    while pile ... :
        if np.random.rand()<1/2:
            pile= ...
        else :
            pile= ...
        tirs= ...
    return tirs
```

2. Écrire une fonction Python d'en-tête **moyenne (n)** qui simule n fois l'expérience ci-dessus et renvoie la moyenne des résultats obtenus.

3 On calcule moyenne (n) pour chaque entier n de $[\![1,200]\!]$, et on trace les résultats obtenus dans le graphe ci-contre.
Que pouvez-vous conjecturer sur la variable aléatoire X?

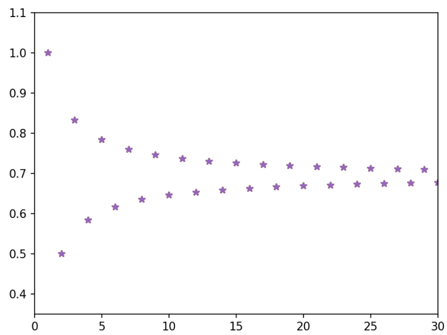


Exercice 65. ✦✦ Suites adjacentes
On considère le programme suivant :

Editeur

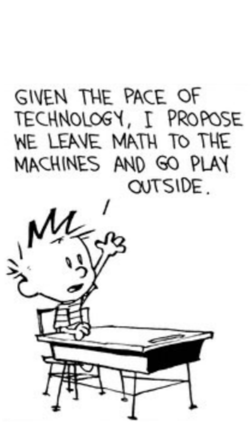
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

n=30
x=np.arange(1,n+1)
y=np.zeros(n)
eps=1
for i in range(n):
    y[i]=eps/(i+1)
    eps=eps*(-1)
z=np.cumsum(y)

plt.axis([0, 30, 0.35, 1.1])
plt.plot(x,z,'*')
plt.show()
```

Ci-dessous, le résultat obtenu :



1. Préciser le contenu des variables y et z après l'exécution du programme.
2. Ce graphe suggère que deux suites sont adjacentes. Lesquelles ?
3. Démontrer cette conjecture.

Notes personnelles



CALVIN ET HOBBES