

THÈME : ALGÈBRE LINÉAIRE, POLYNÔMES

Étude d'une famille de polynômes

On définit la suite de polynômes $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ par $G_0 = 1$ et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$

$$G_i(x) = \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-i+1)}{i!}.$$

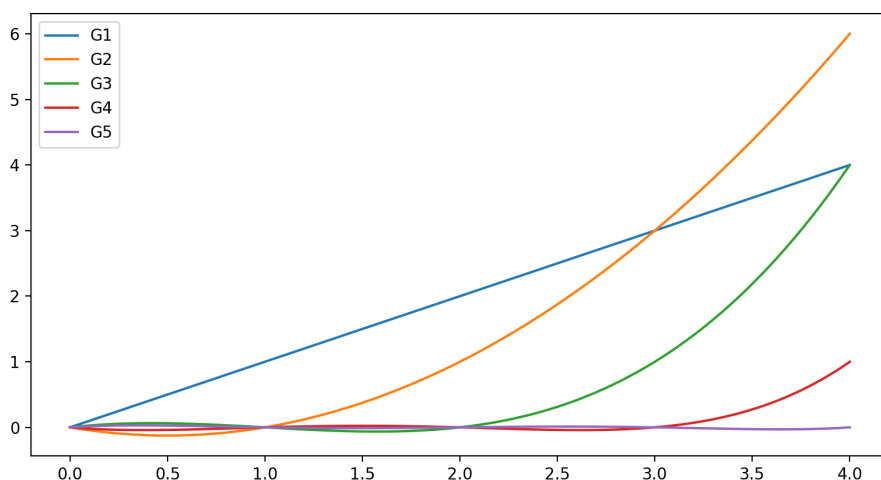
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit l'application Δ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$ associe le polynôme $\Delta(P)$ défini sur $\mathbb{R}$ par

$$\Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x).$$

- a) Vérifier que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
 - b) Déterminer le noyau de Δ . Que peut-on en déduire?
 - c) Vérifier que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$ non nul, $\deg(\Delta(P)) < \deg P$. En déduire l'égalité $\text{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_{n-1}[x]$.
 - d) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, quel est le noyau de Δ^k (composé k -fois de Δ)? On pourra distinguer les cas $k \leq n$ et $k > n$.
2. a) Vérifier que la famille $(G_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ constitue une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
- b) Pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Comparer $\Delta(G_i)$ et G_{i-1} . Exprimer ensuite $\Delta^k(G_i)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- c) Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$, vérifier que les réels $(P(0), \Delta(P)(0), \Delta^2(P)(0), \dots, \Delta^n(P)(0))$ sont les coordonnées de P dans la base $(G_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$.
- On pourra dans un premier temps vérifier que $\Delta^k(G_i)(0) = 0$ pour $i \neq k$.

Python

3. a) Écrire une fonction Python **Poly()** qui prend en entrée un entier $i \in \mathbb{N}$ et un réel x , puis renvoie le nombre $G_i(x)$.
- b) Comment tracer sur l'intervalle $[0; 4]$ chacune des courbes des polynômes G_i pour $i \in \llbracket 1; 5 \rrbracket$?
On pourra utiliser une boucle **for**. Ci-dessous, le résultat :



- c) Que peut-on conjecturer entre $\max_{t \in [0; n]} G_n(t)$ et $G_n(n)$?
- d) *Facultatif*. Prouver la conjecture. Dans la suite, on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\max_{t \in [0; n-1]} |G_n(t)| \leq 1/n.$$



Application aux calculs de sommes

4. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$, on pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S_k(P) = \sum_{i=0}^k P(i)$.

a) Justifier qu'il existe $R \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $\Delta(R) = P$. Vérifier alors que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad S_k(P) = R(k+1) - R(0).$$

b) Montrer que le polynôme R est unique si on impose en plus que $R(0) = 0$.

c) Si $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ sont les coordonnées de P dans la base $(G_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$, quelles sont les coordonnées de R dans la base $(G_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$?

d) En considérant les polynômes d'expression x, x^2, x^3 , retrouver à l'aide des questions précédentes les expressions polynomiales (en k) des sommes

$$\sum_{i=0}^k i, \quad \sum_{i=0}^k i^2, \quad \sum_{i=0}^k i^3.$$

Application à l'interpolation polynomiale

5. Soit l'application $\varepsilon : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ définie par

$$\varepsilon(P) = (P(0), P(1), P(2), \dots, P(n)).$$

Montrer que ε est un isomorphisme.

6. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_{n,f} \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $P_{n,f}(i) = f(i)$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

b) Soient $x \in [0, n] \setminus \llbracket 0; n \rrbracket$ et λ réel. On définit la fonction

$$\varphi : \begin{cases} [0; n] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto f(t) - P_{n,f}(t) - \lambda \cdot G_{n+1}(t). \end{cases}$$

Montrer qu'il existe λ tel que $\varphi(x) = 0$.

c) Justifier que pour cette valeur de λ , il existe $c \in [0, n]$ tel que $\varphi^{(n+1)}(c) = 0$.

Indication. On pourra remarquer que φ s'annule au moins $n+2$ fois, donc φ' s'annule au moins $n+1$ fois car ...

d) Vérifier que $\lambda = f^{(n+1)}(c)$.

e) Conclure en montrant que pour tout $x \in [0, n]$, on a :

$$|f(x) - P_{n,f}(x)| \leq \frac{1}{n+1} \sup_{t \in [0, n]} |f^{(n+1)}(t)|.$$

On justifiera l'existence de la borne supérieure.

– FIN –

Il n'y a pas de problème, il n'y a que des professeurs.

JACQUES PRÉVERT

Poète français (1900-1977).

DM 1 - éléments de solution

1.a) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + \mu Q)(x) &= (\lambda P + \mu Q)(x+1) - (\lambda P + \mu Q)(x) \\ &= \lambda P(x+1) + \mu Q(x+1) - \lambda P(x) - \mu Q(x) \\ &= \lambda(P(x+1) - P(x)) + \mu(Q(x+1) - Q(x)) \\ &= \lambda \Delta(P)(x) + \mu \Delta(Q)(x)\end{aligned}$$

L'application est linéaire. De plus

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[x], \quad \Delta(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$$

l'application Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

1.b) Soit $P \in \ker \Delta$. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x+1) - P(x) = 0$$

Rédaction 1. Posons $R(x) = P(x) - P(0)$. On a encore

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) = R(x+1)$$

et, en plus, 0 comme racine de R . Par récurrence, on montre que tout $k \in \mathbb{N}$ est racine. Avec une infinité de racines, R est le polynôme nul. On en déduit que le polynôme P est constant. Réciproquement, si un polynôme est constant, alors il est dans le noyau. Donc

$$\ker \Delta = \mathbb{R}_0[x].$$

Rédaction 2. Par le théorème de Rolle, P' admet une racine dans $]k; k+1[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. P' admet une infinité de racines, c'est le polynôme nul et P est constant.

Rédaction 3. Le polynôme P est continue et 1-périodique. Donc P est un polynôme borné. Il est constant.

- On en déduit que Δ n'est pas injective car son noyau n'est pas trivial.

1.c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, par la formule du binôme de Newton

$$\begin{aligned}\Delta(x^k) &= (x+1)^k - x^k \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} x^i \in \mathbb{R}_{k-1}[x].\end{aligned}$$

De plus $\Delta(1) = 0$. Ainsi pour $P = \sum_{i=0}^p a_i x^i$ (de degré p) par linéarité

$$\Delta(P) = \sum_{i=0}^p a_i \underbrace{\Delta(x^i)}_{\in \mathbb{R}_{i-1}[x]} \in \mathbb{R}_{p-1}[x]$$

D'où le résultat.

- Par la formule du rang, on sait que

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Im} \Delta &= \dim \mathbb{R}_n[x] - \dim \mathbb{R}_0[x] \\ &= n+1-2 = n-1.\end{aligned}$$

De plus, on constate que si $P \in \mathbb{R}_n[x]$, $\Delta(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$. Soit

$$\operatorname{Im} \Delta \subset \mathbb{R}_{n-1}[x].$$

D'où l'égalité par dimension.

1.d) • Justifions par récurrence que tout pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$\ker \Delta^k = \mathbb{R}_{k-1}[x].$$

- L'initialisation a été traitée à la question précédente.

- Hérédité. Soit $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ et supposons la propriété vraie au rang k . En reprenant la question 1.c), on note que pour $P \in \mathbb{R}_n[x]$ on a l'équivalence entre P appartient à $\mathbb{R}_k[x]$ si et seulement si $\Delta(P) \in \mathbb{R}_{k-1}[x]$. Ensuite, pour $P \in \mathbb{R}_n[x]$ fixé.

$$\begin{aligned}P \in \ker(\Delta^{k+1}) &\iff \Delta(P) \in \ker(\Delta^k) \\ &\iff \Delta(P) \in \mathbb{R}_{k-1}[x] \\ &\iff P \in \mathbb{R}_k[x].\end{aligned}$$

On en déduit

$$\ker \Delta^{k+1} = \mathbb{R}_k[x].$$

Ainsi la propriété est vérifiée au rang suivant.

- En conclusion pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$\ker \Delta^k = \mathbb{R}_{k-1}[x].$$

- Pour $k > n$, on a maintenant

$$\Delta^{n+1} = 0$$

puis

$$\ker \Delta^k = \mathbb{R}_n[x].$$

2.a) La famille est libre car échelonnée en degré. De plus il y a autant de vecteurs que la dimension de $\mathbb{R}_n[x]$, la famille est donc une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

2.b) On a

$$G_n(x) = \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (x-i) = \frac{1}{n!} \left(\prod_{i=0}^{n-2} (x-i) \right) \cdot (x-n+1).$$

Puis

$$\begin{aligned}G_n(x+1) &= \prod_{i=0}^{n-1} (x+1-i) \cdot \frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (x-(i-1)) \\ &= \frac{1}{n!} \prod_{j=-1}^{n-2} (x-j) \\ &= \frac{1}{n!} (x+1) \left(\prod_{j=0}^{n-2} (x-j) \right).\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\Delta(G_n) &= G_n(x+1) - G_n(x) \\ &= \frac{1}{n!} \left(\prod_{j=0}^{n-2} (x-j)(x-n+1) - (x+1) \prod_{j=0}^{n-2} (x-j) \right) \\ &= \frac{1}{n!} \left(\prod_{j=0}^{n-2} (x-j) \right) (x-n+1 - (x+1)) \\ &= \frac{1}{n!} \left(\prod_{j=0}^{n-2} (x-j) \right) \cdot n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \prod_{j=0}^{n-2} (x-j).\end{aligned}$$

On constate que

$$\Delta(G_n) = G_{n-1}.$$

On vérifie ensuite par récurrence que pour $k \leq n$

$$\Delta^k(G_n) = G_{n-k}.$$

et pour $k > n$

$$\Delta^k(G_n) = 0.$$

Car dans ce cas Δ^k est l'endomorphisme nul.

2.c) Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. La famille $(G_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ étant une base, il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$P = \sum_{i=0}^n \alpha_i G_i.$$

Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on applique Δ^k à chaque membre de l'égalité. Par linéarité

$$\Delta^k(P) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \Delta^k(G_i).$$

On évalue ensuite cette égalité polynomiale en 0 :

$$\Delta^k(P)(0) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \Delta^k(G_i)(0).$$

Or

$$\Delta^k(G_i)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{pour } k \neq i. \end{cases}$$

La somme se simplifie :

$$\Delta^k(P)(0) = \alpha_k.$$

En résumé :

$$P = \sum_{i=0}^n \Delta^i(P)(0) \cdot G_i$$

Ce qui est le résultat demandé.

3.a,b)

```
import numpy as np

def Poly(i, x):
    if i==0:
        return 1
    p=x
    for k in range(1,i):
        p=p*(x-k)/k
    return p
```

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.clf()
imax=5
x=np.linspace(0,imax-1,100)
for k in range(1,imax+1):
    y=np.zeros(len(x))
    for i in range(len(x)):
        y[i]=Poly(k,x[i])
    plt.plot(x,y,label='G'+str(k))
plt.legend()
plt.show()
```

3.c) Sur les graphes obtenus, on remarque que pour tout $n \in \llbracket 1; 5 \rrbracket$, la fonction G_n restreinte à $[0; n]$ admet un maximum atteint en n . On conjecture alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\max_{t \in [0; n]} G_n(t) \leq G_n(n).$$

3.d) Soit $k = \lfloor x \rfloor$ de sorte que

$$k \leq x \leq k+1$$

puis pour tout entier i ,

$$k-i \leq x-i \leq k-i+1$$

. En particulier, pour $i \leq k \leq x$, on retient

$$|x-i| = x-i \leq k+1-i$$

et pour $i \geq k+1$

$$|x-i| = i-x \leq i-k.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\left| \prod_{i=0}^k (x-i) \right| &= \prod_{i=0}^k |x-i| \\ &\leq \prod_{i=0}^k (k+1-i) \\ &\leq \prod_{j=0}^{k+1} j \quad (\text{avec } j = k+1-i) \\ \left| \prod_{i=0}^k (x-i) \right| &\leq (k+1)!\end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}\left| \prod_{i=k+1}^n (x-i) \right| &= \prod_{i=k+1}^n |x-i| \\ &\leq \prod_{i=k+1}^n (i-k) \\ &\leq \prod_{i=k+2}^n i-k \\ &\leq \prod_{i=k+2}^n i \\ \left| \prod_{i=0}^k (x-i) \right| &\leq \frac{n!}{(k+1)!}.\end{aligned}$$

Par produit

$$\left| \prod_{i=1}^n (x-i) \right| \leq n!$$

On en déduit que

$$|G_n(x)| \leq 1 = G_n(n).$$

4.a) On a vu que

$$\text{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_{n-1}[x].$$

Il suffit donc de prendre pour R, un antécédent de P.

Soit $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} S_k(P) &= \sum_{i=0}^k P(i) \\ &= \sum_{i=0}^k R(i+1) - R(i) \\ &= R(k+1) - R(0) \end{aligned}$$

par télescopage.

4.b) Soient S, R deux antécédents de P par Δ tels que

$$R(0) = S(0) = 0.$$

En particulier

$$\begin{aligned} \Delta(R - S) &= \Delta(R) - \Delta(S) \\ &= P - P = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $R - S \in \text{Ker } \Delta = \mathbb{R}_0[x]$ (question 1.b)). Il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) - S(x) = c$$

Pour $x = 0$, on a $c = 0$. Puis $R = S$, ce qui prouve l'unicité.

4.c) D'après 2c, les coordonnées de R dans la base $(G_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ sont :

$$(R(0), \Delta(R)(0), \Delta^2(R)(0), \dots, \Delta^n(R)(0)),$$

Comme $R(0) = 0$ et $\Delta(R) = P$, il vient

$$(0, P(0), \Delta(P)(0), \dots, \Delta^{n-1}(P)(0))$$

En résumé, si les coordonnées de P sont

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

celles de R sont obtenues par décalage

$$(0, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}).$$

4.d) — Si on pose $P(x) = x$,

$$\sum_{i=0}^k i = S_k(P).$$

On constate que $P = G_1 = \Delta(G_2)$ et $G_2(0) = 0$.

Avec les notations de la question 4.b),

$$R = G_2.$$

Avec la question 4.a), on a aussi

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k i &= S_k(P) = G_2(k+1) - G_2(0) \\ &= \frac{(k+1)(k+1-1)}{2}. \end{aligned}$$

On retrouve bien

$$\sum_{i=0}^k i = \frac{(k+1)k}{2}.$$

— Si $P(x) = x^2$, alors

$$\sum_{i=0}^k i^2 = S_k(P).$$

Précisons les coordonnées de P dans la base (G_0, G_1, G_2, G_3) de $\mathbb{R}_3[x]$.

$$\begin{aligned} P(x) &= x(x-1) + x. \\ &= 2G_2(x) + G_1(x). \end{aligned}$$

Pour obtenir les coordonnées de R, il suffit de décaler (question 4.c))

$$\begin{aligned} R(x) &= 2G_3(x) + G_2(x) + 0G_1(x) \\ &= \frac{x(x-1)(x-2)}{3} + \frac{x(x-1)}{2} \\ &= \frac{x(x-1)}{6}(2(x-2) + 3) \\ &= \frac{x(x-1)(2x-1)}{6}. \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k i^2 &= S_k(P) \\ &= R(k+1) \\ &= \frac{(k+1)k(2k+1)}{6}. \end{aligned}$$

— Enfin, pour $P(x) = x^3$, on a

$$\begin{aligned} P(0) &= 0 \\ \Delta(P)(0) &= P(1) - P(0) = 1 \\ \Delta^2(P)(0) &= \Delta(P)(0+1) - \Delta(P)(0) \\ &= P(2) - 2 \times P(1) + P(0) = 6. \end{aligned}$$

Puis en regardant le coefficient dominant ou par calcul

$$\Delta^3(P(0)) = 3! = 6.$$

Ainsi (question 2c), les coordonnées de P dans la base $(G_0, G_1, G_2, G_3, G_4)$ sont

$$(0, 1, 6, 6, 0)$$

puis celles de R

$$(0, 0, 1, 6, 6)$$

D'où

$$\begin{aligned} R(x) &= 6G_4(x) + 6G_3(x) + G_2(x) \\ &= 6 \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24} + 6 \frac{x(x-1)(x-2)}{6} + \frac{x(x-1)}{2} \\ &= \frac{x^4 - 2x^3 + x^2}{4} \\ &= \frac{x^2(x-1)^2}{4}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\sum_{i=0}^k i^3 = S_k(P) = R(k+1) = \frac{(k+1)^2 k^2}{4}.$$

5. Vérifier que ε est linéaire.

Soit $P \in \text{Ker } \varepsilon$.

$$(P(0), P(1), \dots, P(n)) = (0, 0, \dots, 0).$$

Autrement dit, les entiers $0, 1, 2, \dots, n$ sont racines de P . Or ce dernier est de degré au plus n . Avec au moins $n+1$ racines, c'est le polynôme nul. Ainsi

$$\text{Ker } \varepsilon = \{0_{\mathbb{R}_n[x]}\}.$$

L'application ε est injective. De plus

$$\dim \mathbb{R}_n[x] = \dim \mathbb{R}^{n+1}.$$

On peut affirmer que c'est un isomorphisme.

6.a) On impose les conditions

$$P_{n,f} \in \mathbb{R}_n[x] \quad \text{et} \quad \varepsilon(P_{n,f}) = ((f(i))_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}).$$

D'après ce qui précède, il y a une unique solution donnée par

$$P_{n,f} = \varepsilon^{-1}(((f(i))_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket})).$$

6.b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = f(x) - P_{n,f}(x) - \lambda G_{n+1}(x)$$

Comme $G_{n+1}(x) \neq 0$, on peut poser

$$\lambda = \frac{f(x) - P_{n,f}(x)}{G_{n+1}(x)}$$

pour avoir $\varphi(x) = 0$.

6.c) Procédons par récurrence que la propriété

$\mathcal{P}(k)$: $\varphi^{(k)}$ s'annule au moins $n+1-k$ fois dans l'intervalle $[0, n]$.
est vrai pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

• *Initialisation.* $\mathcal{P}(0)$ est vraie par hypothèse sur $\varphi = \varphi^{(0)}$.

• *Hérédité.* Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie, démontrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $b_0 < b_1 < \dots < b_{n-k}$ tels que

$$\forall i \in \llbracket 0, n-k \rrbracket, \quad \varphi^{(k)}(b_i) = 0.$$

Soit $i \in \llbracket 0, n-k-1 \rrbracket$.

On sait que $\varphi^{(k)}$ est continue sur $[b_i, b_{i+1}]$, dérivable sur $]b_i, b_{i+1}[$ et

$$f^{(k)}(b_i) = f^{(k)}(b_{i+1}).$$

D'après le théorème de Rolle, il existe $c_i \in]b_i, b_{i+1}[$ tel que

$$\varphi^{(k+1)}(c_i) = f^{(k+1)}(c_i) = 0.$$

On a donc $n+1-(k+1)$ réels c_i tels que

$$b_0 < c_0 < b_1 < c_1 < \dots < c_{n-k-1} < b_{n-k} \quad \text{et} \quad \varphi^{(k+1)}(c_i) = 0.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(k+1)$ est prouvé car les c_i sont bien tous distincts.

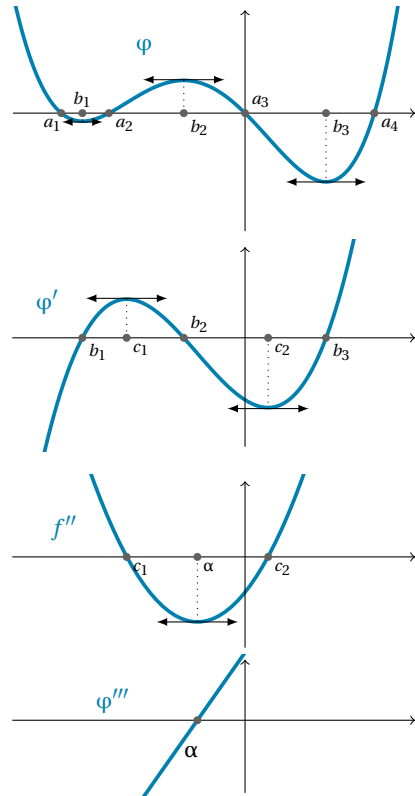
• *Conclusion.* Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

En particulier, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, $\varphi^{(n)}$ s'annule au moins $n+1-n=1$ fois.

Remarque. Illustrons ce résultat. Si φ s'annule 4 fois en a_1, a_2, a_3 et a_4 alors,

- φ' s'annule au moins $4-1=3$ fois en b_1, b_2 et b_3 ;

- φ'' s'annule au moins $4-2=2$ fois en c_1 et c_2 ;
- φ''' s'annule au moins $4-3=1$ fois α .



6.d) Comme $P_{n,f} \in \mathbb{R}_n[x]$, sa dérivée $(n+1)$ -ième est nulle :

$$P_{n,f}^{(n+1)} = 0.$$

De plus

$$G_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + Q(x) \quad \text{où} \quad Q \in \mathbb{R}_n[x],$$

donc

$$G_{n+1}^{(n+1)} = 1.$$

Par combinaison linéaire, φ est dérivable $(n+1)$ fois avec

$$\varphi^{(n+1)} = f^{(n+1)} - \lambda \times 1.$$

En particulier

$$0 = \varphi^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - \lambda$$

D'où

$$\lambda = f^{(n+1)}(c).$$

6.e) On a aussi $\varphi(x) = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} f(x) - P_{n,f}(x) &= \lambda G_{n+1}(x). \\ &= f^{(n+1)}(c) G_{n+1}(x) \end{aligned}$$

On en déduit

$$|f(x) - P_{n,f}(x)| \leq |f^{(n+1)}(c)| \cdot |G_{n+1}(x)|.$$

Or, avec le résultat admis à la question 3.b), pour $x \in [0, n]$

$$|G_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Le résultat s'en déduit.