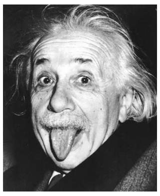
CHAPITRE 1

Révisions en analyse

Do not worry too much about your difficulties in mathematics, I can assure you that mine are still greater.

ALBERT EINSTEIN



1 Suites et séries

Exercice 1. ✦ Discuter en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergence de la série

$$\sum \frac{\dfrac{\cos(1/n)^{\pi}}{\sin(\pi/n)} \mathrm{e}^{\ln(n+666)-\ln(n)} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{2n}}{7 \cdot n^{\alpha}}.$$

≫ Solution p. 8

Exercice 2. ✦✦ *d'après EMlyon*

Soient x un nombre réel strictement positif et (u_n) la suite réelle ainsi définie :

$$u_0 = x, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2\sqrt{u_n}}$$

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 1$.
2. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est monotone et convergente.
   b) Déterminer la limite de cette suite.
3. On suppose maintenant que $x \neq 1$ et on considère la série de terme général $v_n = -1 + u_n$.
   a) Étudier la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de v_{n+1}/v_n.
   b) Que peut-on conclure pour la série de terme général v_n ?
   c) En déduire que la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}_n = \prod_{k=0}^{n} u_k.$$

≫ Solution p. 8

2 Intégrales et intégrales généralisées

Exercice 3. ✦✦ *d'après Ecricome*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ ainsi que la suite réelle $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ suivante :

$$\mathrm{I}_0 = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[f(x)\right]^n \mathrm{d}x.$$

A - Étude de la bijection réciproque de f

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque.
2. Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1}.
3. Justifier que :
$$\forall x \in \mathrm{J}, \qquad \cos\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \sin\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}.$$
4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathrm{J}\backslash\{1\}$ et :
$$\forall x \in \mathrm{J} \setminus \{1\}, \qquad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$
5. En déduire le développement limité en $\sqrt{2}$ de f^{-1} à l'ordre 1.

B - Étude de la suite d'intégrales

1. Justifier que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie. Calculer I_2.
2. Déterminer les réels a et b, tels que : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{a}{1-t} + \dfrac{b}{1+t}.$
3. En posant $t = \sin x$, déterminer I_1.
4. Déterminer le sens de variation de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5. a) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}, \qquad \mathrm{I}_n \geqslant \int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)^n}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{n^2}\,\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)^n}.$$
   b) En déduire le comportement de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{I}_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{n}{n+1}\mathrm{I}_n.$$

≫ Solution p. 9

Exercice 4. ✦✦✦ *d'après EDHEC*

Dans la suite, α désigne un nombre réel fixé supérieur ou égal à 1, et on pose :

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} t^n\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale I est absolument convergente.
2. a) Calculer I_0.
   b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que si I_{n-1} est convergente, il en est de même de I_n, et trouver une relation entre I_n et I_{n-1}.
   c) En déduire la convergence de I_n et la valeur de I_n en fonction de n et α.
3. a) *Rappeler les formules de Taylor-Young et Taylor avec reste intégral. Préciser bien les hypothèses.*
   En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction sinus sur l'intervalle $[0, x]$, montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

b) En déduire que :
$$\left|\mathrm{I}-\left(\mathrm{I}_0-\frac{\mathrm{I}_2}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{\mathrm{I}_{2n}}{(2n+1)!}\right)\right| \leqslant \mathrm{K}\mathrm{I}_{2n+1},$$
K étant un nombre réel que l'on précisera en fonction de n.

c) En déduire : $\mathrm{I}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{3\alpha^3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)\alpha^{2n+1}}\right)$.

4. **a)** Rappeler la définition de la fonction arctangente, préciser son graphe ainsi que l'équation de la tangente en 0. Enfin, vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$
$$\operatorname{Arctan}(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

b) Montrer que :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \forall t\in[0,1],\qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}-\frac{1}{1+t^2}=(-1)^n\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

c) En déduire que :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \forall x\in[0,1],\qquad \left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}-\operatorname{Arctan}(x)\right|\leqslant\frac{1}{2n+3}.$$

d) En déduire une expression très simple de I en fonction de α utilisant la fonction Arctan.

≫ Solution p. 11

Exercice 5. ✦✦ Exemple d'intégrales à paramètres : lien entre les fonctions Beta et Gamma

A - Préliminaires

Soit Φ la fonction définie par :
$$\forall x\in\mathbb{R}_*^+,\quad \Phi(x)=\int_0^{+\infty}\ln(t)\,t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
Pour tout réel $x>0$ fixé, on note $\varphi_x : t\in\mathbb{R}_*^+\mapsto\ln(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.

1. Justifier que Φ est bien définie.
2. Vérifier que la fonction Φ est croissante.
3. Montrer que :
$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad t\leqslant \mathrm{e}^t-1\leqslant t\mathrm{e}^t.$$
4. **a)** Soit $x\in\mathbb{R}_*^+$. Comparer $\Phi(x/2),\Phi(x+h)$ et $\Phi(2x)$ pour tout $h\in[-x/2,x]$.

   b) En déduire $\lim\limits_{h\to0}h\Phi(x+h)$.

Dans la suite, on admet que la fonction Φ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.

B - La fonction Gamma

Pour tout réel $x\in\mathbb{R}_*^+$, on pose
$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. En utilisant l'intégrale de Gauss $\left(\mathrm{I}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\sqrt{\pi}\right)$, donner la valeur de $\Gamma(1/2)$.
2. Justifier que pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.
3. *Dérivabilité*

   a) Soit $x\in\mathbb{R}_*^+$. Montrer que :
$$\forall h\in]-x,+\infty[,\qquad h\Phi(x)\leqslant\Gamma(x+h)-\Gamma(x)\leqslant h\Phi(x+h).$$

   b) En déduire la dérivabilité de Γ sur $\mathbb{R}_*^+$ et préciser $\Gamma'(x)$.

4. a) Comparer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$, en déduire qu'il existe $\alpha \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$.
b) En utilisant la question 2, donner un équivalent simple de $\Gamma(x)$ en 0^+.
c) Préciser la convexité de Γ.
d) À l'aide des dernières questions, donner l'allure du graphe de Γ sur $]0;2[$.

C - La fonction Beta

✦✦✦✦ Pour tous x et y réels strictement positifs, on pose

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

1. Prouver la convergence de l'intégrale définissant $\mathrm{B}(x,y)$.
2. a) Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \forall y \in \mathbb{R}_*^+, \mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x)$.
b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \forall y \in \mathbb{R}_*^+, \mathrm{B}(x+1,y) = \frac{x}{y}\mathrm{B}(x,y+1)$.
3. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \forall y \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \mathrm{B}(x,y+1) = \mathrm{B}(x,y) - \mathrm{B}(x+1,y).$$

En déduire que :

$$\mathrm{B}(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\mathrm{B}(x,y).$$

4. Soient n un entier naturel non nul et x un réel strictement positif.
a) À l'aide de l'inégalité de gauche de la question A-3, montrer que

$$\forall t \in [0;n], \qquad \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

b) Montrer que pour tout $t \in [0;n]$, on a $\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)\mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$.
c) En déduire que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

5. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.$$

6. a) Soit $y \in \mathbb{R}_*^+$. Justifier que

$$\mathrm{B}(n+1,y) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{n^y} \quad \text{puis} \quad \mathrm{B}(x,y) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{x^y}.$$

b) Soient x, y, deux réels strictement positifs.
i) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\mathrm{B}(x+n,y)}{\mathrm{B}(x,y)} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{x+k}{x+y+k}\right) \quad \text{puis} \quad \frac{\mathrm{B}(x+n,y)n^y}{\mathrm{B}(x,y)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}.$$

ii) Conclure en montrant que

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

≫ Solution p. 12

Exercice 6. ✦✦✦ On pose, pour tout entier naturel n,

$$\mathrm{C}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \mathrm{D}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\cos x)^{2n}\,\mathrm{d}x.$$

1. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\mathrm{C}_n = (2n-1)\left(\mathrm{C}_{n-1} - \mathrm{C}_n\right)$.
   On pourra écrire $\cos^{2n} x = \cos x \cos^{2n-1} x$.
2. Établir, pour tout entier naturel n non nul, les égalités

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 (\cos x)^{2n-2}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{C}_n}{2n-1} = \frac{\mathrm{C}_{n-1}}{2n}.$$

3. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\mathrm{C}_n = (2n-1)n\mathrm{D}_{n-1} - 2n^2\mathrm{D}_n$.
4. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\dfrac{1}{n^2} = 2\left(\dfrac{\mathrm{D}_{n-1}}{\mathrm{C}_{n-1}} - \dfrac{\mathrm{D}_n}{\mathrm{C}_n}\right)$.
5. **a)** Justifier, pour tout réel $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la minoration : $\sin x \geqslant \dfrac{2}{\pi} x$.

   b) En déduire, pour tout entier naturel n, la majoration : $\mathrm{D}_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4} \dfrac{\mathrm{C}_n}{2n+2}$.
6. Prouver l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Indications

- **Exercice 1**

Déterminer un équivalent simple de chacun des facteurs pour appliquer le critère d'équivalence des séries à termes positifs.

- **Exercice 2**

2.b) Soit ℓ, la limite. Passer à la limite dans la relation de récurrence pour obtenir une équation vérifiée par ℓ. Étudier ensuite la fonction :

$$f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto 2x\sqrt{x} - 1 - x$$

pour trouver l'unique réel ℓ tel que $f(\ell) = 0$.

3.a) Vérifier que

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = -\frac{u_n - 1}{2\sqrt{u_n}}.$$

En déduire la limite du quotient.

3.b) Déduire de la limite précédente qu'il existe un entier N_0 tel que pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}_0$,

$$0 \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} v_n.$$

Conclure en comparant la suite $(v_n)_n$ à la suite géométrique $(1/2^n)_n$.

3.c) Considérer $\ln(\mathrm{P}_n)$.

- **Exercice 3**

A.3. Pour $x \in \mathrm{J}$, que dire de $f \circ f^{-1}(x)$?
Pour la seconde relation, on rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1.$$

A.4. Rappelons le théorème de dérivation de l'application réciproque.
Soient $f : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$, $a \in \mathrm{I}$ et $b = f(a)$.
Si
→ f est bijective et
→ f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$,
alors f^{-1} est dérivable en b avec

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

A.5. Pour une fonction g dérivable dans un voisinage de a, on dispose du DL à l'ordre 1 :

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + o_a(x-a).$$

B.1. Justifier que la fonction tangente est dérivable sur $[0;\pi/4]$ et

$$\tan' = \frac{1}{\cos^2}.$$

B.3. Effectuer un changement de variable

$$t = \sin(x), \quad \mathrm{d}t = \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ne pas oublier

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

pour pouvoir se ramener à la question précédente.

B.4. Vérifier que

$$\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = \int_0^{\pi/4} f(x)^n \big(f(x) - 1\big)\,\mathrm{d}x.$$

Puis étudier le signe de l'intégrande.

B.5.a) Poser $a_n = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}$ et justifier ensuite les inégalités

$$\int_0^{\pi/4} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{a_n}^{\pi/4} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{a_n}^{\pi/4} f(a_n)\,\mathrm{d}x.$$

B.5.b) Justifier l'existence de $q \in]0;1[$ tel que

$$\mathrm{I}_n \geqslant \frac{1}{n^2 q^n}.$$

En déduire la limite.

B.6. Procéder par intégration par parties. Justifier de plus que :

$$\tan(x) f'(x) f(x)^{n-1} = f(x)^{n+2} - f(x)^n.$$

- **Exercice 4**

1. Pour l'étude en $+\infty$, partir de l'inégalité :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+, \quad |\sin(t)| \leqslant t.$$

2.b) Intégrer par parties pour obtenir

$$\mathrm{I}_n = \frac{n}{\alpha} \mathrm{I}_{n-1}.$$

2.c) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{I}_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$$

3.a) On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sin^{(2n)} = (-1)^n \sin \quad \text{et} \quad \sin^{(2n+1)} = (-1)^n \cos.$$

4.b) Reconnaître une somme géométrique.

- **Exercice 5**

A.1. C'est une intégrale généralisée en 0 et $+\infty$. Pour tout $x > 0$, montrer que $\varphi_x(t)$ est :
- négligeable devant $1/t^2$ lorsque t tend vers $+\infty$,
- négligeable devant $t^{x/2-1}$ lorsque t tend vers 0^+.

A.3. Pour l'inégalité de gauche, penser à un argument de convexité. Pour celle de droite, étudier la fonction $g : t \in \mathbb{R} \mapsto t\mathrm{e}^t - (\mathrm{e}^t - 1)$.

B.1. Effectuer un changement de variable $u = \sqrt{t}$.

B.2. Faire une intégration par parties.

B.3.b) Revenir à la définition du nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement.
On trouve $\Gamma'(x) = \Phi(x)$.

B.4.b) Justifier que $\Gamma(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1/x$ à l'aide de la question B.2.

C.1. Faire une comparaison avec des intégrales de Riemann.

C.2.a) Faire un changement de variable $u = 1 - t$.

C.2.b) Procéder par une intégration par parties.

C.4.a) Remplacer t par $-t/n$.

C.4.b) Que dire si $t \in [\sqrt{n}; n]$?
Étudier dans un second temps la fonction définie sur $[0, \sqrt{n}[$ par :

$$f : t \mapsto n\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) + t - \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right).$$

C.4.c) Partir de l'encadrement

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

et de la limite

$$\int_0^n \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x).$$

C.5. Justifier que

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = n^x\,\mathrm{B}(n+1, x)$$

puis que

$$\mathrm{B}(n+1, y) = \frac{n}{n+y}\mathrm{B}(n, y) = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+y)}\right)\mathrm{B}(1, y) \quad (\bullet)$$

C.6.a) Pour la première équivalence, utiliser la relation précédente $(\bullet)$.
Pour la seconde équivalence, utiliser la fait que la fonction

$$u \mapsto \mathrm{B}(u, y)$$

est décroissante, pour écrire

$$\mathrm{B}(n, y) \geqslant \mathrm{B}(x, y) \geqslant \mathrm{B}(n+1, y)$$

où $n = \lfloor x \rfloor$.

C.6.b)i) Pour la première égalité, ne pas oublier la question C.3.
Pour l'équivalent, utiliser la question C.5.

C.6.b)ii) Utiliser

$$\mathrm{B}(x, y) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{x^y}$$

qui permet aussi d'avoir un équivalent simple de $\mathrm{B}(x+n, y)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Puis utiliser aussi

$$\frac{\mathrm{B}(x+n, y)\,n^y}{\mathrm{B}(x, y)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}.$$

Solutions

Exercice 1 p. 1

Par continuité de la fonction cosinus

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \cos(0) = 1.$$

Par équivalent usuel, $\pi/n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{n}$$

De plus,

$$e^{\ln(n+666)-\ln(n)} = e^{\ln\left(1+\frac{666}{n}\right)} = 1 + \frac{666}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Or par équivalent usuel, on a aussi

$$2n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} 2n\cdot\left(-\frac{1}{n}\right) = -2.$$

Puis par continuité de la fonction exponentielle

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n} = \exp\left(2n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-2}.$$

Par produit, le terme général est alors équivalent à

$$\frac{e^{-2}}{7\pi}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série de l'énoncé et la série $\sum 1/n^{\alpha-1}$ sont de même nature. Par les séries de Riemann, il y a convergence si et seulement si $\alpha-1>1$, soit $\alpha>2$.

Exercice 2 p. 1

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$

$$u_n - 1 = \frac{1+u_{n-1}}{2\sqrt{u_{n-1}}} - 1 = \frac{1-2\sqrt{u_{n-1}}+u_{n-1}}{2\sqrt{u_{n-1}}}$$
$$= \frac{(1-u_{n-1})^2}{2\sqrt{u_{n-1}}} \geqslant 0.$$

D'où le résultat.

2.a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1+u_n}{2\sqrt{u_n}} - u_n = \frac{1+u_n\left(1-2\sqrt{u_n}\right)}{2\sqrt{u_n}}.$$

Or $1-2\sqrt{u_n} \leqslant 1-2\sqrt{1} \leqslant -1$ et

$$1+u_n\left(1-2\sqrt{u_n}\right) \leqslant 1-u_n \leqslant 0.$$

On en déduit que $u_{n+1}-u_n \leqslant 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Elle est aussi minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, la suite est convergente.

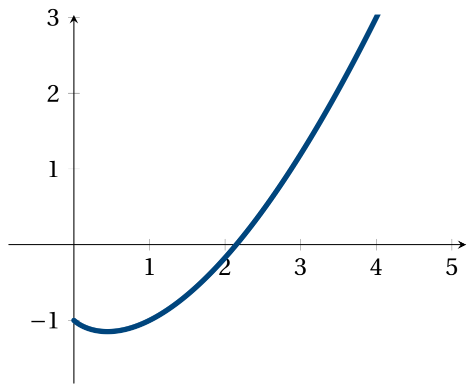
2.b) Soit ℓ, la limite. Comme

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2\sqrt{u_n}}$$
$$\ell = \frac{1+\ell}{2\sqrt{\ell}}.$$

Soit $2\sqrt{\ell}\cdot\ell = 1+\ell$, puis

$$2\sqrt{\ell}\cdot\ell - 1 - \ell = 0.$$

L'étude de la fonction continue $x\in\mathbb{R}_*^+ \mapsto 2\sqrt{x}\cdot x - 1 - x$ donne une unique solution positive (théorème de la bijection sur $[1;+\infty[$).



On constate que $\ell = 1$ est une solution « évidente ». Finalement

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

3.a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1+u_n}{2\sqrt{u_n}} - 1}{u_n - 1} = \frac{(1-u_n)^2}{2\sqrt{u_n}\,(u_n-1)} = -\frac{u_n-1}{2\sqrt{u_n}}.$$

Comme $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, on a maintenant

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3.b) En revenant à la définition de la limite d'une suite, il existe $N_0\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad n\geqslant N_0 \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

D'où pour $n\geqslant N_0$

$$0\leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}v_n$$

Par récurrence, il vient :

$$0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{2^{n-N_0}} \cdot v_{N_0}.$$

Autrement dit, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_0, \qquad 0 \leqslant v_n \leqslant \frac{c}{2^n}.$$

La série géométrique $\sum 1/2^n$ est convergente $1/2 \in]-1;1[$. Par le critère de comparaison, $\sum v_n$ converge.

3.c) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\ln(P_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(u_k)$$

Or $\quad \ln(u_n) = \ln(1+v_n) \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \quad$ car $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs (question 1, $v_n \geqslant 0$), la série $\sum \ln(u_n)$ converge. Par définition, la suite des sommes partielles de la série (c'est-à-dire la suite $\left(\ln(P_n)\right)_n$) converge vers une limite finie. Enfin, par continuité de l'exponentielle, la suite $(P_n)_n$ converge.

Exercice 3 p. 2

A.1. La fonction cosinus est strictement croissante sur $[0;\pi/4]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$. La fonction inverse $x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto 1/x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$. Par composition, f est strictement croissante $[0;\pi/4]$.
De plus, f est continue et

$$f(0) = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}/2} = \sqrt{2}.$$

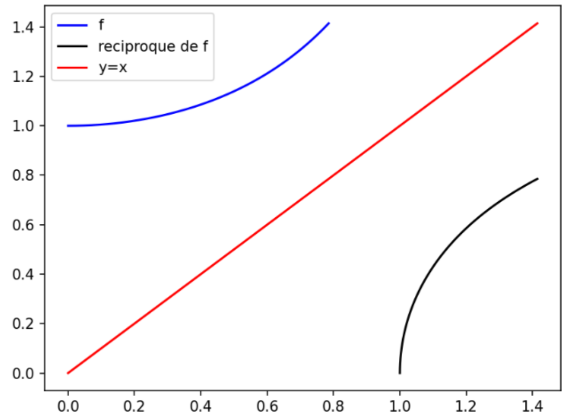
D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[0;\pi/4]$ dans

$$J = [1;\sqrt{2}].$$

A.2. Utilisons Python. On rappelle que le graphe de la réciproque s'obtient par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

plt.clf()
x=np.linspace(0,np.pi/4,200)
y=1/np.cos(x)
plt.plot(x,y,'b',label='f')
plt.plot(y,x,'k',label='reciproque de f')
plt.plot([0,2**(1/2)],[0,2**(1/2)],'r',
    label='y=x')
plt.legend()
plt.show()
```



A.3. Par construction de l'application réciproque, pour tout $x \in J$

$$f \circ f^{-1}(x) = x.$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\cos\left(f^{-1}(x)\right)} = x.$$

On en déduit la première relation par passage à l'inverse. De plus

$$\begin{aligned}\sin^2\left(f^{-1}(x)\right) &= 1 - \cos^2\left(f^{-1}(x)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{x^2}.\end{aligned}$$

Comme $f^{-1}(x) \in [0;\pi/4]$, $\sin\left(f^{-1}(x)\right) \geqslant 0$ et on a bien la seconde formule.

A.4. Par quotient, f est dérivable sur $[0;\pi/4]$ avec

$$\forall x \in [0;\pi/4], \quad f'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}.$$

Pour tout $x \in I\setminus\{0\}$, $f'(x) \neq 0$. Par le théorème de dérivation de l'application réciproque, f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{f(0)\} = J \setminus \{1\}$ avec :

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{\cos^2\left(f^{-1}(x)\right)}{\sin\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

On en déduit la formule demandée à l'aide des relations de la question précédente.

A.5. La fonction f^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$ donc il existe un DL en $\sqrt{2}$ à l'ordre 1 et :

$$f^{-1}(x) = f^{-1}(\sqrt{2}) + \left(f^{-1}\right)'(\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) + o_{\sqrt{2}}(x-\sqrt{2}).$$

Or $f(\pi/4) = \sqrt{2}, \pi/4 = f^{-1}(\sqrt{2})$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2-1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'où

$$\left(f^{-1}\right)(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + o_{\sqrt{2}}(x-\sqrt{2}).$$

B.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \in [0;\pi/4] \mapsto f(x)^n$ est continue, l'intégrale I_n est donc bien définie. De plus

$$\mathrm{I}_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\tan(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1.$$

B.2. Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

$$\begin{aligned}\frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} &= \frac{a(1+t)+b(1-t)}{(1-t)(1+t)}\\ &= \frac{(a+b)+(a-b)t}{1-t^2}.\end{aligned}$$

Par identification, on cherche a, b tels que

$$\begin{cases} a+b &= 1\\ a-b &= 0\end{cases}$$

On constate que le choix $a = b = 1/2$ convient.

B.3. Le changement de variable $t = \sin x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ avec $\mathrm{d}t = \cos(x)\,\mathrm{d}x$. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)^2}\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-\sin(x)^2}\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x\\ \mathrm{I}_1 &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On poursuit à l'aide de la question précédente

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1 &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\,dt\\ &= \frac{1}{2}\left[-\ln(t-1)+\ln(1+t)\right]_0^{\sqrt{2}/2}.\end{aligned}$$

Après simplifications, il vient

$$\mathrm{I}_1 = \frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2}).$$

B.4. Comme pour $x \in [0;\pi/4]$, $f(x) \geqslant 1$, on a

$$f(x)^n \leqslant f(x)\cdot f(x)^n = f(x)^{n+1}.$$

Par croissance de l'intégrale (avec les bornes dans le bon sens)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)^n\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x.$$

C'est-à-dire $\qquad \mathrm{I}_n \leqslant \mathrm{I}_{n+1}.$

La suite $(\mathrm{I}_n)_n$ est croissante.

B.5.a) Posons $a_n = \pi/4 - 1/n^2$. Comme f est une fonction positive

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)^n\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{a_n}^{\frac{\pi}{4}} f(x)^n\,\mathrm{d}x.$$

De plus, f est croissante et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Ainsi f^n est croissante : elle est donc minorée sur $[a_n;\pi/4]$ par $f(a_n)^n$. Par croissance de l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_{a_n}^{\frac{\pi}{4}} f(x)^n\,\mathrm{d}x &\geqslant \int_{a_n}^{\frac{\pi}{4}} f(a_n)^n\,\mathrm{d}x\\ &\geqslant \left(\frac{\pi}{4} - a_n\right) f(a_n)^n\end{aligned}$$

D'où le résultat en remplaçant a_n et $f(a_n)$ par leurs expressions.

B.5.b) On peut poursuivre la minoration. Il existe $b \in [0;\pi/4[$ tel que pour tout $n \geqslant 2$

$$\mathrm{I}_n \geqslant \frac{1}{n^2}\frac{1}{\cos(b)^n}.$$

Comme $1/\cos(b) > 1$, par les croissances comparées

$$\frac{1}{n^2}\frac{1}{\cos(b)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

Par minoration,

$$\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

B.6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Procédons par une intégration par parties sachant que les fonctions considérées sont de classe $\mathscr{C}^1$. Rappelons que sur $f^2 = \tan'$ sur $[0;\pi/4]$.

$$\begin{aligned}&\mathrm{I}_{n+2}\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)^{n+2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)^2\cdot f(x)^n\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan'(x)\cdot f(x)^n\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\tan(x)\cdot f(x)^n\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,n f'(x) f(x)^{n-1}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or, on constate que

$$\begin{aligned}\tan(x)\cdot f'(x) &= \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^3}\\ &= \frac{1-\cos(x)^2}{\cos(x)^3}\\ &= f(x)^3 - f(x).\end{aligned}$$

On a donc

$$\tan(x) f'(x) f(x)^{n-1} = f(x)^{n+2} - f(x)^n$$

puis

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,n f'(x) f(x)^{n-1}\,\mathrm{d}x = n(\mathrm{I}_{n+2} - \mathrm{I}_n).$$

De plus, on a aussi

$$\left[\tan(x)\cdot f(x)^n\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{2})^n,$$

il vient $\quad \mathrm{I}_{n+2} = (\sqrt{2})^n - n(\mathrm{I}_{n+2} - \mathrm{I}_n).$

Ce qui donne le résultat.

Exercice 4

p. 2

1. La fonction

$$\varphi : t \longmapsto \left| \mathrm{e}^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} \right|$$

est continue sur $]0, +\infty[$. On a une intégrale généralisée en 0 et $+\infty$.

- *Étude en 0.*

À partir de l'équivalent usuel de sinus en 0,

$$\sin(t) \underset{t \to 0}{\sim} t \quad \text{et} \quad \varphi(t) \underset{t \to 0}{\sim} 1.$$

La fonction φ est prolongeable par continuité en 0, l'intégrale est convergente au voisinage de 0 (on dit que l'intégrale est faussement impropre en 0).

- *Étude en $+\infty$.*

Comme :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad |\sin t| \leqslant t,$$

on a :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad 0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\, \mathrm{d}t$ est convergente, le critère de comparaison sur les intégrales des fonctions positives permet d'affirmer la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left| \mathrm{e}^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} \right| \mathrm{d}t.$$

C'est-à-dire l'absolue convergence de l'intégrale I.

2.a) On a directement

$$\mathrm{I}_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\, \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\alpha} \mathrm{e}^{-\alpha t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha}.$$

2.b) Si I_{n-1} est convergente et sachant que les fonctions $t \mapsto t^n$ et $t \mapsto -\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, et le crochet ayant une limite finie, 0 , en $+\infty$, on peut directement intégrer par parties sur $[0, +\infty[$, et les deux intégrales écrites seront de même nature.

$$\mathrm{I}_n = \left[-\frac{1}{\alpha} t^n \mathrm{e}^{-\alpha t} \right]_0^{+\infty} + \frac{n}{\alpha} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} t^{n-1}\, \mathrm{d}t.$$

Dès lors, si (I_{n-1}) est convergente alors I_n est convergente et

$$\mathrm{I}_n = \frac{n}{\alpha} \mathrm{I}_{n-1}.$$

2.c) On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est convergente et

$$\mathrm{I}_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$$

3.a) Soient $x \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$.
La fonction sinus est de classe $\mathscr{C}^{2n+2}$ sur $[0, x]$. On peut donc appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n+1$. De plus,

$$\sin^{(2k)}(0) = 0, \quad \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$$

et $\quad \left|\sin^{(2n+2)}(t)\right| = \left|(-1)^{n+1} \sin t\right| \leqslant 1.$

Il vient alors

$$\begin{aligned} &\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \right| \\ &\leqslant \left(\max_{t \in (0,x]} \left|\sin^{(2n+2)}(t)\right| \right) \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \\ &\leqslant \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}. \end{aligned}$$

3.b) En renommant x en t et en multipliant les deux membres de l'inégalité précédente par $\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{t} \geqslant 0$, il vient

$$\left| \mathrm{e}^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t} - \left(\mathrm{e}^{-\alpha t} - \frac{1}{3!} \mathrm{e}^{-\alpha t} t^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \mathrm{e}^{-\alpha t} t^{2n} \right) \right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t} t^{2n+1}}{(2n+2)!}.$$

Par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale (toutes les intégrales étant convergentes), on obtient finalement implique :

$$\left| \mathrm{I} - \left(\mathrm{I}_0 - \frac{\mathrm{I}_2}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{\mathrm{I}_{2n}}{(2n+1)!} \right) \right| \leqslant \frac{\mathrm{I}_{2n+1}}{(2n+2)!} \mathrm{I}_{2n+1}.$$

En particulier, on peut choisir

$$\mathrm{K} = \frac{1}{(2n+2)!}.$$

3.c) On sait que

$$\frac{\mathrm{I}_{2n+1}}{(2n+2)!} = \frac{1}{(2n+2)\alpha^{2n+2}}.$$

Sachant que $\alpha \geqslant 1$, on peut affirmer par les croissances comparées que ce terme tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. En appliquant le théorème d'encadrement à partir de l'inégalité de la question précédente, on obtient

$$\mathrm{I} = \lim_{n \to +\infty} \left(\mathrm{I}_0 - \frac{\mathrm{I}_2}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{\mathrm{I}_{2n}}{(2n+1)!} \right).$$

Or, on a aussi

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{I}_k = \frac{k!}{\alpha^{k+1}}.$$

Ce qui conclut.

4.a) Cours.
Comme la fonction arctangente est de classe $\mathscr{C}^1$, on a par le théorème fondamentale de l'analyse que

$$\operatorname{Arctan}(x)-\operatorname{Arctan}(0)=\int_0^x \operatorname{Arctan}'(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'où le résultat.

4.b) Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $t\in[0,1]$. En utilisant une somme géométrique de raison $-t^2\neq 1$, on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}-\frac{1}{1+t^2}&=\sum_{k=0}^{n}\left(-t^2\right)^k-\frac{1}{1+t^2}\\&=\frac{1-\left(-t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}-\frac{1}{1+t^2}\\&=(-1)^n\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.\end{aligned}$$

4.c) Soit $x\in[0,1]$. En intégrant la relation précédente sur $[0;x]$

$$\sum_{k=0}^{n}\int_0^x(-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t-\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

d'où, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}-\operatorname{Arctan}x\right|&=\left|\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\int_0^x t^{2n+2}\,\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{x^{2n+3}}{2n+3}.\end{aligned}$$

Finalement

$$\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}-\operatorname{Arctan}(x)\right|\leqslant\frac{1}{2n+3}.$$

4.d) Comme $\frac{1}{2n+3}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, on en déduit par le théorème d'encadrement

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}\operatorname{Arctan}(x).$$

En particulier, pour $x=\frac{1}{\alpha}$ et avec 3.c, on conclut :

$$\mathrm{I}=\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Remarque. On peut poursuivre la simplification en montrant que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$,

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)+\operatorname{Arctan}(x)=\begin{cases}+\pi/2 & \text{si } x>0\\ -\pi/2 & \text{si } x<0\end{cases}.$$

Exercice 5

p. 3

A.1. Soit $x\in\mathbb{R}_*^+$.
La fonction φ_x est continue sur $]0;+\infty[$, $\Phi(x)$ une intégrale généralisée en 0 et $+\infty$.

- *Étude en 0.*

Posons

$$\alpha=\frac{(1-x)+1}{2}=1-\frac{x}{2}\in]1-x;1[.$$

Par les croissances comparées

$$t^{\alpha}\varphi_x(t)=t^{\alpha}t^{x-1}(\ln t)\mathrm{e}^{-t}=t^{x/2}(\ln t)^k\mathrm{e}^{-t}\xrightarrow[t\to0^+]{}0.$$

Autrement dit $\qquad \varphi_x(t)=\mathrm{o}_{0^+}\left(\dfrac{1}{t^{\alpha}}\right).$

Or $\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}}$ est une intégrale de Riemann convergente car $\alpha<1$. De plus $t\mapsto1/t^{\alpha}$ est une fonction positive. Par le critère de négligeabilité. L'intégrale $\int_0^1\varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

- *Étude en* $+\infty$.

Par les croissances comparées $t^2\varphi_x(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ d'où

$$\varphi_x(t)=\mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

En raisonnant comme précédemment ($\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente), on prouve la convergence de $\int_1^{+\infty}\varphi_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t$.

Finalement, $\qquad \Phi(x)$ est convergente.

A.2. Soient $x,y\in\mathbb{R}_*^+$ avec $x\leqslant y$,

$$\begin{aligned}&\Phi(x)-\Phi(y)\\&=\int_0^{+\infty}\ln t\times t^{x-1}\left(1-t^{y-x}\right)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Comme $y-x\geqslant0$

$$\begin{aligned}1-t^{y-x}\geqslant0\quad&\text{si } t\in]0,1]\\1-t^{y-x}\leqslant0\quad&\text{si } t\in[1,+\infty[\end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $t>0$, les réels $\ln t$ et $1-t^{y-x}$ sont de signe opposé. Donc la fonction

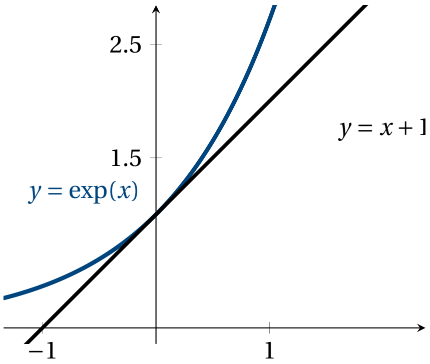
$$t\mapsto\ln(t)t^{x-1}\left(1-t^{y-x}\right)\mathrm{e}^{-t}$$

est négative sur $\mathbb{R}_*^+$. On en déduit que

$$\Phi(x)-\Phi(y)\leqslant0,\quad\text{puis}\quad\Phi(x)\leqslant\Phi(y).$$

La fonction Φ est donc croissante.

A.3. L'inégalité de droite résulte de la convexité de la fonction exponentielle. La courbe représentative est au-dessous de la tangente en 1.



$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad e^t \geqslant 1+t.$$

Pour la seconde inégalité, en remplaçant t par $-t$ dans l'inéquation précédente, il vient

$$e^{-t} \geqslant 1-t.$$

On multiplie par $e^t \geqslant 0$:

$$1 \geqslant -te^t + e^t.$$

On en déduit que :

$$e^t - 1 \leqslant te^t.$$

A.4.a) Soit $h \in [-x/2, x]$. Par croissance de Φ

$$\frac{x}{2} \leqslant x+h \leqslant 2x$$

donne $$\Phi\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant \Phi(x+h) \leqslant \Phi(2x).$$

A.4.b) On en déduit un encadrement du produit $h\Phi(x+h)$ en distinguant suivant le signe de h.

→ Si $h \geqslant 0$ alors :

$$h\Phi\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant h\Phi(x+h) \leqslant h\Phi(2x).$$

Donc par encadrement

$$\lim_{h\to 0^+} h\Phi(x+h) = 0.$$

→ Si $h \leqslant 0$ alors :

$$h\Phi\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant h\Phi(x+h) \geqslant h\Phi(2x).$$

Donc $$\lim_{h\to 0^-} h\Phi(x+h) = 0.$$

Comme les limites à droite et gauche existent et sont égales, il vient

$$\lim_{h\to 0} h\Phi(x+h) = 0.$$

B.1. Effectuons le changement de variable $u = \sqrt{t}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ strictement croissant.

$$u^2 = t, \quad du = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt.$$

L'intégrale de Gauss étant convergente, on a convergence de $\Gamma(1/2)$ avec l'égalité :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du &= \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}\,dt\\ &= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Or par parité de $u \mapsto e^{-u^2}$

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Finalement

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

B.2. Fixons $x \in \mathbb{R}_*^+$. Soient $A \in \mathbb{R}_*^+$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$. Procédons par intégration par parties en introduisant les fonctions u et v de classe $\mathscr{C}^1$ définies sur $\mathbb{R}_*^+$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(t) &=& t^x\\ v(t) &=& -e^{-t}\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} u'(t) &=& xt^{x-1}\\ v'(t) &=& e^{-t}\end{array}\right. .$$

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^A t^x e^{-t}\,dt &= \int_\varepsilon^A u(t)v'(t)\,dt\\ &= [u(t)v(t)]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A u'(t)v(t)\,dt\\ &= [-t^x e^{-t}]_\varepsilon^A + x\int_\varepsilon^A t^{x-1}e^{-t}\,dt.\end{aligned}$$

Passons à la limite avec $\varepsilon \to 0^+$, $A \to +\infty$

$$\varepsilon^x e^{-\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0, \quad A^x e^{-A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Notons l'emploi des croissances comparées dans le second cas. Finalement,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

B.3.a) On a par linéarité de l'intégrale

$$\Gamma(x+h) - \Gamma(x) = \int_0^{+\infty}\left(t^h - 1\right)t^x e^{-t}\,dt.$$

D'après l'encadrement de la question 4.a) appliquée au réel $h\ln t$ (où $t > 0$), on obtient

$$h\ln t \leqslant t^h - 1 \leqslant h\ln(t)\,t^h.$$

On multiplie par $t^x e^{-t}$ et on intègre, il vient :

$$h\Phi(x) \leqslant \Gamma(x+h) - \Gamma(x) \leqslant h\Phi(x+h).$$

B.3.b) En admettant que Φ est continue en x,

$$\lim_{h\to 0}\Phi(x+h) = \Phi(x).$$

On déduit alors de l'encadrement précédente que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Gamma(x+h)-\Gamma(x)}{h} = \Phi(x).$$

Donc la fonction Γ est dérivable en x et $\Gamma'(x) = \Phi(x)$. Ce résultat étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, la fonction Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ avec

$$\Gamma' = \Phi.$$

Comme il est admis que Φ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$, la fonction Γ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

B.4.a) On vérifie que $\Gamma(1) = 1$ puis, avec la question B.2.

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1.$$

D'où $\Gamma(2) = \Gamma(1)$. La fonction Γ est continue sur $[1;2]$, dérivable sur $]1;2[$, le théorème de Rolle impose l'existence de $\alpha \in]1;2[$ telle que $\Gamma'(\alpha) = 0$.

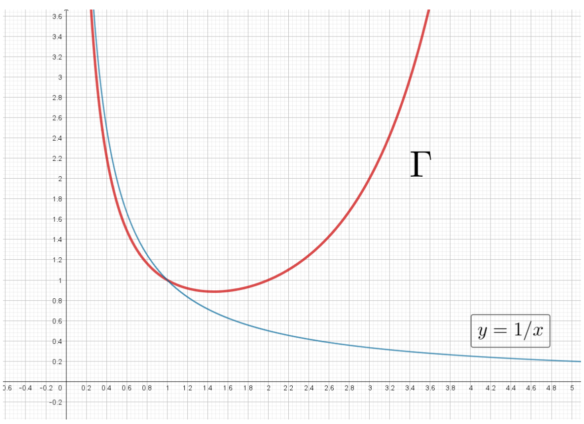
B.4.b) La fonction Γ est continue en 1 avec $\Gamma(1) = 1$. D'après la question B.2.

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \Gamma(1) = 1.$$

D'où
$$\Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$

B.4.c) La dérivée de Γ est Φ qui est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_*^+$ (voir question A.2.), donc Γ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}_*^+$.

B.4.d) On obtient :



C.1 Soient $x, y \in \mathbb{R}_x^+$. La fonction

$$\varphi : t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$$

est continue sur $]0;1[$, on a donc une intégrale généralisée en 0 et 1.

- *Étude en 0.*

$$\varphi(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_0^1 1/t^{1-x}\,\mathrm{d}t$ est convergente $(1-x<1)$. Par le critère d'équivalence des intégrales de fonctions positives, l'intégrale de φ est convergente en 0.

- *Étude en 1.*

$$\varphi(t) \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(1-t)^{y-1}}.$$

Une comparaison avec une intégrale de Riemann justifie, comme précédemment, la convergence.

Finalement, l'intégrale $\mathrm{B}(x,y)$ est convergente.

C.2.a) Effectuons le changement de variable $\mathscr{C}^1$, strictement décroissant $u = 1-t$, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^0 (1-u)^{x-1}u^{y-1}(-\mathrm{d}u) \\
&= \int_0^1 (1-u)^{x-1}u^{y-1}\,\mathrm{d}u = \mathrm{B}(y,x).
\end{aligned}$$

C.2.b) Soient $\varepsilon, \eta \in]_0;1[$.
Intégrons par parties, (les fonctions considérées sont de classe $\mathscr{C}^1$)

$$\begin{aligned}
&\int_\varepsilon^\eta t^x \cdot y(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-t^x \cdot (1-t)^y\right]_\varepsilon^\eta + \int_\varepsilon^1 xt^{x-1}\cdot(1-t)^y\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Or

→ $$\int_\varepsilon^\eta t^x \cdot y(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \underset{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \eta\to 1^-}}{\longrightarrow} y\mathrm{B}(x+1,y),$$

→ $$\left[-t(1-t)^y\right]_\varepsilon^\eta \underset{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \eta\to 1^-}}{\longrightarrow} 0,$$

→ $$\int_\varepsilon^\eta xt^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \underset{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \eta\to 1^-}}{\longrightarrow} x\mathrm{B}(x,y+1).$$

D'où l'égalité demandée par passage à la limite.

C.3. Soient $x, y \in \mathbb{R}_*^+$. Par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}
&\mathrm{B}(x,y) - \mathrm{B}(x+1,y) \\
&= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} - t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(t^{x-1} - t^x\right)(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t = \mathrm{B}(x,y+1).
\end{aligned}$$

À l'aide des relations précédentes

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(x+1,y) &= \frac{x}{y}\mathrm{B}(x,y+1)\\ &= \frac{x}{y}\big(\mathrm{B}(x,y)-\mathrm{B}(x+1,y)\big).\end{aligned}$$

D'où la relation

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\mathrm{B}(x+1,y) = \frac{x}{y}\mathrm{B}(x,y)$$

Le résultat s'en déduit après simplifications.

C.4.a) Soit $t \in [0;n]$. On a vu à la question A.3. l'inégalité de convexité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 1+x \leqslant \mathrm{e}^x.$$

Appliquée à $x = -t/n$, il vient

$$1-\frac{t}{n} \leqslant \mathrm{e}^{-t/n}.$$

Comme $1-t/n \geqslant 0$ et la fonction $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, il vient

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \left(\mathrm{e}^{-t/n}\right)^n = \mathrm{e}^{-t}.$$

C.4.b) La relation à démontrer est claire lorsque $t \in [\sqrt{n}, n]$.
Considérons le cas $t \in [0, \sqrt{n}[$.
On définit sur $[0, \sqrt{n}[$ la fonction

$$f : t \mapsto n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)+t-\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right).$$

La fonction f est dérivable sur $[0, \sqrt{n}[$ avec

$$f'(t) = \frac{t\left((t-1)^2+(n-1)\right)}{(n-t)\left(n-t^2\right)} \geqslant 0.$$

Dès lors, pour tout $t \in [0, \sqrt{n}[$, $f(t) \geqslant f(0) = 0$.
On en déduit que

$$n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \leqslant \ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)-t.$$

L'inégalité demandée s'en déduit par croissance de la fonction exponentielle.

C.4.c) On déduit des deux questions précédentes et par croissance de l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_0^n \left(1-\frac{t^2}{n}\right)\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or, par définition,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t^2}{n}\right)\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{x+1}\,\mathrm{d}t\\ &= \Gamma(x)-0\cdot\Gamma(x+2) = \Gamma(x).\end{aligned}$$

Le théorème d'encadrement permet alors de conclure.

C.5. Le changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$, $u = t/n$ donne

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = n^x\mathrm{B}(n+1,x).$$

Par récurrence à partir de la question C.3. ou par produit télescopique, il vient

$$\mathrm{B}(n+1,y) = \frac{n}{n+y}\mathrm{B}(n,y) = \left(\prod_{k=1}^n \frac{k}{(k+y)}\right)\mathrm{B}(1,y).$$

Or $$\mathrm{B}(1,y) = \int_0^1 (1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{y},$$

on en déduit que pour tous $n \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{R}_*^+$

$$\mathrm{B}(n+1,y) = \frac{n!}{y(y+1)\dots(y+n)}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t &= n^x\mathrm{B}(n+1,x)\\ &= n^x\frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.\end{aligned}$$

Il suffit alors de passer à la limite lorsque n tend vers l'infini et de reconnaître $\Gamma(x)$ dans le membre de gauche grâce à la question précédente.

C.6.a) En reprenant la relation de la question C.3.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{B}(n+1,y)}{\mathrm{B}(1,y)} &= \prod_{k=1}^n \frac{\mathrm{B}(k+1,y)}{\mathrm{B}(k,y)}\\ &= \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+y}\\ &= \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+y).}\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(1,y) &= \int_0^1 t^{y-1}\,\mathrm{d}y\\ &= \left[\frac{1}{y}t^y\right]_0^1 = \frac{1}{y}.\end{aligned}$$

D'où

$$\mathrm{B}(n+1,y)=\frac{n!}{y\prod_{k=1}^{n}(k+y)}=\frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(k+y)}.$$

Expression que l'on peut réécrire par

$$\mathrm{B}(n+1,y)=\left(\frac{n^y n!}{\prod_{k=0}^{n}(k+y)}\right)\cdot\frac{1}{n^y}.$$

On conclut en remarquant que d'après C.5. (avec $\Gamma(y)\neq 0$)

$$\frac{n^y n!}{\prod_{k=0}^{n}(k+y)}\underset{n\to\infty}{\sim}\Gamma(y).$$

Soit $x\in\mathbb{R}$. Sachant que la fonction

$$u\longmapsto \mathrm{B}(u,y)$$

est décroissante, il vient pour $n=\lfloor x\rfloor$

$$\mathrm{B}(n,y)\geqslant \mathrm{B}(x,y)\geqslant \mathrm{B}(n+1,y)$$

puis (les quantités sont positives)

$$\mathrm{B}(n,y)\cdot x^y\geqslant \mathrm{B}(x,y)\cdot x^y\geqslant \mathrm{B}(n+1,y)\cdot x^y$$

ou encore

$$\left(\mathrm{B}(n,y)(n-1)^y\right)\cdot\frac{x^y}{(n-1)^y}\geqslant \mathrm{B}(x,y)x^y\geqslant\left(\mathrm{B}(n+1,y)n^y\right)\cdot\frac{x^y}{n^y}.$$

On poursuit à partir de l'encadrement issue de la définition de la partie entière ($x-1\leqslant n\leqslant x$)

$$\left(\mathrm{B}(n,y)(n-1)^y\right)\cdot\left(\frac{x}{(x-1)})\right)^y\geqslant \mathrm{B}(x,y)x^y\geqslant \mathrm{B}(n+1,y)n^y.$$

Or, d'après ce qui précède

$$\mathrm{B}(n+1,y)n^y\xrightarrow[n\to\infty]{}\Gamma(y),\quad \mathrm{B}(n,y)(n-1)^y\xrightarrow[n\to\infty]{}\Gamma(y)/$$

Par le théorème d'encadrement

$$\frac{\mathrm{B}(x,y)}{x^y}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\Gamma(y).$$

Ce qui conclut sachant que $\Gamma(y)\neq 0$.

C.6.b)i) Par produit télescopique

$$\frac{\mathrm{B}(x+n,y)}{\mathrm{B}(x,y)}=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\mathrm{B}(x+k+1,y)}{\mathrm{B}(x+k,y)}\underset{3}{=}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{x+k}{x+y+k}.$$

On a

$$\frac{\mathrm{B}(x+n,y)}{\mathrm{B}(x,y)}=\frac{x+y+n}{x+n}\prod_{k=0}^{n}\frac{x+k}{x+y+k}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{x+y+n}{x+n}\cdot\frac{n^x n!}{\Gamma(x)}\cdot\frac{\Gamma(x+y)}{n^{x+y}\cdot n!}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)n^y}.$$

D'où le résultat.

C.6.b)ii) On a d'une part

$$\frac{\mathrm{B}(x+n,y)n^y}{\mathrm{B}(x,y)}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}$$

et d'autre part (deuxième point du 6.a))

$$\mathrm{B}(x+n)\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{\Gamma(y)}{(n+x)^y}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{\Gamma(y)}{n^y}.$$

Soit

$$\frac{\mathrm{B}(x+n,y)n^y}{\mathrm{B}(x,y)}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{\Gamma(y)}{\mathrm{B}(x,y)}.$$

Par unicité de la limite

$$\frac{\Gamma(y)}{\mathrm{B}(x,y)}=\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}.$$

D'où le résultat (aucune quantité n'est nulle).

Exercice 6 p. 4

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Effectuons une intégration par parties avec les choix

$$\begin{array}{ll} u(x)=\sin x & u'(x)=\cos x\\ v(x)=\cos^{2n-1}x & v'(x)=-(2n-1)\sin x\cos^{2n-2}x\end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos^{2n-1}x\,\mathrm{d}x\\&=\left[\sin x\cos^{2n-1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^{2n-2}x\,\mathrm{d}x\\&\qquad(\text{car }\ \sin^2=1-\cos^2)\\&=0+(2n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{2n-2}\,\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{2n}\,\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \mathrm{C}_n=(2n-1)\left(\mathrm{C}_{n-1}-\mathrm{C}_n\right).$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. D'après le calcul précédent,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^2(\cos x)^{2n-2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{C}_{n-1}-\mathrm{C}_n=\frac{\mathrm{C}_n}{2n-1}$$

De plus, l'égalité trouvée au 1) entraîne

$$\mathrm{C}_n=(2n-1)\mathrm{C}_{n-1}-(2n-1)\mathrm{C}_n$$

puis $$\mathrm{C}_n=\frac{2n-1}{2n}\mathrm{C}_{n-1}.$$

Ainsi, en remplaçant :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2(\cos x)^{2n-2}\,\mathrm{d}x = \frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Effectuons deux intégrations par parties successives. La première en posant :

$$\begin{array}{ll} u(x) = \cos^{2n} x & u'(x) = -2n\sin x\cos^{2n-1} x \\ v(x) = x & v'(x) = 1 \end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} C_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times \cos^{2n} x\,\mathrm{d}x \\ &= \left[x\cos^{2n} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\cos^{2n-1} x\,\mathrm{d}x \\ &= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x)\times\left(\sin x\cos^{2n-1} x\right)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Puis la seconde intégration par parties avec :

$$\begin{cases} u(x) = \sin x\cos^{2n-1} x & u' = \cos^{2n} x - (2n-1)\sin^2 x\cos^{2n-2} x \\ v(x) = x^2 & v'(xà = 2x \end{cases}$$

Ce qui donne $C_n =$

$$\begin{aligned} & n\Big(\left[x^2\sin x\cos^{2n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ & \qquad - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\cos^{2n} x - (2n-1)\sin^2 x\cos^{2n-2} x\right)\mathrm{d}x\Big) \\ &= -n\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2n} x\,\mathrm{d}x - (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x\cos^{2n-2} x\,\mathrm{d}x\right) \\ &= -n\left(D_n - (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(1-\cos^2 x\right)\cos^{2n-2} x\,\mathrm{d}x\right) \\ &= -n\left(D_n - (2n-1)\left(D_{n-1} - D_n\right)\right) \end{aligned}$$

On en déduit

$$C_n = (2n-1)nD_{n-1} - 2n^2D_n.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Isolons le terme $\frac{1}{n^2}$: d'après la question 3,

$$\frac{C_n}{n^2} = \frac{(2n-1)nD_{n-1}}{n^2} - 2D_n$$

Comme $\cos^{2n}$ est positive, continue et non identiquement nulle sur $[0,\pi/2]$, l'intégrale C_n est non nulle :

$$\frac{1}{n^2} = \frac{(2n-1)nD_{n-1}}{n^2C_n} - 2\frac{D_n}{C_n}$$

D'après 2, $\frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}$, d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} &= \frac{2n-1}{C_n} \times \frac{nD_{n-1}}{n^2} - 2\frac{D_n}{C_n} \\ &= \frac{2n}{C_{n-1}} \times \frac{nD_{n-1}}{n^2} - 2\frac{D_n}{C_n} \\ &= 2\frac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - 2\frac{D_n}{C_n} \end{aligned}$$

Il vient

$$\frac{1}{n^2} = 2\left(\frac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \frac{D_n}{C_n}\right)$$

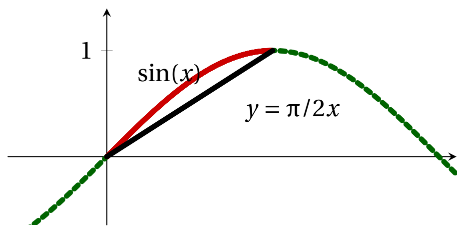
5.a) *Rédaction 1*

Posons, pour tout réel $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], f(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$. La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition, et $\forall x \in [0,\pi/2], f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$. La fonction cos est continue strictement décroissante sur $[0,\pi/2], \cos 0 = 1 > 2/\pi$ et $\cos\pi/2 = 0 < 2/\pi$. D'où le tableau de signe suivant pour f', qui entraîne le tableau de variation de f : Ainsi, $f \geqslant 0$ sur $[0,\pi/2]$. Conclusion :

$$\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], \qquad \sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x$$

Rédaction 2.

La fonction sinus est concave sur $[0;\pi/2]$. La courbe représentative sur cet intervalle est donc au-dessus de la corde passant par les points d'abscisse 0 et $\pi/2$.



5.b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après ci-dessus, pour tout $x \in [0,\pi/2]$,

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\sin x$$

D'où, par croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}^+$

$$x^2 \leqslant \frac{\pi^2}{4}\sin^2 x$$

En remplaçant, comme $\cos^{2n} \geqslant 0$ et par croissance de l'intégrale,

$$D_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^{2n} x,\,\mathrm{d}x$$

Or d'après la questions 2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2(\cos x)^{2n-2}\,\mathrm{d}x = \frac{C_{n-1}}{2n}$$

donc en décalant les indices :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}\frac{C_n}{2n+2}$$

5. D'après l la question 4), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{D_{k-1}}{C_{k-1}} - \frac{D_k}{C_k}\right) \\ &= 2\left(\frac{D_0}{C_0} - \frac{D_n}{C_n}\right) \end{aligned}$$

Car on reconnaît une somme télescopique. Or

$$\mathrm{D}_0 = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24} \quad \text{et} \quad \mathrm{C}_0 = \frac{\pi}{2},$$

donc

$$2\frac{\mathrm{D}_0}{\mathrm{C}_0} = \frac{2\pi^3 \times 2}{24\pi} = \frac{\pi^2}{6}$$

D'après la question 5 avec $\mathrm{C}_n > 0$

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{D}_n}{\mathrm{C}_n} \leqslant \frac{\pi^2}{8}\frac{1}{n+1}$$

Donc, par le théorème d'encadrement,

$$\mathrm{D}_n/\mathrm{C}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Finalement

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$