3

PROBABILITÉS

Exercice 3.01.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

1. On effectue des tirages successifs et sans remise d'une boule de cette urne jusqu'à obtenir la boule numérotée n. On note X_1 le nombre de tirages ainsi effectués.
Déterminer la loi de X_1 et son espérance.

Les deux questions suivantes étudient deux prolongements possibles de l'expérience à l'issue de cette première série de tirages.

2. Après cette première série de tirages, on continue de sortir les boules de l'urne jusqu'à obtenir la boule de plus grand numéro parmi les numéros restants. On note X_2 le nombre de nouveaux tirages ainsi effectués (si à l'issue de la première série de tirages l'urne est vide, on décide que X_2 prend alors la valeur 0).

   a) Déterminer la loi de X_2 et vérifier que $\sum\limits_{j=0}^{n-1} P(X_2 = j) = 1$.

   b) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

   c) Calculer l'espérance de X_2.

3. Après cette première série de tirages, s'il reste au moins une boule dans l'urne, on tire une boule au hasard et on note X_3 le numéro obtenu (si l'urne est vide on convient que X_3 prend la valeur 0).

a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_3).

b) Déterminer la loi de X_3.

Solution

1. La variable X_1 prend ses valeurs dans $[\![1,n]\!]$ et, pour tout k de $[\![1,n]\!]$, on a :

$$P(X_1 = k) = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \times \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}$$

puisqu'il faut piocher $k-1$ boules autres que celle portant le numéro n pendant les $k-1$ premiers tirages, puis enfin piocher la boule numérotée n au $n^{\text{ème}}$ tirage. (on peut aussi dire qu'il y a $n!$ façons de vider l'urne et $(n-1)!$ façons d'avoir une boule donnée en position donnée)

Conclusion : la variable X_1 suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ et on a : $E(X_1) = \dfrac{n+1}{2}$.

2. a) Pour tout k de $[\![1, n-1]\!]$, sachant que $(X_1 = k)$ est réalisé, la variable X_2 prend alors ses valeurs dans $[\![1, n-k]\!]$ puisqu'il ne reste que $n-k$ boules dans l'urne. De plus, le processus est le même que pour la variable X_1, mais avec une urne contenant au départ $n-k$ boules et on cherche toujours à obtenir celle qui porte le plus grand numéro. On a donc :

$$P_{(X_1=k)}(X_2 = j) = \frac{1}{n-k}, \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant n-k$$

La formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $(X_1 = k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\forall\, j \in [\![1, n-1]\!], P(X_2 = j) &= \sum_{k=1}^{n} P(X_1 = k)P_{(X_1=k)}(X_2 = j)\\ &= \sum_{k=1}^{n-j} P(X_1 = k)P_{(X_1=k)}(X_2 = j) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-j}\frac{1}{n-k}\end{aligned}$$

$$\forall\, j \in [\![1, n-1]\!], P(X_2 = j) = \frac{1}{n}\sum_{k=j}^{n-1}\frac{1}{k}$$

Tandis que $P(X_2 = 0) = P(X_1 = n) = \dfrac{1}{n}$.

On a donc :

$$\sum_{j=0}^{n-1} P(X_2 = j) = \frac{1}{n}(1 + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1}\frac{1}{k}) = \frac{1}{n}(1 + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{k}) = \frac{1}{n}(1 + \sum_{k-1}^{n-1} 1) = 1.$$

b) Les variables X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes puisque, par exemple, on a :

$$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = n-1)) = 0 \neq P(X_1 = 2)P(X_2 = n-1)$$

c) X_2 est une variable finie donc elle possède une espérance et on a :

$$E(X_2) = \sum_{j=0}^{n-1} jP(X_2 = j) = \sum_{j=1}^{n-1} jP(X_2 = j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1}\frac{j}{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}\frac{j}{k}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k+1}{2} = \frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n} k = \frac{1}{2n}\Big(\frac{n(n+1)}{2} - 1\Big) = \frac{(n-1)(n+2)}{4n}$$

3. Soit j un entier de $[\![1, n-1]\!]$. En notant $A_{j,k-1}$ l'événement : « on n'a obtenu ni la boule numérotée j, ni la boule numérotée n lors des $k-1$ premiers tirages », ($A_{j,0}$ désignant l'événement certain), et en notant Z_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée au $k^{\text{ème}}$ tirage, on peut écrire :

$$(X_1 = k) \cap (X_3 = j) = A_{j,k-1} \cap (Z_k = n) \cap (X_3 = j)$$

On a $P(A_{j,k-1}) = \dfrac{\binom{n-2}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} = \dfrac{(n-k)(n-k+1)}{n(n-1)}$ et, avec la formule des probabilités composées, on trouve :

$$P((X_1 = k) \cap (X_3 = j)) = \frac{(n-k)(n-k+1)}{n(n-1)} \times \frac{1}{n-k+1} \times \frac{1}{n-k} = \frac{1}{n(n-1)}$$

Le seul cas qui a échappé à cette écriture est le cas $(X_3 = 0)$ qui coincide avec $(X_1 = n)$ et

$$P((X_1 = n) \cap (X_3 = 0)) = P(X_1 = n) = P(X_3 = 0) = \frac{1}{n}$$

b) Par marginalité : pour tout j de $[\![1, n-1]\!]$, on a :

$P(X_3 = j) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}$, ce qui permet de retrouver $P(X_3 = 0) = \dfrac{1}{n}$.

$$X_1 \text{ et } X_3 \text{ ont même loi } \mathcal{U}([\![0, n-1]\!])$$

.

Exercice 3.02.

1. On admet que $\forall\, x \in [0, 1[, \ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Calculer pour $x \in [0, 1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)}$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et suivant la même loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$.

2. Dans cette question, m désigne un entier naturel non nul fixé. Pour tout $\omega \in \Omega$, on range les nombres $X_0(\omega)$, $X_1(\omega)$, ..., $X_m(\omega)$ par ordre *décroissant*, pour obtenir une nouvelle séquence notée $Y_0(\omega), Y_1(\omega), \ldots, Y_m(\omega)$. Ainsi, on a en particulier :

$$Y_0 = \sup\{X_k, 0 \leqslant k \leqslant m\} \text{ et } Y_m = \inf\{X_k, 0 \leqslant k \leqslant m\}$$

a) Déterminer la fonction de répartition Φ_0 et une densité φ_0 de Y_0.

b) Déterminer la fonction de répartition Φ_m et une densité φ_m de Y_m.

3. Soit X et Y deux variables aléatoires à densité, définies sur l'espace probabilisé précédent, indépendantes de densités respectives f et g, de fonctions de répartition respectives F et G.

a) Déterminer une densité de $-Y$.

b) On admet que, si $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction de deux variables, on a :

$$\int_0^{+\infty}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,t)\,dt\Big]\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int_0^{+\infty} h(x,t)\,dx\Big]\,dt$$

sous réserve que toutes les intégrales écrites convergent.

Montrer que $P(Y \leqslant X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\,f(x)\,dx$.

4. On considère la variable aléatoire N, à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie par : $\forall\,\omega \in \Omega$,

$$N(\omega) = \begin{cases} \text{le plus petit des indices } k \text{ tels que } X_k(\omega) > X_0(\omega)\text{, si ce nombre existe} \\ \quad 0 \quad \text{, si ce nombre n'existe pas} \end{cases}$$

a) Déterminer la loi de N et vérifier que $P(N = 0) = 0$. La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

On définit la variable aléatoire X_N par : $\forall\,\omega \in \Omega, X_N(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P_{(N=n)}(X_N \leqslant x)$.

c) Déterminer la fonction de répartition Ψ et une densité ψ de X_N.

d) Montrer que X_N admet une espérance et calculer sa valeur.

Solution

1. Avec $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, il vient, toujours pour $x \in [0,1[$ (ce qui permet de casser les sommations)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

Ce qui donne : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = (1-x)\ln(1-x) + x$.

2. a) Par indépendance, puis par dérivation sur $\mathbb{R}_+$:

$\Phi_0(y) = \displaystyle\prod_{k=0}^{m} P(X_k \leqslant y) = \big(1 - \mathrm{e}^{-\alpha\,y}\big)^{m+1}$ et

$\varphi_0(y) = (m+1)\,\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha\,y}\,\big(1 - \mathrm{e}^{-\alpha\,y}\big)^m$

b) De même, sur $\mathbb{R}_+$,

$$\Phi_m(y) = 1 - \prod_{k=0}^{m} P(X_k \geq y) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha\,(m+1)\,y} \text{ et}$$

$$\varphi_m(y) = (m+1)\,\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha\,(m+1)\,y}$$

3. a) $\forall\, y, P(-Y \leqslant y) = P(Y \geq -y)$, donc $F_{-Y}(y) = 1 - F_Y(-y)$ et donc $f_{-Y}(y) = f_Y(-y)$.

b) Par convolution et indépendance,

$$\begin{aligned}
P(Y \leqslant X) = P(X - Y \geq 0) &= \int_0^{+\infty} f_{X-Y}(z)\,dz \\
&= \int_0^{+\infty} \Big[\int_{-\infty}^{+\infty} f_{-Y}(z-x)\,f_X(x)\,dx\Big] dz \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\int_0^{+\infty} f_{-Y}(z-x)\,dz\Big]\,f_X(x)\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(Y \leqslant X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\int_{-\infty}^{x} f_Y(y)\,dy\Big]\,f_X(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} G(y)\,f(x)\,dx
\end{aligned}$$

4. a) $\star$ Avec les résultats précédents :

$$\begin{aligned}
P\big(\bigcap_{k=1}^{n} (X_i \leqslant X_0)\big) = P(\sup(X_1, \ldots, X_n) \leqslant X_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0(x) f_{X_0}(x)\,dx \\
&= \int_0^{+\infty} \alpha \mathrm{e}^{-\alpha x}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha x})^n\,dx = \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Ainsi par disjonction de cas :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, P(N = n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Par télescopage, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(N = n) = 1$ et $P(N = 0) = 0$.

$\star$ On a $nP(N = n) = n \times \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n+1}$, terme général d'une série divergente et N n'a pas d'espérance.

b) Par indépendance, pour $x \geq 0$,

$$P_{(N=n)}(X_N \leqslant x) = P\big(\bigcap_{k=0}^{n} (X_k \leqslant x)\big) = (1 - \mathrm{e}^{-\alpha\,x})^{n+1}.$$

c) D'après la formule des probabilités totales et 1., sur $\mathbb{R}_+$,

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(1 - \mathrm{e}^{-\alpha\,x}\big)^{n+1}}{n\,(n+1)} = 1 - (1 + \alpha\,x)\,\mathrm{e}^{-\alpha\,x}, \text{ d'où } \psi(x) = \alpha^2\,x\,\mathrm{e}^{-\alpha\,x}.$$

d) On a : $E(X_N) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\alpha\, x)^2\, \mathrm{e}^{-\alpha\, x}\, dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} u^2\, \mathrm{e}^{-u}\, du = \frac{\Gamma(3)}{\alpha} = \frac{2}{\alpha}$.

Exercice 3.03.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

A toute suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont les propriétés varieront en fonction des questions, on associe la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout entier naturel non nul n par $Y_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k$.

1. Dans cette question, $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in\,]0,1[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Déterminer $Y_n(\Omega)$.

b) Déterminer la loi de Y_n.

c) Les variables aléatoires Y_n et Y_{n+1} sont-elles indépendantes ?

d) Montrer que la suite $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi.

2. Dans cette question, $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi définie par $P(X_i = 1) = p \in\,]0,1[$ et $P(X_i = -1) = 1-p$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Déterminer $Y_n(\Omega)$.

b) Déterminer l'espérance de Y_n.

c) Déterminer la loi de Y_n.

d) Les variables aléatoires Y_n et Y_{n+1} sont-elles indépendantes ?

e) Montrer que $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi.

3. On note X_0 la variable aléatoire certaine égale à 1 et $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in\,]0,1[$. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $X_n = Z_n X_{n-1}$ et on définit, comme précédemment, $Y_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} X_i$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Les variables aléatoires X_n et X_{n+1} sont-elles indépendantes ?

b) Déterminer les lois de X_n et de Y_n.

c) Montrer que la suite $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi.

Solution

1. a) et b) $Y_n(\Omega) = \{0, 1\}$. D'après la définition de Y_n et l'indépendance des (X_i) :

$P(Y_n = 1) = P(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = 1)) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = 1) = p^n$: Y_n suit la loi de Bernoulli de paramètre p^n.

c) Comme $Y_{n+1} = X_{n+1}Y_n$, alors :

$$P((Y_{n+1} = 1) \cap (Y_n = 0)) = 0 \neq p^{n+1}(1 - p^n) = P(Y_{n+1} = 1)P(Y_n = 0)$$

Ainsi, Y_n et Y_{n+1} ne sont pas indépendantes.

d) D'après la question précédente, comme $p \neq 1$, $\lim_{n\to\infty} P(Y_n = 1) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} P(Y_n = 0) = 1$. Ainsi, (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire Y presque sûrement égale à 0.

2. a) D'après la définition, $Y_n(\Omega) = \{-1, 1\}$.

b) D'après l'indépendance des (X_i), $E(Y_n) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i) = (2p - 1)^n$.

c) Notons $p_n = P(Y_n = 1) = 1 - P(Y_n = -1)$. Alors, $E(Y_n) = 2p_n - 1$. Ainsi :

$$P(Y_n = 1) = 1 - P(Y_n = -1) = \frac{(2p - 1)^n + 1}{2}$$

d) Supposons Y_n et Y_{n+1} indépendantes.

Alors, par exemple : $P(Y_{n+1} = 1)P(Y_n = 1) = P((Y_{n+1} = 1) \cap (Y_n = 1))$, donc :

$P(Y_{n+1} = 1)P(Y_n = 1) = P((X_{n+1} = 1) \cap (Y_n = 1))$

$P(Y_{n+1} = 1)P(Y_n = 1) = P(X_{n+1} = 1)P(Y_n = 1)$

(la dernière égalité provient du fait que Y_n ne dépend que de $X_1, \ldots, X_n$)

Donc $P(Y_{n+1} = 1) = P(X_{n+1} = 1)$, soit $\dfrac{(2p - 1)^{n+1} + 1}{2} = p$

ou encore $(2p - 1)^{n+1} = 2p - 1$ et comme $(2p - 1)^n = 1$ n'est pas raisonnable, on a $p = \dfrac{1}{2}$.

Comme on sait que si A et B sont indépendants, alors il en est de même de $\overline{A}$ et B, de $\overline{A}$ et $\overline{B}$, ... si $p = \dfrac{1}{2}$ Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes.

e) D'après les calculs précédents, $\lim_{m\to\infty} P(Y_m = 1) = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, $(Y_m)_m$ converge en loi vers une variable aléatoire Y telle que $P(Y = 1) = P(Y = -1) = \dfrac{1}{2}$.

3. a) On remarque que $X_n = \prod_{i=1}^{n} Z_i$. Ainsi, d'après la question 1. c), les variables aléatoires X_n et X_{n+1} ne sont pas indépendantes.

b) D'après la question 1. b), X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre p^n. De manière analogue, $Y_n(\Omega) = \{0, 1\}$ et, d'après l'indépendance des (Z_i), $P(Y_n = 1) = P(\forall\, i \in [\![1, n]\!], Z_i = 1) = p^n$.
Ainsi, Y_n suit aussi la loi de Bernoulli de paramètre p^n.

c) Comme à la question 1. d), on montre que (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire presque sûrement égale à 0.

Exercice 3.04.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-2x} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que λf soit une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire de densité λf.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $1 - X$ admet un moment d'ordre n, noté

$$M_n = E\big((1-X)^n\big).$$

Calculer M_0 et M_1.

3. **a)** Étudier la monotonie de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
En déduire que : $\forall\, \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} P\big((1-X)^n \geq \varepsilon\big) = 0$.

c) Trouver une relation entre M_{n+1} et M_n. En déduire la limite de nM_n quand n tend vers l'infini.

4. Pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, déterminer un polynôme P_k de degré au plus k tel que :

$$M_n = P_k\Big(\frac{1}{n}\Big) + o\Big(\frac{1}{n^k}\Big)$$

lorsque n tend vers l'infini.

Solution

1. Comme f est positive et continue sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ il suffit que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = 1$.

Or : $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\, dx = \Big[\frac{e^{-2x}}{-2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2})$, donc $\lambda = \dfrac{2}{1 - \mathrm{e}^{-2}}$.

2. Les intégrales $M_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n \lambda \mathrm{e}^{-2x}\, dx$ convergent puisqu'on intègre une fonction continue sur le segment $[0,1]$; donc, par le théorème de transfert, les moments M_n existent.

On a $M_0 = E(1) = 1$ et par intégration par parties :

$$M_1 = \lambda\Big(\Big[(1-x)\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\Big]_0^1 - \int_0^1 -\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\,dx\Big) = \lambda(\frac{\mathrm{e}^{-2}}{4} + \frac{1}{4}).$$

3. a) Pour tout $x \in [0,1]$, on a $(1-x)^{n+1} \leqslant (1-x)^n$, donc par conservation des inégalités par intégration, lorsque les bornes sont dans l'ordre croissant : (M_n) décroît.

b) La suite est décroissante et clairement positive donc elle converge.

Pour tout $x \in [0,1]$ on a : $\mathrm{e}^{-2} \leqslant \mathrm{e}^{-2x} \leqslant 1$, donc en intégrant :

$$\lambda\frac{\mathrm{e}^{-2}}{n+1} \leqslant M_n \leqslant \lambda\frac{1}{n+1}$$

Donc, par théorème d'encadrement, on a : $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$.

Comme $1 - X \geqslant 0$ l'inégalité de Markov donne :

$$P(|(1-X)^n - 0| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{M_n}{\epsilon} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc la suite $((1-X)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certraine nulle.

c) Par intégration par parties :

$$M_{n+1} = \lambda\Big(\Big[(1-x)^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\Big]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-x)^n\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\,dx\Big) = \frac{\lambda - (n+1)M_n}{2}$$

Ainsi $nM_n = n\dfrac{\lambda - 2M_{n+1}}{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\lambda n}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda.$

4. $\star$ On a : $M_n = 0 + o(1)$ donc $P_0 = 0$ convient.

$\star$ On vient de voir que $nM_n = \lambda + o(1)$, donc $M_n = \dfrac{\lambda}{n} + o(1/n)$, donc $P_1 = \lambda X$ convient.

$\star$ Comme $nM_n = (\lambda - 2M_{n+1}) \times \dfrac{n}{n+1}$ on a :

$$\begin{aligned} n(nM_n - \lambda) &= n\big(-\lambda\frac{1}{n+1} - 2M_{n+1}(\frac{n}{n+1})\big) \\ &= -\lambda\frac{n}{n+1} - \underbrace{2(n+1)M_{n+1}}_{\to 2\lambda}\big(\frac{n}{n+1}\big)^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\lambda - 2\lambda = -3\lambda. \end{aligned}$$

Donc $M_n = \dfrac{\lambda}{n} - \dfrac{3\lambda}{n^2} + o(1/n^2)$, et $P_2 = \lambda X - 3\lambda X^2$ convient.

Exercice 3.05.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard une boule de U_n.
Soit k le numéro de la boule tirée.
$\to$ Si $k = 1$, on arrête les tirages.

→ Sinon, on retire de l'urne toutes les boules numérotées de k à n, et on effectue un nouveau tirage.

On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.

Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués jusqu'à l'obtention de la boule 1.

Soit Y_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros tirés et I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

1. a) Quelle est la loi de la variable aléatoire I_n ?

b) Quelle est la loi conditionnelle de la variable aléatoire X_n conditionnée par la réalisation de l'événement $(I_n = 1)$?

c) Pour tout $n \geq 2$, montrer que :
$\forall j \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![2, n]\!], P_{(I_n=k)}(X_n = j) = P(X_{k-1} = j - 1)$.

2. a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X_1 ?

b) Quelle est la loi de X_2 ? Calculer $E(X_2)$.

3. a) Déterminer $X_n(\Omega)$.

b) Calculer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$.

c) Montrer que : $\forall n \geq 2, \forall j \geq 2, P(X_n = j) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} P(X_k = j - 1)$.

d) Pour tout $n \geq 2$ et tout $j \geq 2$, calculer $nP(X_n = j)-(n-1)P(X_{n-1} = j)$.
En déduire que pour tout $n \geq 2$ et tout $j \geq 1$:
$P(X_n = j) = \dfrac{n-1}{n}P(X_{n-1} = j) + \dfrac{1}{n}P(X_{n-1} = j - 1)$.

4. Montrer que : $\forall n \geq 2, E(X_n) = E(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n}$. En déduire $E(X_n)$ ainsi qu'un équivalent simple de cette espérance quand n tend vers l'infini.

Solution

1. a) $I_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et $\forall k \in [\![1, n]\!], P(I_n = k) = \dfrac{1}{n}$.

b) Quand $I_n = 1$ est réalisé, on réalise $(X_n = 1)$, soit : $P_{(I_n=1)}(X_n = 1) = 1$.

c) Si on réalise $(I_n = k)$, avec $k \geq 2$, il ne reste dans l'urne, pour continuer l'expérience, que les boules de numéros allant de 1 à $k - 1$. Obtenir alors 1 au $j$ème tirage, c'est obtenir la boule 1 en $j - 1$ tirages (après le premier !) mais avec une urne contenant « initialement » $(k - 1)$ boules. Donc

$$P_{(I_n=k)}(X_n = j) = P(X_{k-1} = j - 1)$$

2. a) On a : $X_1(\Omega) = \{1\}$ et $P(X_1 = 1) = 1$.

b) $\star$ $(X_2 = 1) =$ «on obtient la boule 1 au premier tirage avec une urne contenant initialement 2 boules». Donc $P(X_2 = 1) = P(I_2 = 1) = \dfrac{1}{2}$.

$\star$ Si on n'a pas la boule 1 au premier tirage (ce qui se produit avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$), on a obtenu la boule 2, on la retire et il ne reste plus que la boule 1 et on conclut au coup suivant. Bref :

$$X_2(\Omega) = \{1;2\} \text{ et } P(X_2 = 1) = P(X_2 = 2) = \frac{1}{2} \text{ et } E(X_2) = \frac{3}{2}$$

3. a) $X_n(\Omega) = \{1, \dots, n\}$ (tous les cas sont possibles).

b) $\star$ $P(X_n = 1) = \dfrac{1}{n}$

$\star$ Réaliser $(X_n = n)$, c'est prendre son temps : au premier tirage on obtient la boule n que l'on ôte, au deuxième on obtient la boule $n-1$, que l'on ôte, and so on. Ainsi par la formule des probabilités composées :

$$P(X_n = n) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \cdots \times \frac{1}{1} = \frac{1}{n!}$$

c) $(I_n = k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ forme un système complet d'événements. Donc, d'après la formule des probabilités totales et pour $j \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} P(X_n = j) &= \sum_{k=1}^{n} P(I_n = k) P_{(I_n = k)}(X_n = j) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} P_{(I_n = k)}(X_n = j) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} P(X_{k-1} = j-1) \end{aligned}$$

(on a $P_{(I_n=1)}(X_n = j) = 0$)

Soit : $P(X_n = j) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j-1)$

d) Si $j \geq 2$, et $n \geq 3$ alors $n-1 \geq 2$, et on peut utiliser le c) et :

$$\begin{aligned} nP(X_n = j) - (n-1)P(X_{n-1} = j) &= \sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j-1) - \sum_{k=1}^{n-2} P(X_k = j-1) \\ &= P(X_{n-1} = j-1) \end{aligned}$$

et donc :

$$P(X_n = j) = \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j-1)$$

Compte tenu des calculs précédents, on vérifie sans problème que cette relation est encore vraie au rang $j = 1$ et également au rang $n = 2$.

4. Soit $n \geq 3$. On a $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{j=1}^{n} jP(X_n = j) = \sum_{j=1}^{n} j\Big(\frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j)\Big) + \frac{j}{n} P(X_{n-1} = j-1) \\ &= \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n} jP(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} jP(X_{n-1} = j-1) \\ &= \frac{n-1}{n} E(X_{n-1}) + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) P(X_{n-1} = j) \end{aligned}$$

$$E(X_n) = E(X_{n-1}) - \frac{1}{n}E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} P(X_{n-1} = j)$$
$$= E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}.$$

(Car $P(X_{n-1} = n) = P(X_{n-1} = 0) = 0$). Relation encore vraie pour $n = 2$.

On en déduit $E(X_n) = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + E(X_1) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; et on sait que $E(X_n) \sim \ln n$.

Exercice 3.06.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f continue sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

On suppose également que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\, dt$ est convergente.

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ converge. On pose alors :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

2. Montrer que la fonction h vérifie les propriétés d'une densité.

3. Soit U une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendante de X et suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose : $Y = XU$ et $Z = X - Y$.

a) Déterminer les lois respectives de $\ln X$ et de $\ln U$.

b) En déduire la loi de Y et celle de Z.

Solution

1. $\star$ La fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\star$ Au voisinage de 0, comme la fonction f est nulle en 0, dérivable à droite en 0, on a $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t)}{t} = f'(0)$ et l'intégrale est faussement impropre en sa borne inférieure.

$\star$ Avec $\dfrac{f(t)}{t} \leqslant \dfrac{1}{2}(f^2(t) + \dfrac{1}{t^2})$, l'hypothèse faite sur f et la règle de Riemann donnent la convergence de l'intégrale pour la borne infinie.

Ce qui montre l'existence de h.

2. La fonction f étant une densité continue, la fonction h est continue (même de classe C^1) sur $\mathbb{R}^+$, nulle sur $\mathbb{R}^-$ et positive.

Pour tout $A > 0$, une intégration par parties donne :

$$\int_0^A h(t)\,dt = \big[t.h(t)\big]_0^A - \int_0^A t.h'(t)dt = Ah(A) + \int_0^A f(t)\,dt$$

Or, $0 \leqslant A.h(A) = A\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt \leqslant \int_A^{+\infty} f(t)\,dt \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\displaystyle\int_0^A h(t)\,dt \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ ce qui termine la question.

3. a) L'événement $(X \leqslant 0)$ étant quasi-impossible, on peut considérer que X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, donc $(\ln X)(\Omega) = \mathbb{R}$ et classiquement, pour tout x réel

$$P(\ln X \leqslant x) = P(X \leqslant \mathrm{e}^x) = F_X(\mathrm{e}^x)$$

Par dérivation, on peut donc prendre : $f_{\ln X}(x) = \mathrm{e}^x f_X(\mathrm{e}^x)$.

De même, on peut considérer que U prend ses valeurs dans $]0,1]$, et $(\ln U)(\Omega) = \mathbb{R}_-$ et, pour $x < 0$, $P(\ln U \leqslant x) = P(U \leqslant \mathrm{e}^x) = F_U(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x$ et donc on peut prendre :

$$f_{\ln U}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ \mathrm{e}^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b) XU prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x > 0$:

$[XU \leqslant x] = [\ln X + \ln U \leqslant \ln x]$. Donc $F_{XU}(x) = F_{\ln X+\ln U}(\ln x)$ et par dérivation :

$$f_{XU}(x) = \frac{1}{x} f_{\ln X+\ln U}(\ln x)$$

Par indépendance de X et U, donc de $\ln X$ et $\ln U$, il vient, pour tout $y \geqslant 0$ et par convolution :

$$\begin{aligned} f_{\ln X+\ln U}(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\ln X}(t) f_{\ln U}(y-t)dt = \int_y^{+\infty} \mathrm{e}^t f(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{y-t}dt \\ &= \mathrm{e}^y \int_y^{+\infty} f(\mathrm{e}^t)dt \end{aligned}$$

et donc $f_{XU}(x) = \dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{\ln x}\displaystyle\int_{\ln x}^{+\infty} f(\mathrm{e}^t)\,dt = \int_x^{+\infty} \frac{f(z)}{z}\,dz = h(x)$ (on a fait le changement de variable $z = \mathrm{e}^t$).

Pour montrer que $Z = X(1-U)$ suit la même loi que XU, il suffit de remarquer que $1-U$ suit aussi la loi uniforme sur $[0,1]$ et qu'elle est indépendante de X.

Exercice 3.07.

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On y effectue une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

• si à un rang quelconque on obtient une boule blanche, on la remplace par une boule noire avant le tirage suivant ;

• si à un rang quelconque on tire une boule noire, on la remplace par une boule noire avec la probabilité p et on la remplace par une boule blanche avec la probabilité $q = 1 - p$ (on suppose que $0 < p < 1$) et on effectue alors le tirage suivant.

L'expérience est modélisée dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire représentant le nombre de boules noires contenues dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage (c'est-à-dire juste avant le tirage de rang $n+1$).

1. Donner la loi de X_1.

2. **a)** Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X_n.

b) Déterminer pour tout $j \in [\![0, 2]\!]$, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant que $(X_n = j)$ est réalisé.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$.

a) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = AU_n$.

b) Déterminer les éléments propres de A.

c) Déterminer la limite en loi de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Solution

1. L'état initial de l'urne est 1 boule noire et 1 boule blanche. Aussi :

$\rightarrow$ réaliser $[X_1 = 0]$ c'est tirer la boule noire et la remplacer par une blanche. Ainsi $P(X_1 = 0) = \frac{1}{2} \times q$,

$\rightarrow$ réaliser $[X_1 = 1]$ c'est tirer la boule noire et la remplacer par une noire. Ainsi $P(X_1 = 1) = \frac{1}{2} \times p$,

$\rightarrow$ réaliser $[X_1 = 2]$ c'est tirer la boule blanche . Ainsi $P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$.

(la somme fait bien 1 !)

2. a) La variable aléatoire X_n est à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$.

b) $\star$ Si $[X_n = 0]$ est réalisé, l'urne contient deux boules blanches juste avant le tirage de rang $n+1$. Donc :

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 0,\ P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 1,\ P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) = 0$$

$\star$ Si $[X_n = 1]$ est réalisé, l'état de l'urne avant le tirage suivant est $\{B, N\}$. Ainsi :

$P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = \frac{q}{2}$ (on tire la boule noire et on la remplace par une blanche).

$P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = \frac{p}{2}$ (on tire la boule noire qui est remplacée par une noire)

$P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}$ (on tire la boule blanche)

$\star$ Si $[X_n = 2]$ est réalisé, l'urne contient deux boules noires juste avant le tirage suivant et on est sûr de tirer une boule noire, que l'on remplace par une boule noire ou une boule blanche. Ainsi

$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0) = 0.$

$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = q$ (on tire une boule noire qui est remplacée par une blanche)

$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = p$ (on tire une boule noire qui est remplacée par une noire).

3. a) En utilisant la formule des probabilités totales, les résultats obtenus précédemment donnent sans problème :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & q/2 & 0 \\ 1 & p/2 & q \\ 0 & 1/2 & p \end{pmatrix}$$

b) On obtient :

$\star$ 1 est valeur propre de A (on le savait) , le sous-espace propre associé est engendré par ${}^t\begin{pmatrix} q^2 & 2q & 1 \end{pmatrix}$;

$\star$ $-q$ est valeur propre de A, le sous-espace propre associé est engendré par ${}^t\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

$\star$ $\frac{p}{2}$ est valeur propre de A, le sous-espace propre associé est engendré par ${}^t\begin{pmatrix} -q & -p & 1 \end{pmatrix}$

c) La matrice A est diagonalisable et semblable à la matrice $D = \operatorname{diag}(1, -q, \frac{p}{2})$ de matrice de passage diagonalisante $P = \begin{pmatrix} q^2 & 1 & -q \\ 2q & -2 & -p \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a : $U_n = A^n U_0 = PD^nP^{-1}U_0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}U_0.$

On trouve (sans calcul) : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} U_n = \frac{1}{(q+1)^2} \begin{pmatrix} q^2 \\ 2q \\ 1 \end{pmatrix}$

(ceci s'obtient bien sans calculs, car la formule prouve que la limite existe, on voit alors directement qu'elle est invariante par A, *i.e.* propre pour la valeur propre 1, et la somme de ses coefficients vaut 1)

Exercice 3.08.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant la loi normale centrée réduite. Soit $Y = X^2$.

a) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité dont on donnera une densité.

b) Montrer que Y admet une espérance et une variance et déterminer ces deux moments.

c) Quelle est la loi de $\dfrac{1}{2}Y$?

2. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est un projecteur orthogonal dont on précisera les éléments caractéristiques.

3. Un point M, extrémité d'un vecteur V, est placé de façon aléatoire dans l'espace $\mathbb{R}^3$ rapport., muni de sa structure euclidienne canonique (on note $\|.\|$ la norme).

On suppose que les coordonnées (X_1, X_2, X_3) du point M sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent chacune la loi normale centrée réduite.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\dfrac{1}{2}\|V\|^2 = \dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{OM}\|^2$.

b) Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + y + z = 0$. On note D la variable aléatoire égale à la distance de M au plan $\mathcal{P}$. Montrer que D est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

c) Quelle est la distance moyenne du point M au plan $\mathcal{P}$?

Solution

1. a) On a $Y(\Omega) = [0, +\infty[$. Soit F_Y la fonction de répartition de Y. Cette fonction est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, et pour tout $x \geqslant 0$:

$$F_Y(x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1,$$

en notant Φ la fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

On remarque que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ (notamment en 0) et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Y est ainsi une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par dérivation :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) $E(Y) = E(X^2) = 1$ (variance de X) et $E(Y^2) = E(X^4) = 3$, d'où $V(Y) = 2$ (soit en faisant une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^3 \times t\varphi(t)\,dt$, soit en revenant à l'intégrale de $t^2 f_Y(t)$ et à la fonction Γ, soit parce que l'on se souvient de la notion d'aplatissement (ou kurtosis) pour une loi normale !)

c) Soit $Z = \frac{1}{2}Y$ qui est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Pour tout $z \geqslant 0$: $P(Z \leqslant z) = P(Y \leqslant 2z) = F_Y(2z)$.

Par dérivation, une densité sur $\mathbb{R}^+$ de Z est : $f_Z(z) = 2f_Y(2z) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi z}} e^{-z}$ et on reconnaît : Z suit la loi $\gamma(1/2)$.

2. On vérifie que $A^2 = A$. Ainsi, $f \circ f = f$ et f est un projecteur. Comme la matrice A est symétrique réelle f est un projecteur orthogonal.

On vérifie que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(1,1,1)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) = (\mathrm{Ker}(f))^\perp &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=0\} \\ &= \mathrm{Vect}((1,-1,0),(0,1,-1)\}. \end{aligned}$$

Ainsi, f est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}((1,-1,0),(0,1,-1)\})$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(1,1,1)$.

3. a) Soit $V = \overrightarrow{OM} = (X_1, X_2, X_3)$. On a alors :

$$\frac{1}{2}\|V\|^2 = \frac{1}{2}X_1^2 + \frac{1}{2}X_2^2 + \frac{1}{2}X_3^3 \hookrightarrow \gamma(3/2) \text{ (stabilité de la loi gamma).}$$

b) Par définition : $D = d(V, \mathcal{P}) = \|f(V) - V\| = \|(id - f)(V)\|$.

Comme $(I_3 - A)V = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} X_1 + X_2 + X_3 \\ X_1 + X_2 + X_3 \\ X_1 + X_2 + X_3 \end{pmatrix}$, on a :

$D^2 = 3 \times \frac{1}{9}(X_1 + X_2 + X_3)^2 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)^2$ et $D = \dfrac{1}{\sqrt{3}}|X_1 + X_2 + X_3|$.

On a donc $D(\Omega) = \mathbb{R}^+$. Soit F_D la fonction de répartition de D.

- Pour $x < 0$, $F_D(x) = 0$.
- Pour $x \geqslant 0$, par indépendance des X_i et stabilité , $X_1 + X_2 + X_3 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,3)$ et
$\dfrac{1}{\sqrt{3}}(X_1 + X_2 + X_3) \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Donc : $F_D(x) = P(-x \leqslant \dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}} \leqslant x) = 2\Phi(x) - 1$

F_D est continue sur $\mathbb{R}$ (notamment en 0) et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi D est une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par :

$$f_D(t) = 2\varphi(t) \text{ si } t \geqslant 0 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

c) La distance moyenne du point M au plan $\mathcal{P}$ est donnée par l'espérance de D. la convergence de l'intégrale est sans problème et :

$$\int_0^{+\infty} t f_D(t)\,dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\big[-\mathrm{e}^{-t^2/2}\big]_0^{\to+\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Exercice 3.09.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire définie sur cet espace, discrète à valeurs strictement positives qui admet une espérance et une variance. L'image de X est notée $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$.

1. Soit $A \in \mathcal{A}$. On note $\mathbf{1}_A$ la variable aléatoire qui vaut 1 si $\omega \in A$ et 0 sinon.

a) Pour tout $x_n \in X(\Omega)$, comparer $P(\mathbf{1}_A{\times}X = x_n)$ et $P(X = x_n)$.

b) Montrer que la variable aléatoire $\mathbf{1}_A{\times}X$ admet une espérance.

On pose désormais : $P_X(A) = \dfrac{E(\mathbf{1}_A{\times}X)}{E(X)}$.

2. Dans cette question seulement, on suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit l'évènement $A = (X \in 2\mathbb{N})$. Calculer $P(A)$ et $P_X(A)$.

3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements incompatibles. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $\big(E(\mathbf{1}_{B_n}{\times}X)\big)^2 \leqslant E(X^2)\sum\limits_{i=n}^{\infty} P(A_i)$.

b) En déduire que P_X est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Solution

1. a) Comme X est à valeurs strictement positives, tous les x_i sont non nuls donc :
$P(\mathbf{1}_A X = x_i) = P(A\cap(X = x_i))$. Or $A\cap(X = x_i) \subset (X = x_i)$. Par croissance de P on a donc : $P(\mathbf{1}_A X = x_i) \leqslant P(X = x_i)$.

b) Comme $(\mathbf{1}_A X)(\Omega) \subset \{0\} \cup X(\Omega)$, quitte à enlever un terme nul, il suffit de montrer la convergence absolue de la série $\sum\limits_n x_n P(\mathbf{1}_A X = x_n)$.

Cette convergence découle du théorème de comparaison pour les séries car l'inégalité de la question précédente et la positivité des x_n donnent :

$$0 \leqslant x_n P(\mathbf{1}_A X = x_n) \leqslant x_n P(X = x_n),$$

et la série $\sum_n x_n P(X = x_n)$ converge puisque X a une espérance.

2. On a : $P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = 2k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \dfrac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$.

De plus $E(X) = \lambda$ et comme $P(\mathbf{1}_A X = n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ P(X = n) & n \text{ pair} \end{cases}$,
par définition de l'espérance on a :

$$P_X(A) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (2k)\mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

D'après la formule de sommation de la série exponentielle, on remarque que :

$$P(A) + P_X(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = 1 \text{ et } P(A) - P_X(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \mathrm{e}^{-2\lambda}$$

Donc $P(A) = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{e}^{-2\lambda})$ et $P_X(A) = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2\lambda})$.

3. a) Comme X admet un moment d'ordre2, et qu'il en est de même pour la fonction caractéristique $\mathbf{1}_{B_n}$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\begin{aligned} E^2(X\mathbf{1}_{B_n}) &\leqslant E(X^2)E(\mathbf{1}_{B_n}^2) = E(X^2)E(\mathbf{1}_{B_n}) = E(X^2)P(B_n) \\ &\leqslant E(X^2) \sum_{i=n}^{\infty} P(A_i). \end{aligned}$$

b) $\star$ La positivité de P_X est claire car les variables aléatoires dont on prend les espérances sont positives.

$\star$ Comme $\mathbf{1}_\Omega X = X$, on a bien $P_X(\Omega) = 1$.

$\star$ Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements incompatibles. D'après les questions précédentes, on a :

$\left| \sum_{i=0}^{n} P_X(A_i) - P_X\big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\big) \right| = \left| \dfrac{1}{E(X)} E\big[X(\sum_{i=0}^{n} \mathbf{1}_{A_i} - \mathbf{1}_{B_0})\big] \right|$ (définition de P_X)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{E(X)} E(X\mathbf{1}_{B_{n+1}}) \\ &\leqslant \frac{1}{E(X)} \sqrt{E(X^2) \sum_{i=n+1}^{\infty} P(A_i)} \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

(le reste d'une série convergente tend toujours vers 0 !)

On en déduit que $\sum_{i=0}^{\infty} P_X(A_i) = P_X\big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\big)$ *i.e.* P_X est σ-additive donc additive.

Exercice 3.10.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N et on extrait ces N boules une à une sans remise. Pour $i \in [\![1, N]\!]$, le numéro i est dit bien placé si ce numéro apparait lors du $i^{\text{ème}}$ tirage. On considère les événements :

$\star$ B_i : « le numéro i est bien placé ».

$\star$ $E_{N,k}$: « au cours de l'expérience exactement k numéros sont bien placés ».

L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

2. Pour $1 \leqslant j \leqslant N$ et $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leqslant N$, calculer la probabilité de l'événement :

$$A_{i_1,i_2,\cdots,i_j} = \text{« les numéros } i_1, i_2 \cdots i_j \text{ sont tous bien placés »}$$

On admet que $\boldsymbol{P(E_{N,0}) = 1 - \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_j \in [\![1,N]\!] \text{tels que} \\ 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leqslant N}} P(A_{i_1,i_2,\cdots,i_j})}$

3. En déduire que $P(E_{N,0}) = \sum_{j=0}^{N} \dfrac{(-1)^j}{j!}$

4. Montrer la relation : $P(E_{N,k}) = \dfrac{1}{k!} P(E_{N-k,0})$.

5. Pour k fixé, montrer que la suite $(P(E_{N,k}))_{N \geq 0}$ est convergente. On note p_k sa limite. Montrer que la suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définit une probabilité sur $\mathbb{N}$ et reconnaitre la loi correspondante.

6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{j=0}^{n} \dfrac{(-1)^j}{j!}$. Montrer pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$S_{2p+1} \leqslant S_{2p+3} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant S_{2p+2} \leqslant S_{2p}$$

En déduire, pour tout $n \in \{0, \cdots, N\}$:

$$\sum_{j=0}^{n} |P(E_{N,j}) - p_j| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{(N+1-n)!}$$

Solution

1. $P(B_1) = P(B_2) = \dfrac{(N-1)!}{N!} = \dfrac{1}{N}$ et

$P(B_1 \cap B_2) = \dfrac{(N-2)!}{N!} = \dfrac{1}{N(N-1)} \neq \dfrac{1}{N^2}$: les événements B_1 et B_2 ne sont donc pas indépendants.

2. Soit $j \leqslant N$ et $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots i_j \leqslant N$, on a :

$P(A_{i_1,i_2,\ldots,i_j}) = P(B_{i_1} \cap \cdots B_{i_j}) = \dfrac{(N-j)!}{N!}$ (il reste à placer les autres !)

3. Si j est fixé, il y a $\dbinom{N}{j}$ façons de choisir les j éléments $i_1, \ldots, i_j$ de la formule admise et la probabilité précédente ne dépend que de j, mais pas des éléments choisis. Ainsi :

$$P(E_{N,0}) = 1 - \sum_{j=1}^{N}(-1)^{j-1}\binom{N}{j}\times\frac{(N-j)!}{N!} = 1 - \sum_{j=1}^{N}(-1)^{j-1}\frac{1}{j!} = \sum_{j=0}^{N}\frac{(-1)^j}{j!}$$

4. On a $\mathrm{Card}(E_{N,k}) = \dbinom{N}{k}\mathrm{Card}(E_{N-k,0})$ (on choisit les k éléments que l'on fixe et on « dérange » tous les $N-k$ autres). Donc :

$$\begin{aligned} P(E_{N,k}) &= \frac{\mathrm{Card}(E_{N,k})}{N!} = \binom{N}{k}\frac{\mathrm{Card}(E_{N-k,0})}{N!} \\ &= \binom{N}{k}\frac{(N-k)!P(E_{N-k}=0)}{N!} = \frac{1}{k!}P(E_{N-k,0}) \end{aligned}$$

5. $P(E_{N,k}) = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\sum_{j=0}^{N-k}\frac{(-1)^j}{j!} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1} = p_k$.

On reconnaît dans la famille $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la liste des probabilités afférentes à une loi de Poisson de paramètre 1.

6. On est en présence d'une série alternée dont le terme général décroît en valeur absolue et de somme $1/\mathrm{e}$. On a classiquement :

$$S_{2p+1} \leqslant S_{2p+3} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant S_{2p+2} \leqslant S_{2p}$$

On a alors, si on note : $R_n = \dfrac{1}{\mathrm{e}} - S_n$: $|R_n| \leqslant |S_n - S_{n+1}| = \dfrac{1}{(n+1)!}$

D'où : $|P(E_{N,j}) - p_j| = |\dfrac{1}{j!}(\dfrac{1}{\mathrm{e}} - S_{N-j})| = |\dfrac{1}{j!}R_{N-j}| \leqslant \dfrac{1}{j!(N-j+1)!}$

et en sommant :

$$\sum_{j=0}^{n}|P(E_{N,j}) - p_j| \leqslant \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!(N-j+1)!} \leqslant \frac{1}{(N-n+1)!}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{(N-n+1)!}$$

Exercice 3.11.

1. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{e}^x}$, avec $\lambda > 0$ fixé.

a) Prouver que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

b) Soit U une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de densité f et $V = \exp(U)$. Déterminer la loi de V.

c) Soit T une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi uniforme sur $]0, 1[$. Démontrer que la variable aléatoire $W = \ln\big(-\dfrac{\ln T}{\lambda}\big)$ a même loi que U.

2. Soient X , Y et Z trois variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mutuellement indépendantes, de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. ($\lambda > 0$ fixé).

a) Rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance de X.

b) La variable $X + Y$ peut-elle suivre une loi exponentielle ?

c) Soit $S = X + Y + Z$. Montrer que S admet une densité et déterminer une densité de S.

3. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice relativement à cette base :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$$

on note $s = a + b + c$.

a) Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et sa dimension.

b) A quelle condition sur (a, b, c) la matrice $M(a, b, c)$ est-elle celle d'un projecteur ?

c) Démontrer que si $s = 0$, alors $M(a, b, c)$ admet 0 pour seule valeur propre. Est-elle diagonalisable ?

d) Démontrer que si $s \neq 0$, $M(a, b, c)$ est diagonalisable.

4. Soient X , Y et Z trois variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mutuellement indépendantes, de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

a) Déterminer la probabilité que la matrice $M(X, Y, Z)$ ne soit pas diagonalisable (M est définie dans la question précédente).

b) Calculer la probabilité que $M(X, Y, Z)$ ait une valeur propre supérieure à 1.

Solution

1. a) La fonction f est continue, positive et par intégration « à vue » :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[-\mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{e}^x}\big]_a^b = \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{e}^a} - \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{e}^b}$$

Avec $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, il vient : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1. Ce qui prouve que f est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ et on obtient au passage :

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{e}^b}$$

b) La variable aléatoire $V = \exp(U)$ admet $\mathbb{R}_+^*$ pour support, soit F_V sa fonction de répartition. On a :

$$\forall\, v > 0, F_V(v) = P(V \leqslant v) = P(\exp(U) \leqslant v) = P(U \leqslant \ln v) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{e}^{\ln v}}$$
$$= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda v}.$$

Ainsi V suit la loi exponentielle de paramètre λ.

c) Pour tout réel w, on a :

$$P(W \leqslant w) = P(\ln\big(-\frac{\ln T}{\lambda}\big) \leqslant w) = P(-\frac{\ln T}{\lambda} \leqslant \mathrm{e}^w) = P(\ln T \geq -\lambda \mathrm{e}^w)$$
$$= P(T \geq \mathrm{e}^{-\lambda e^w}) = 1 - e^{-\lambda e^w} \text{ (car } T \text{ suit la loi } \mathcal{U}_{]0,1[}).$$

Les deux variables aléatoires W et U ont même fonction de répartition, elles ont donc même loi.

2. a) Comme $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, on a : $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

b) Par linéarité de l'espérance $E(X+Y) = \dfrac{2}{\lambda}$ et par indépendance de X et Y, on a $V(X+Y) = \dfrac{2}{\lambda^2}$. Si $X+Y$ suivait une loi exponentielle, son paramètre serait $\mu = \dfrac{\lambda}{2}$ car $E(X+Y) = \dfrac{2}{\lambda}$ et sa variance serait alors $\dfrac{4}{\lambda^2}$, ce qui n'est pas le cas, donc $X+Y$ ne suit pas une loi exponentielle.

c) La variable aléatoire λX suit la loi $\mathcal{E}(1)$, donc la loi $\gamma(1)$. Par stabilité des lois gamma, on sait que $\lambda(X+Y+Z)$ est une variable aléatoire à densité suivant la loi $\gamma(3)$. Une densité f_S de S est donc :

$$f_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \lambda^3 \dfrac{x^2}{2} \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

3. a) Si $(a,b,c) = (0,0,0)$ alors $\operatorname{Ker} u = \mathbb{R}^3$ et sinon $\operatorname{Ker} u$ est le plan d'équation $x+y+z=0$.

b) On a $[M(a,b,c)]^2 = (a+b+c)M(a,b,c)$, donc $M(a,b,c)$ est la matrice d'un projecteur si et seulement si $a+b+c=1$.

c) Si $s=0$, on a $M^2=0$ et 0 est la seule valeur propre possible de M. Comme M n'est pas inversible, 0 est effectivement valeur propre et M n'est diagonalisable que si $M=0$, donc si $a=b=c=0$.

d) Si $s \neq 0$, le vecteur $w=(a,b,c)$ est non nul et est vecteur propre de u associé à la valeur propre non nulle $s=a+b+c$, car $u(w)=sw$.

D'autre part, le plan d'équation $x+y+z=0$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 0, donc la somme des dimensions des sous-espaces propres est ad hoc et u (ou M) est diagonalisable.

4. a) $M(X,Y,Z)$ diagonalisable $\iff (X,Y,Z)=(0,0,0)$ ou $X+Y+Z \neq 0$. Or $P((X,Y,Z)=(0,0,0))=0$ et $P(X+Y+Z\neq 0)=1$ puisque la variable $S=X+Y+Z$ est à densité continue donc ne charge pas les points. On en déduit que M est quasi-certainement diagonalisable.

b) La valeur propre non nulle de $M(X,Y,Z)$ est $S=X+Y+Z$ lorsque S est non nul.

La probabilité que cette valeur propre soit supérieure à 1 est $\displaystyle\int_1^{+\infty} \lambda^3 \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-\lambda x}dx$ et à l'aide d'intégrations par parties successives, cette probabilité vaut :

$$\Big(\frac{\lambda^2}{2}+\lambda+1\Big)\mathrm{e}^{-\lambda}$$

Exercice 3.12.

Toutes les variables aléatoires permettant de modéliser cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.
Un joueur A lance le dé $6n$ fois. On dit qu'il gagne s'il obtient au moins n fois la face 6. Un joueur B lance le dé $6(n+1)$ fois. On dit qu'il gagne s'il obtient au moins $(n+1)$ fois la face 6.
Le but de l'exercice est de déterminer qui a le plus de chances de gagner.

On note X_n le nombre de fois où B obtient la face 6 au cours des $6n$ premiers lancers, Y le nombre de fois où il obtient la face 6 au cours des 6 derniers lancers et on pose $X_{n+1}=X_n+Y$.

1. Quelle est la loi de Y ?

2. Montrer que

$$P(X_{n+1}\geqslant n+1)=P(X_n\geqslant n)+\sum_{r=0}^{6}[P(X_n\geqslant n+1-r)-P(X_n\geqslant n)]P(Y=r).$$

3. a) Montrer que pour $k\in[\![0,4]\!], P(X_n=n-k-1)\leqslant P(X_n=n-k)$.

b) Montrer que $\forall\, r\in[\![0,6]\!]$,
$$P(X_n\geqslant n+1-r)-P(X_n\geqslant n)\leqslant (r-1)P(X_n=n)$$

4. Conclure.

Solution

1. $Y\hookrightarrow\mathcal{B}(6,1/6)$.

2. On a :

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}\geqslant n+1)&=\sum_{r=0}^{6}P(Y=r)P_{(Y=r)}(X_{n+1}\geqslant n+1)\\&=\sum_{r=0}^{6}P(Y=r)P(X_n\geqslant n+1-r)\end{aligned}$$

et on fait apparaître l'expression demandée :

$P(X_{n+1}\geqslant n+1)$

$$= \sum_{r=0}^{6} P(Y=r)(P(X_n \geqslant n+1-r) - P(X_n \geqslant n)) + \sum_{r=0}^{6} P(Y=r)P(X_n \geqslant n)$$

$$= \sum_{r=0}^{6} P(Y=r)(P(X_n \geqslant n+1-r) - P(X_n \geqslant n)) + P(X_n \geqslant n)$$

3. a) $\star$ Si $n-k-1<0$, le résultat demandé est banal.

$\star$ Si $n-k-1 \geqslant 0$, a fortiori $n-k \geqslant 0$.

Or on a, pour $i \in [\![0, 6n]\!]$: $P(X_n = i) = \binom{6n}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{5}{6}\right)^{6n-i}$,

Donc pour k compris entre 0 et 4 tel que $n-k-1 \geqslant 0$, il vient :

$$\frac{P(X_n = n-k)}{P(X_n = n-k-1)} = \frac{\binom{6n}{n-k}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-k}\left(\frac{5}{6}\right)^{5n+k}}{\binom{6n}{n-k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-k-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{5n+k+1}}$$

$$= \frac{(6n)!}{(n-k)!(5n+k)!} \times \frac{(n-k-1)!(5n+k+1)!}{(6n)!} \times \frac{1}{6} \times \frac{6}{5}$$

$$= \frac{5n+k+1}{5(n-k)} \geqslant 1$$

Ce qu'il fallait :

$$P(X_n = n-k-1) \leqslant P(X_n = n-k)$$

b) $\star$ Pour $r=0$: $P(X_n \geqslant n+1) - P(X_n \geqslant n) = -P(X_n = n)$.

$\star$ Pour $r=1$: $P(X_n \geqslant n) - P(X_n \geqslant n) = 0$.

$\star$ Pour $r=2$: $P(X_n \geqslant n-1) - P(X_n \geqslant n) = P(X_n = n-1) \leqslant P(X_n = n)$

Les inégalités demandées sont donc banales.

Pour $r \in [\![3, 6]\!]$, on écrit :

$$P(X_n \geqslant n+1-r) - P(X_n \geqslant n)$$
$$= P(X_n = n-1) + P(x_n = n-2) + \cdots + P(X_n = n+1-r)$$

et cette somme comporte $r-1$ termes tous majorés par $P(X_n = n-1)$ (par itération de l'inégalité vue en 3. a)), donc *a fortiori* par $P(X_n = n)$

Finalement, pour tout $r \in [\![0, 6]\!]$:

$$P(X_n \geqslant n+1-r) - P(X_n \geqslant n) \leqslant (r-1)P(X_n = n)$$

4. On a donc :

$$P(X_{n+1} \geqslant n+1) - P(X_n \geqslant n) = \sum_{r=0}^{6} P(Y=r)(P(X_n \geqslant n+1-r) - P(X_n \geqslant n))$$

$$\leqslant \sum_{r=0}^{6} P(Y=r)(r-1)P(X_n = n) = P(X_n = n)E(Y-1)$$

Or $E(Y) = 1$ et donc $P(X_{n+1} \geqslant n+1) \leqslant P(X_n \geqslant n)$: c'est celui qui lance le moins de dés qui a le plus de chances de gagner.

Exercice 3.13.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre 1.

On définit la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ par $Y_1 = X_1$ et pour tout entier $n \geq 1$:

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{n+1} X_{n+1}$$

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{n}X_n$?

2. **a)** Déterminer une densité f_2 de Y_2.

b) Les variables alétoires Y_n et $\frac{1}{n+1}X_{n+1}$ sont elles indépendantes ?

c) Déterminer une densité de la variable aléatoire Y_n.

3. En déduire que Y_n et $Z_n = \sup(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ suivent la même loi.

4. Déterminer la limite en probabilité de la suite $\left(\frac{Y_n}{n}\right)_{n\geq 1}$.

Solution

1. La variable aléatoire $\frac{1}{n}X_n$ suit la loi exponentielle de paramètre n.

2. a) On pose $f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $g(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$,

alors la variable aléatoire $Y_2 = Y_1 + \frac{1}{2}X_2 = X_1 + \frac{1}{2}X_2$ est une variable à densité, de densité notée h, avec pour $x \geq 0$:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t)g(t)dt = \int_0^x e^{-(x-t)} 2e^{-2t}dt = 2e^{-x}(1 - e^{-x})$$

Ainsi : $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2e^{-x}(1-e^{-x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

b) On a : $Y_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1}(Y_{k+1} - Y_k) + Y_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}X_k$. Donc Y_n et $\frac{1}{n+1}X_{n+1}$ sont indépendants (lemme des coalitions).

c) On montre par récurrence que Y_n est de densité

$$h_n(x) = \begin{cases} ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En effet :

$\to$ La propriété est vraie aux rangs 0 et 1.

$\to$ Si la propriété est vraie au rang n, alors comme $Y_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} X_{n+1} + Y_n$, au rang suivant :
pour $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
h_{n+1}(x) = \int_0^x & (n+1)\mathrm{e}^{-(n+1)(x-t)} n\mathrm{e}^{-t}(1-\mathrm{e}^{-t})^{n-1}\,dt \\
&= (n+1)\mathrm{e}^{-(n+1)x}\int_0^x n\mathrm{e}^{nt}(1-\mathrm{e}^{-t})^{n-1}\,dt \\
&= (n+1)\mathrm{e}^{-(n+1)x}\int_0^x n\mathrm{e}^{t}(\mathrm{e}^{t}-1)^{n-1}\,dt \\
&= (n+1)\mathrm{e}^{-(n+1)x}(\mathrm{e}^{x}-1)^{n} = (n+1)\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n}
\end{aligned}$$

Ce qui montre que la propriété est héréditaire et on conclut par le principe de récurrence.

3. Déterminons la loi de Z_n.

Pour x réel : $P(Z_n \leqslant x) = P(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x) = \big(F(x)\big)^n$

Une densité de Z_n s'obtient alors par dérivation et :

$$f_{Z_n}(x) = \begin{cases} n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

D'où le résultat.

4. On a $\dfrac{Y_n}{n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{X_k}{k}$. Ainsi :

$$E\Big(\frac{Y_n}{n}\Big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \sim \frac{\ln n}{n} \text{ et } V\Big(\frac{Y_n}{n}\Big) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \sim \frac{C}{n^2}$$

(il est inutile de connaitre la valeur de C, mais on peut savoir qu'elle vaut $\pi^2/6$)

L'inégalité de Tchebicheff permet d'écrire, pour $\delta > 0$ donné :

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(|Y_n/n - E(Y_n/n)| > \delta) = 0$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Y_n/n) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Alors :

Il existe N_1 tel que pour $n \geq N_1$, $P(|Y_n/n - E(Y_n/n)| > \delta) < \varepsilon/2$ et il existe N_2 tel que pour $n \geq N_2$ $E(Y_n/n) < \varepsilon/2$.

Par l'inégalité triangulaire, on a l'inclusion :

$\{\omega \in \Omega / |Y_n/n - E(Y_n/n)| < \delta/2\} \cup \{\omega \in \Omega / |E(Y_n/n)| < \delta/2\} \subset \{\omega \in \Omega / |Y_n/n| < \delta\}$

on conclut en passant aux complémentaires que $\dfrac{Y_n}{n}$ tend en probabilité vers 0.

Exercice 3.14.

1. Étudier les variations de la fonction $\eta : x \mapsto -x\ln x$ sur $]0,1/\mathrm{e}[$.

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des variables aléatoires X à densité définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, admettant un moment d'ordre 2 et telles qu'une densité f de X soit continue strictement positive et vérifie : $x\mapsto x^2f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. On pose, alors :

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln\big(f(x)\big)\,dx$$

2. Soit $X\in\mathcal{E}$. Montrer que $H(X)$ existe.

3. Soit $Y_{\mu,\sigma}$ une variable aléatoire de loi normale d'espérance μ et de variance σ^2. Soit $g_{\mu,\sigma}$ une densité de $Y_{\mu,\sigma}$.
Vérifier que $Y_{\mu,\sigma}$ appartient à $\mathcal{E}$ et calculer $H(Y_{\mu,\sigma})$.

4. Soit $X\in\mathcal{E}$ de densité f. Pour tous réels $\sigma>0$ et $\mu>0$, on pose

$$K_{\mu,\sigma}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln\big(\frac{f(x)}{g_{\mu,\sigma}(x)}\big)\,dx.$$

a) Montrer que cette quantité est bien définie.

b) Montrer que pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$, on a $-\ln a \geqslant 1-a$; en déduire que $K_{\mu,\sigma}(X)\geqslant 0$.

c) En déduire que $H(X)\leqslant H(Y_{m,s})$, où $m=E(X)$ et $s^2=V(X)$.

<u>**Solution**</u>

1. η est continue sur $]0,1/\mathrm{e}]$, dérivable sur $]0,1/\mathrm{e}[$, de dérivée $\eta'(x) = -\ln x - 1 > 0$, donc η est strictement croissante sur $]0,1/\mathrm{e}]$ d'image $]0,1/\mathrm{e}]$.

2. On pose $M=\sup\limits_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|$. Pour $|x|\geqslant\sqrt{M}\mathrm{e}$, on a : $|f(x)|\leqslant\dfrac{M}{x^2}\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et par la question précédente :

$$|f(x)\ln f(x)|\leqslant\frac{M}{x^2}\big|\ln\big(\frac{M}{x^2}\big)\big| \underset{(\pm\infty)}{=} o\big(\frac{1}{|x|^{3/2}}\big)$$

Ainsi l'intégrale de $f\ln f$ converge tant pour la borne $-\infty$ que pour la borne $+\infty$. Comme il n'y a pas de problème intermédiaire ($f\ln f$ est continue sur $\mathbb{R}$), on conclut à l'existence de $H(X)$.

3. On prend : $g_{\mu,\sigma}(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

On sait que $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^pg_{\mu,\sigma}(x)=0$ pour tout p. Puis connaissant l'intégrale d'une densité et l'intégrale définissant une variance, il vient :

$$H(Y_{\mu,\sigma}) = -\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\mu,\sigma}(x)\big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - \ln\sigma\sqrt{2\pi}\big)dx = \frac{1}{2} + \ln\sigma\sqrt{2\pi}$$

4. a) On a : $f\ln\big(\frac{f}{g_{\mu,\sigma}}\big) = f\ln f - f\times\big(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - \ln(\sigma\sqrt{2\pi})\big)$, qui est donc combinaison de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$.

b) On sait que $\ln(1+x) \leqslant x$, donc $-\ln a \geqslant 1-a$ et pour $a = \dfrac{g_{\mu,\sigma}(x)}{f(x)}$, il vient :

$$-f(x)\frac{g_{\mu,\sigma}(x)}{f(x)} \geqslant f(x) - g_{\mu,\sigma}(x)$$

En intégrant sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$K_{\mu,\sigma}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln\big(\frac{f(x)}{g_{\sigma,\mu}(x)}\big)dx \geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\mu,\sigma}(x)\,dx = 0$$

c) Pour $\mu = m$ et $\sigma = s$, il vient

$$H(X) \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\big(\frac{(x-m)^2}{2s^2} + \ln(s\sqrt{2\pi})\big)dx \leqslant \frac{1}{2} + \ln s\sqrt{2\pi} \leqslant H(Y_{m,s})$$

Exercice 3.15.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

La roue d'une loterie est représentée par un disque de rayon 1, dont le centre O est pris pour origine d'un repère orthonormé. Cette roue est lancée dans le sens trigonométrique, l'angle (exprimé en radians) dont elle tourne avant de s'arrêter est une variable aléatoire, notée U. On suppose que U suit la loi exponentielle de paramètre a.

La roue porte une marque M, qui, au départ, est située au point de coordonnées $(1,0)$ et qui, après l'arrêt de la roue, se trouve au point de coordonnées aléatoires $X = \cos U$, $Y = \sin U$.

1. Soient $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-au}\cos u\,du$, $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-au}\sin u\,du$.

a) Montrer que les intégrales I et J sont convergentes.

b) A l'aide d'intégrations par parties, que l'on justifiera, établir deux relations liant I et J. En déduire les valeurs de I et J.

c) Calculer les espérances des variables aléatoires X et Y.

2. Un joueur gagne à cette loterie si, à l'arrêt de la roue, l'ordonnée de M vérifie la relation : $Y \geqslant \frac{1}{2}$.

a) Calculer la probabilité, notée $p(a)$, que le joueur gagne.

b) Déterminer $\lim\limits_{a\to 0} p(a)$.

Solution

1. a) Montrons que les intégrales I et J sont absolument convergentes. On effet, on peut écrire :

$$|\cos u.\mathrm{e}^{-au}| \leqslant \mathrm{e}^{-au}, \quad |\sin u.\mathrm{e}^{-au}| \leqslant \mathrm{e}^{-au}$$

et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-au}\,du$ existe.

b) En utilisant $A > 0$ et des intégrations par parties sur $[0, A]$, intervalle où les fonctions sinus, cosinus et exponentielle sont de classe C^∞, il vient :

$$I(A) = \int_0^A \cos u.\mathrm{e}^{-au}\,du = \sin A.\mathrm{e}^{-aA} + a(1 - \cos A.\mathrm{e}^{-aA}) - a^2 I(A)$$

$$J(A) = \int_0^A \sin u.\mathrm{e}^{-au}\,du = -a\sin A.\mathrm{e}^{-aA} + 1 - \cos A.\mathrm{e}^{-aA} - a^2 J(A)$$

En prenant la limite lorsque A tend vers l'infini, les fonctions sin et cos étant bornées sur $\mathbb{R}$, il vient :

$$I = a - a^2 I, \qquad J = 1 - a^2 J$$

Donc

$$I = \frac{a}{1+a^2}, \qquad J = \frac{1}{1+a^2}$$

c) Par le théorème du transfert :

$$E(X) = E(\cos U) = \int_a^{+\infty} \cos u.a\mathrm{e}^{-au}\,du = aI = \frac{a^2}{1+a^2}$$

$$E(Y) = E(\sin U) = \int_a^{+\infty} \sin u.a\mathrm{e}^{-au}\,du = aJ = \frac{a}{1+a^2}$$

2. a) Le joueur gagne si et seulement si $\sin U \geqslant 1/2$ soit si et seulement si $U \in [\pi/6, 5\pi/6] \pmod{2\pi}$. Donc :

$$p(a) = \sum_{k=0}^{\infty} P\big(\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant U \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\big) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\pi/6+2k\pi}^{5\pi/6+2k\pi} a.\mathrm{e}^{-at}\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{(-\pi/6-2k\pi)a} - \mathrm{e}^{(-5\pi/6-2k\pi)a}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-a\pi/6} - \mathrm{e}^{-a5\pi/6}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi a}}$$

$$= \mathrm{e}^{-a\pi/6}\,\frac{1-\mathrm{e}^{-2a\pi/3}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi a}}$$

b) Lorsque $a \to 0$, comme $\mathrm{e}^{-ax} = 1 - ax + o(x)$ au voisinage de 0, il vient :

$$\lim_{a\to 0} p(a) = \frac{1}{3}$$

Exercice 3.16.

Soit $p \in]0,1[\setminus \{1/2\}$. On pose $q = 1 - p$. On considère une pièce biaisée pour laquelle la probabilité d'obtenir Face est p et celle d'obtenir Pile est q. Lors d'une succession de lancers, une *excursion* est une séquence de lancers consécutifs qui renvoient le même résultat (et encadrée par deux lancers donnant le résultat contraire sauf pour la première et la dernière excursion).

Par exemple, dans la séquence « $FFFPPFPPFF$ » représentant les résultats successifs d'une série des 10 premiers lancers , il y a 5 excursions, la première « FFF » est de longueur 3, la deuxième « PP » est de longueur 2, la troisième « F » est de longueur 1, la quatrième « PP » de longueur 2 et enfin la dernière est de longueur 2.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n le nombre aléatoire d'excursions présentes au cours des n premiers lancers.

Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on note I_j la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat du $(j+1)^{\text{ème}}$ lancer est différent de celui du $j^{\text{ème}}$ et qui vaut 0 sinon.

1. Exprimer R_n en fonction des variables aléatoires (I_j).

2. Déterminer l'espérance $E(R_n)$.

3. a) Calculer l'espérance de $I_1 I_2$.

   b) Les variables aléatoires I_j et I_{j+1} sont-elles indépendantes ?

   c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur le couple $(j, \ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$ pour que I_j et I_ℓ soient indépendantes.

4. Calculer la variance de R_n.

5. En déduire que la suite $\left(\dfrac{R_n - 1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers un réel à préciser.

<u>Solution</u>

1. En remarquant que le premier lancer détermine la nature de la première excursion, on obtient : $R_n = 1 + \sum\limits_{j=1}^{n-1} I_j$.

2. Avec des notations évidentes et par incompatibilité et indépendance :

$$P(I_j = 1) = P(F_j P_{j+1} \cup P_j F_{j+1}) = 2pq$$

Donc $E(I_j) = 2pq$ et par linéarité de l'opérateur espérance :

$$E(R_n) = 1 + 2(n-1)pq$$

3. a) $I_1 I_2$ est le produit de deux variables de Bernoulli, donc est aussi une variable aléatoire de Bernoulli et :

$E(I_1I_2) = P(I_1I_2 = 1) = P((I_1 = 1) \cap I_2 = 1)) = P(P_1F_2P_3 \cup F_1P_2F_3)$
$\qquad = pqp + qpq$

$$E(I_1I_2) = pq(p+q) = pq$$

En fait, pour tout j, on a de même $E(I_jI_{j+1}) = pq$

b) D'autre part $E(I_j) = P(I_j = 1) = 2pq$.

Les variables de Bernoulli I_j et I_{j+1} sont indépendantes si et seulement si :

$$P((I_j = 1) \cap (I_{j+1} = 1)) = P(I_j = 1)P(I_{j+1} = 1)$$

Ce qui équivaut à $pq = (2pq)^2$ ou encore à $p \in \{0, 1/2, 1\}$, ce qui a été exclu par hypothèse.

$$I_j \text{ et } I_{j+1} \text{ ne sont pas indépendantes.}$$

c) Les variables aléatoires I_j et I_ℓ sont indépendantes si et seulement si $|j - \ell| \geqslant 2$.

En effet, la condition est nécessaire (question précédente) et elle est suffisante car I_j est fonction de X_j et de X_{j+1} et I_ℓ est fonction de X_ℓ et $X_{\ell+1}$, donc le résultat est une conséquence du lemme des coalitions.

4. En utilisant les questions précédentes et en regroupant les espérances clairement égales :

$E((R_n - 1)^2) = E((\sum_{i=1}^{n-1} I_j)^2)$
$= (n-1)E(I_1^2) + 2(n-2)E(I_1I_2) + ((n-1)^2 - (n-1) - 2(n-2))E(I_1I_3)$
$= (n-1)E(I_1) + 2(n-2)E(I_1I_2) + ((n-1)^2 - (n-1) - 2(n-2))E(I_1)E(I_3)$
$= 2(n-1)pq + 2(n-2)pq + [(n-1)^2 - (n-1) - 2(n-2)](2pq)^2$
$= 2(2n-3)pq + 4((n-1)^2 - 3n + 5)p^2q^2$

Ainsi :

$V(R_n) = V(R_n - 1) = 2(2n-3)pq + 4((n-1)^2 - 3n + 5)p^2q^2 - (2(n-1)pq)^2$

$$V(R_n) = 2(2n-3)pq - 4(3n-5)(pq)^2$$

6. On a $\dfrac{E[R_n - 1]}{n} = 2pq$. De plus, d'après l'inégalité de Tchebychev,

$$P\Big(\Big|\frac{R_n - 1}{n} - \frac{E[R_n - 1]}{n}\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{V(R_n - 1)}{n^2\varepsilon} = \frac{V(R_n)}{n^2\varepsilon} \leqslant \frac{2(2n-3)pq}{n^2\varepsilon^2}$$

Ainsi, $\big(\dfrac{R_n - 1}{n}\big)_n$ converge en probabilité vers $2pq$.

Exercice 3.17.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f.

On pose pour tout u réel, $\Psi(u) = E(\mathrm{e}^{-uX})$, où E désigne l'opérateur espérance.

2. **a)** Montrer que Ψ est bien définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable sur cet intervalle. Calculer Ψ'.

b) Montrer que $\displaystyle\int_u^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt \underset{(u\to+\infty)}{\sim} \frac{1}{u}\,\mathrm{e}^{-u^2/2}$.

c) Déterminer les variations de Ψ.

d) Déterminer $\lim\limits_{u\to+\infty} \Psi(u)$ et $\lim\limits_{u\to-\infty} \Psi(u)$.

e) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Psi(u)\,du$ est-elle convergente ?

3. Soit $Y = \mathrm{e}^{-X}$. Montrer que Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Donner une densité de Y.

Solution

1. La fonction f est positive, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\times\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}dx = 1$$

2. a) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ux}\mathrm{e}^{-x^2/2}dx$ est convergente pour tout réel u, car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{e}^{-x^2/2} = 0$. On peut donc appliquer le théorème de transfert et :

$$E(\mathrm{e}^{-uX}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ux-x^2/2}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{u^2/2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x+u)^2/2}dx$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{u^2/2}\int_u^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}dx$$

La fonction Ψ est bien définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues et dérivables et :

$$\Psi'(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big(u\mathrm{e}^{u^2/2}\int_u^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}dx - 1\Big)$$

b) Pour $u > 0$, on utilise une intégration par parties :

$$\int_u^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}dt = \int_u^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2/2}\times\frac{1}{t}\,dt = \frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{u} - \int_u^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{t^2}dt$$

et :

Ainsi :

$$\int_u^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{t^2}dt \leqslant \frac{1}{u^2}\int_u^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}dt = o\Big(\int_u^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}dt\Big)$$

$$\int_u^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}dt \underset{(u\to+\infty)}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{u}$$

c) Pour $u<0$, on a $\Psi'(u)<0$ et pour $u>0$, la question précédente donne :

$$u\mathrm{e}^{u^2/2}\int_u^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}dx - 1 = -u\mathrm{e}^{u^2/2}\int_u^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{t^2} < 0$$

Ainsi la fonction Ψ est-elle décroissante sur $\mathbb{R}$.

d) Par la question b), au voisinage de $+\infty$, $\Psi(u)$ a un équivalent de la forme $\dfrac{C}{u}$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \Psi(u)=0$.

Au voisinage de $-\infty$, $\Psi(u)$ a un équivalent de la forme $C\mathrm{e}^{u^2/2}$, donc $\lim\limits_{-\infty} \Psi = +\infty$.

e) L'équivalent trouvé en d) montre que l'intégrale proposée est divergente.

3. Y est une variable aléatoire comme fonction continue d'une variable aléatoire X. On a $Y(\Omega)=\,]1,+\infty[$ et pour $x\geqslant 1$

$$P(Y\leqslant x) = P(\mathrm{e}^{-X}\leqslant x) = P(X\geqslant -\ln(x)) = 1 - F_X(-\ln x)$$

Une densité de Y est donc : $f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{x}f_X(-\ln x) & \text{si } x>1\end{cases}$

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\leqslant 1\\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\ln^2(x)/2} & \text{si } x>1\end{cases}$$

Exercice 3.18.

On dispose de n variables aléatoires indépendantes ($n\geqslant 2$), notées $X_1,\ldots,X_n$ de même loi de Poisson de paramètre θ inconnu ($\theta\in\,]0,+\infty[$) et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$. On souhaite estimer $\exp(-\theta)$.

On définit pour tout i élément de $[\![1,n]\!]$ la variable aléatoire Y_i par :

$$Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i(\omega)=0\\ 0 & \text{si } X_i(\omega)\neq 0\end{cases}$$

On pose $\overline{Y_n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$.

1. a) Pour tout i élément de $[\![1,n]\!]$, donner la loi de Y_i.

b) Quelle est la loi de $n\overline{Y_n}$? Que vaut l'espérance $E(\overline{Y_n})$?

c) Calculer la variance $V(\overline{Y_n})$. Conclusion ?

2. Pour tout k élément de $[\![1, n]\!]$, on pose $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$.

a) Pour tout k élément de $[\![1, n]\!]$, rappeler la loi de S_k.

Pour tout entier naturel j, on pose $\varphi(j) = P_{(S_n=j)}(X_1 = 0)$.

b) Montrer que pour tout entier naturel j, on a : $\varphi(j) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^j$.

On peut ainsi définir l'estimateur : $\varphi(S_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{S_n}$.

c) Montrer que $\varphi(S_n)$ admet une espérance et que $E(\varphi(S_n)) = \exp(-\theta)$.

d) Montrer que $\varphi(S_n)$ admet une variance et que

$V(\varphi(S_n)) = \exp(-2\theta)\left(\exp\left(\frac{\theta}{n}\right) - 1\right)$.

Conclusion ?

3. On souhaite ici comparer les « performances » de $\overline{Y_n}$ et $\varphi(S_n)$ en tant qu'estimateurs de $\exp(-\theta)$.

a) On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\exp\left(\frac{\theta}{n}\right) \leqslant \frac{\exp(\theta)}{n} + \frac{n-1}{n}$.

Montrer l'inégalité : $V(\varphi(S_n)) \leqslant V(\overline{Y_n})$.

b) Comparer les risques quadratiques de $\overline{Y_n}$ et $\varphi(S_n)$.

Solution

1. a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, Y_i suit une loi de Bernoulli, et on a

$$P(Y_i = 1) = P(X_i = 0) = \exp(-\theta).$$

Donc $Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathrm{e}^{-\theta})$.

b) Comme les X_i sont des variables aléatoires indépendantes, il en est de même des variables aléatoires Y_i, et donc, d'après le cours, on en déduit que

$$n\overline{Y}_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \mathrm{e}^{-\theta}).$$

Ainsi, $E\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i\right) = \exp(-\theta)$.

c) $V(\overline{Y_n}) = \frac{1}{n^2}V\left(\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n^2}n\mathrm{e}^{-\theta}(1 - \mathrm{e}^{-\theta}) = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-\theta}(1 - \mathrm{e}^{-\theta})$.

2. a) S_k est une somme de variables aléatoires de Poisson, indépendantes, donc suit aussi une loi de Poisson, de paramètre $k\theta$.

b) Pour tout j entier naturel, on a :

$$\varphi(j) = P_{(S_n=j)}(X_1 = 0) = \frac{P\left((S_n = j) \cap (X_1 = 0)\right)}{P(S_n = j)}$$

Or, $(S_n = j) \cap (X_1 = 0) = (X_1 = 0) \cap \left(\sum\limits_{i=2}^{n} X_i = j\right)$.

Seulement, comme X_1 est indépendant de $\sum_{i=2}^{n} X_i$, qui suit d'ailleurs une loi de Poisson, $\mathcal{P}((n-1)\theta)$, on obtient :

$$P((S_n = j) \cap (X_1 = 0)) = P(X_1 = 0) \times P\big(\sum_{i=2}^{n} X_i = j\big)$$
$$= \mathrm{e}^{-\theta} \frac{\mathrm{e}^{-(n-1)\theta}\big((n-1)\theta\big)^j}{j!}.$$

Ainsi, on a bien $\varphi(j) = \big(1 - \frac{1}{n}\big)^j$.

c) D'après le théorème de transfert, $\varphi(S_n)$ a une espérance si et seulement si la série $\sum_{j\geq 0} \big(1-\frac{1}{n}\big)^j P(S_n = j)$ converge absolument.

Or

$$\sum_{j=0}^{\infty} \big(1 - \frac{1}{n}\big)^j P(S_n = j) = \sum_{j=0}^{\infty} P\big((S_n = j) \cap (X_1 = 0)\big) = P(X_1 = 0)$$
$$= \exp(-\theta).$$

Dopnc : $E(\varphi(S_n)) = \mathrm{e}^{-\theta}$.

d) De même, $\varphi(S_n)^2$ a une espérance si $\sum_{j\geq 0} \big((1-\frac{1}{n})^j\big)^2 P(S_n = j)$ converge. Ce qui est bien le cas encore une fois, puisque pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j=0}^{N} \big(1 - \frac{1}{n}\big)^{2j} \frac{\mathrm{e}^{-n\theta}}{j!}(n\theta)^j = \mathrm{e}^{-n\theta} \sum_{j=0}^{N} \big[\big(1-\frac{1}{n}\big)^2 n\theta\big]^j \frac{1}{j!} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \exp\big(\big(-2+\frac{1}{n}\big)\theta\big).$$

Donc, $\varphi(S_n)$ admet une variance, qui vaut :

$$V(\varphi(S_n)) = E(\varphi(S_n)^2) - E(\varphi(S_n))^2 = \exp(-2\theta)\big[\exp\big(\frac{1}{n}\theta\big) - 1\big]$$

3. a) De $\exp\big(\frac{\theta}{n}\big) \leqslant \frac{\exp(\theta)}{n} + \frac{n-1}{n}$, on déduit :

$$V(\varphi(S_n)) - V(\overline{Y_n}) = \exp(-2\theta)\big[\exp\big(\frac{1}{n}\theta\big) - 1 - \frac{\exp(\theta)}{n} + \frac{1}{n}\big] \leqslant 0$$

Donc, on obtient $V(\varphi(S_n)) \leqslant V(\overline{Y_n})$.

b) Puisque $\varphi(S_n)$ et $\overline{Y_n}$ sont sans biais, on en déduit que le risque quadratique est égal à la variance, et donc que le risque quadratique de $\overline{Y_n}$ est plus grand que celui de $\varphi(S_n)$.

Exercice 3.19.

Les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit λ et μ deux réels strictement positifs.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et Y suivant une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$.

On définit les variables aléatoires I et Z par : $I = \inf(X, Y)$ et $Z = |X - Y|$.

1. Reconnaître la loi de I.

2. Montrer que $X-Y$ est une variable aléatoire à densité, dont on déterminera une densité. En déduire que Z est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

3. Montrer que Z admet une espérance et calculer $E(Z)$.

4. Montrer que $E(IZ) - E(I)E(Z) = 0$ (on pourra considérer $S = \sup(X, Y)$ et on remarquera que $Z = S - I$).

Solution

1. Soit x réel, $P(I \leqslant x) = 1 - P(I > x) = 1 - P((X > x) \cap (Y > x))$.

X et Y étant indépendantes, on a : $P(I \leqslant x) = 1 - P(X > x)P(Y > x)$.

On note F_I la fonction de répartition de I.

$\to \forall x < 0, F_I(x) = 0$.
$\to \forall x \geq 0, F_I(x) = 1 - (1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}))(1 - (1 - \mathrm{e}^{-\mu x})) = 1 - \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)x}$.

Ainsi I suit la loi exponentielle de paramètre $(\lambda + \mu)$.

2. X et Y sont indépendantes donc X et $-Y$ aussi. Une densité de X est bornée sur $\mathbb{R}$ donc (produit de convolution), $X - Y$ est une variable aléatoire à densité dont une densité f_{X-Y} est définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f_{X-Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_{-Y}(t)\, dt$$

où f_X et f_{-Y} sont des densités respectives de X et $-Y$. Comme il est facile de voir que $t \mapsto f_Y(-t)$ est une densité de $-Y$, il vient :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f_{X-Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_Y(-t)\, dt$$

$\to$ On suppose $x < 0$.

$$f_{X-Y}(x) = \int_{-\infty}^{x} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda(x-t)} \mu \mathrm{e}^{\mu t}\, dt = \lambda\mu \mathrm{e}^{-\lambda x} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{(\mu+\lambda)t}\, dt = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \mathrm{e}^{\mu x}$$

$\to$ On suppose $x \geq 0$.

$$f_{X-Y}(x) = \int_{-\infty}^{0} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda(x-t)} \mu \mathrm{e}^{\mu t}\, dt = \lambda\mu \mathrm{e}^{-\lambda x} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(\mu+\lambda)t}\, dt = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

F_Z désignant la fonction de répartition de Z, il vient :

$\to \forall\, x < 0, F_Z(x) = 0$
$\to \forall\, x \geq 0, F_Z(x) = P(-x \leqslant X - Y \leqslant x) = F_{X-Y}(x) - F_{X-Y}(-x)$

(F_{X-Y} désignant la fonction de répartition de $X - Y$)

Comme f_{X-Y} est continue sur $\mathbb{R}$, F_{X-Y} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Enfin :

$$\forall\, x > 0, f_Z(x) = f_{X-Y}(x) + f_{X-Y}(-x) = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}(\mathrm{e}^{-\lambda x} + \mathrm{e}^{-\mu x})$$

et bien entendu on prend $\forall\, x \leqslant 0, f_Z(x) = 0$.

3. Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx$ est convergente de valeur $\dfrac{1}{\lambda^2}$ (soit en intégrant par parties, soit en revenant à l'espérance d'une variable suivant une loi exponentielle), on en déduit que Z admet une espérance, avec :

$$E(Z) = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\Big(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2}\Big)$$

4. On a : $S + I = X + Y$, on remarque que $Z = S - I$ et $XY = IS$, d'où par indépendance de X et Y :

$$\begin{aligned} E(IZ) &= E(IS - I^2) = E(XY) - E(I^2) = E(X)E(Y) - E(I^2)\\ &= E(X)E(Y) - V(I) - E(I)^2. \end{aligned}$$

Soit : $E(IZ) = \dfrac{1}{\lambda}\times\dfrac{1}{\mu} - \dfrac{1}{(\lambda+\mu)^2} - \dfrac{1}{(\lambda+\mu)^2} = \dfrac{\lambda^2+\mu^2}{\lambda\mu(\lambda+\mu)^2}$

et comme $E(I) = \dfrac{1}{\lambda+\mu}$ et $E(Z) = \dfrac{\lambda^2+\mu^2}{\lambda\mu(\lambda+\mu)}$, il vient $\mathrm{Cov}(I, Z) = 0$.

Exercice 3.20.

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

1. Donner la loi de Y_n et préciser son espérance.

2. a) Pour tout réel strictement positif λ, calculer $\varphi(\lambda) = \ln\big(E(\mathrm{e}^{-\lambda(Y_n - E(Y_n))})\big)$.
   b) Montrer que $\forall\, \lambda > 0$, $\varphi(\lambda) \leqslant \frac{n}{2}\lambda^2$.

3. a) Etablir que pour tout réel λ strictement positif et tout réel x strictement positif, on a :

$$P(E(Y_n) - Y_n \geq x) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda x + \varphi(\lambda)}$$

   b) Montrer que $\forall\, x > 0, P\big(E(Y_n) - Y_n \geq x\big) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2/2n}$.

4. On considère la commande `scilab` suivante : `n=input('entrez la valeur de n :')`
Ecrire une commande `scilab` à la suite de celle-ci, qui permet de simuler la variable aléatoire Y_n.

Solution

1. Comme la loi exponentielle est la loi $\gamma(1)$, alors, par stabilité de la loi gamma, on sait que Y_n suit la loi $\gamma(n)$ et on a : $E(Y_n) = n$.

2. a) Tout d'abord, on a : $\mathrm{e}^{-\lambda(t-n)}\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{\lambda n}\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-(1+\lambda)t}$.

On sait, par croissances comparées ($1+\lambda > 0$) que $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^{n+1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-(1+\lambda)t} = 0$, ce qui prouve que :

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-(1+\lambda)t} \underset{(t\to+\infty)}{=} o(1/t^2)$$

On en déduit, par la règle de Riemann que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-(1+\lambda)t}\,dt$ converge, et par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-(1+\lambda)t}\,dt$ est aussi convergente.

Par conséquent, $E(\mathrm{e}^{-\lambda(Y_n-E(Y_n))})$ existe et par le théorème de transfert, on a :

$$E(\mathrm{e}^{-\lambda(Y_n-E(Y_n))}) = \mathrm{e}^{\lambda n}\int_0^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-(1+\lambda)t}\,dt$$

Le changement de variable $u = (1+\lambda)t$ donne :

$$E(\mathrm{e}^{-\lambda(Y_n-E(Y_n))}) = \frac{\mathrm{e}^{\lambda n}}{(1+\lambda)^n}\int_0^{+\infty}\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-u}\,du = \frac{\mathrm{e}^{\lambda n}}{(1+\lambda)^n}$$

Dès lors, on a : $\varphi(\lambda) = \lambda n - n\ln(1+\lambda)$.

b) On pose $h(\lambda) = \varphi(\lambda) - \dfrac{n\lambda^2}{2} = \lambda n - n\ln(1+\lambda) - \dfrac{n\lambda^2}{2}$. La fonction h est dérivable et on a :

$$\forall\,\lambda > 0, h'(\lambda) = n - \frac{n}{1+\lambda} - \lambda n = -\frac{\lambda^2 n}{1+\lambda} < 0$$

Par conséquent h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme $h(0) = 0$, on conclut que h est négative, ce qui signifie :

$$\forall\,\lambda > 0, \varphi(\lambda) \leqslant \frac{n\lambda^2}{2}$$

3. a) Comme λ est strictement positif, on a :

$$P(E(Y_n) - Y_n \geqslant x) = P(-\lambda(Y_n - E(Y_n)) \geqslant \lambda x)$$

Comme de plus, la fonction exponentielle est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$P(E(Y_n) - Y_n \geqslant x) = P(\mathrm{e}^{\lambda(E(Y_n)-Y_n)} \geqslant \mathrm{e}^{\lambda x})$$

En appliquant alors l'inégalité vue à la première question, on déduit :
$$P(E(Y_n) - Y_n \geqslant x) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda x} E(\mathrm{e}^{\lambda(E(Y_n)-Y_n)})$$
D'après la définition de φ, on a : $P(E(Y_n) - Y_n \geqslant x) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda x+\varphi(\lambda)}$.

En utilisant la question 3. b), on en déduit : $P(E(Y_n) - Y_n \geqslant x) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda x+\frac{n\lambda^2}{2}}$

b) En choisissant $\lambda = \dfrac{x}{n}$ qui est bien strictement positif, on trouve finalement :
$$P(E(Y_n) - Y_n \geqslant x) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2n}}$$

4. On peut proposer : `y=sum(grand(1,n,'exp',1))`

Exercice 3.21.

On lance indéfiniment une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile est $p \in]0,1[$ et celle d'obtenir Face est $q = 1-p$. Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on note X le rang d'apparition du $r^{\text{ème}}$ Pile et Y le nombre de Face obtenues avant l'obtention du $r^{\text{ème}}$ Pile.

1. a) Déterminer la loi de X.

b) Montrer que X admet une espérance et la calculer.

c) Montrer que X admet une variance et la calculer.

2. a) Déterminer la loi de Y. On dit que Y suit la loi $BN(r,p)$.

b) Montrer que Y admet une espérance et une variance que l'on calculera.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^x t^{k-1}\,dt$. En déduire que :
$$\forall\, x \in [0,1[,\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

4. On suppose que Y suit la loi $BN(2,p)$. Soit $Z = \dfrac{1}{Y+2}$.
Prouver l'existence de l'espérance de Z et calculer sa valeur.

5. On suppose que Y suit la loi $BN(1,p)$. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Z sachant que $(Y = n)$ est réalisé, est la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$. Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

__Solution__

1. a) On a $X(\Omega) = [\![r, +\infty[\![$. Pour tout $k \geqslant r$, $[X = k]$ est réalisé si et seulement si, au cours des $(k-1)$ premiers lancers, on a obtenu $(r-1)$ piles et on a obtenu le $r^{\text{ème}}$ pile lors du $k^{\text{ème}}$ lancer.

Si l'on note T la variable aléatoire comptant le nombre de piles au cours des $(k-1)$ premiers lancers, alors $T \hookrightarrow \mathcal{B}(k-1,p)$.
Comme les lancers sont indépendants, on en déduit que

$$P(X=k) = P(T=r-1)p = \binom{k-1}{r-1} p^{r-1} q^{k-r} p = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$$

b) On peut écrire X comme la somme de r variables aléatoires indépendantes X_i suivant chacune une loi géométrique de paramètre p, X_i mesurant le temps d'attente du $i^{\text{ème}}$ pile suite à l'apparition du précédent. On calcule alors $E(X)$ par linéarité de l'espérance : $E(X) = \sum_{i=1}^{r} E(X_i) = r \times \frac{1}{p}$.

[Variante : X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k=r}^{\infty} k \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$ est absolument convergente.
Or, $k\binom{k-1}{r-1} = r\binom{k}{r}$. En reconnaissant une série géométrique dérivée convergente, on a donc :

$$\sum_{k=r}^{\infty} k \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r} = rp^r \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k}{r} q^{k-r} = \frac{rp^r}{(1-q)^{r+1}} = \frac{r}{p}]$$

c) De même : $V(X) = \sum_{i=1}^{r} V(X_i) = \frac{rq}{p^2}$. [On pourrait aussi passer par $E(X(X+1))$ en faisant encore apparaître une série géométrique dérivée, mais le calcul est alors plutôt long]

2. a) On constate que $Y = X - r$. D'où, $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$P(Y=k) = P(X=k+r) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r q^k$.

b) Comme $Y = X - r$, $E(Y) = E(X-r) = E(X) - r = \frac{rq}{p}$ et

$$V(Y) = V(X-r) = V(X) = \frac{rq}{p^2}.$$

3. Soit $x \in [0,1[$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\int_0^x t^{k-1}dt = \frac{x^k}{k}$, on a, par linéarité de l'intégration :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1}dt = \int_0^x \sum_{k=1}^{n} t^{k-1}dt = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}dt$$

$$= -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$$

Or, pour tout $x \in [0,1[$, $|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt| \leqslant \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n dt = \frac{1}{1-x}\,\frac{x^{n+1}}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la formule précédente, on en déduit que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$$

4. D'après la formule de transfert pour l'espérance, Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum \frac{1}{k+2}P(Y=k)$ converge absolument.

Or, $\frac{1}{k+2}P(Y=k) = \frac{k+1}{k+2}p^2q^k = p^2q^k - \frac{p^2q^k}{k+2}$.

En utilisant la formule trouvée à la question précédente, on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2}P(Y=k) = p^2 \sum_{k=0}^{\infty} q^k - \frac{p^2}{q^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k+2}}{k+2} = p^2\frac{1}{1-q} - \frac{p^2}{q^2}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} - q\Big)$$

D'où : $E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2}P(Y=k) = p + \frac{p^2}{q^2}\ln(p) + \frac{p^2}{q} = \frac{p}{q} + \frac{p^2}{q^2}\ln(p)$.

5. On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(Y=k) = pq^k$. Par hypothèse, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $E(Z \mid Y=n) = \frac{n}{2}$.

On applique alors la formule de l'espérance totale avec le système complet d'événements de probabilités non nulles $([Y=n])_{n\in\mathbb{N}}$.

Ainsi, Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum_n E(Z \mid Y=n)P(Y=n)$ est absolument convergente.

Or, $\sum_{n=0}^{\infty} E(Z \mid Y=n)P(Y=n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2}P(Y=n) = \frac{E(Y)}{2} = \frac{q}{2p}$.

Ainsi, Z admet une espérance qui vaut $E(Z) = \frac{q}{2p}$.