DM 2 - sujet A

THÈME : VECTEURS PROPRES, VALEURS PROPRES

Le sujet est composé de deux exercices indépendants.

Exercice : étude du commutant

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres.

1. Montrer que la famille $\left(I_n, A, \ldots, A^{n-1}\right)$ est libre.

2. On note $\mathscr{C} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$. Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension supérieure à n.

3. Montrer l'existence d'une matrice P de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et d'une matrice Δ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale, telles que

$$A = P\Delta P^{-1}.$$

4. Soit $M \in \mathscr{C}$. Montrer que tout vecteur colonne propre de A est un vecteur colonne propre de M. En déduire que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.

5. Justifier que $\mathscr{C}$ est de dimension inférieure à n.

6. Montrer que $\left(I_n, A, \ldots, A^{n-1}\right)$ est une base de $\mathscr{C}$.

7. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\mathscr{R} = \left\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^2 = A\right\}$.

- **a)** Montrer que $\mathscr{R} \subset \mathrm{Vect}(I, A)$.
- **b)** Déterminer toutes les matrices de $\mathscr{R}$.

Exercice : exemple en dimension infinie

8. *Préliminaire*
Soit a une fonction continue sur un intervalle I dont A est une primitive. Justifier que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est solution de $f' = af$ si et seulement si, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, $f(x) = C\exp\left(A(x)\right)$.
Indication. On pourra raisonner par double implication et considérer h définie par $h(x) = f(x)\exp\left(-A(x)\right)$.

Soient $E = \mathbb{R}[x]$ et l'application φ définie sur E par la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(P)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 1, \\ P(1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

9. Vérifier que $\varphi(P) \in E$ pour tout $P \in E$.

10. Montrer que φ est un automorphisme de E.
Pour rappel, un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

11. Exprimer $\varphi^{-1}(P)$ à l'aide de P et P′.

12. À l'aide du préliminaire, déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ.

DM 2 - sujet *

THÈME : VECTEURS PROPRES, VALEURS PROPRES

Le sujet est composé de deux exercices indépendants.

Exercice 1 : décomposition avec des projecteurs

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ sur $\mathbb{R}$. Soit φ un endomorphisme de E pour lequel il existe un entier $m \geqslant 2$, des endomorphismes non nuls $p_1, \ldots, p_m$ de E et m réels distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, tels que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on ait

$$\varphi^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i.$$

Dans la suite, on définit les polynômes Q et L_k (pour $k \in [\![1; m]\!]$) par

$$\mathrm{Q}(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - \lambda_i), \quad \mathrm{L}_k(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} \frac{x - \lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i}.$$

1. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$. Exprimer $\mathrm{P}(\varphi)$ en fonction des $\mathrm{P}(\lambda_i)$ et des p_i.

2. Calculer $\mathrm{Q}(\varphi)$. Qu'en déduit-on quant aux valeurs propres de φ ?

3. Calculer $\mathrm{L}_k(\varphi)$. En déduire que

$$\mathrm{Im}\, p_k \subset \mathrm{E}_{\lambda_k}(\varphi) := \mathrm{Ker}\left(\varphi - \lambda_k \,\mathrm{id}_\mathrm{E}\right),$$

et donner le spectre de φ.

4. Montrer que

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi)} \mathrm{E}_\lambda(\varphi) = \mathrm{E}.$$

Autrement dit, il existe une base de E *formée uniquement de vecteurs propres. On dit que* φ *est diagonalisable.*

5. Vérifier que, pour tout couple $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$, on a

$$p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j, \\ p_i & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

6. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ engendré par la famille $\left(p_1, \ldots, p_m\right)$. Déterminer la dimension de F.

Exercice 2 : exemple en dimension infinie

7. *Préliminaire*

Soit a une fonction continue sur un intervalle I dont A est une primitive. Justifier que la fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est solution de $f' = af$ si et seulement si, il existe une constante $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) = \mathrm{C}\exp\left(\mathrm{A}(x)\right)$.

Soient $\mathrm{E} = \mathbb{R}[x]$ et l'application φ définie sur E par la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(\mathrm{P})(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} \displaystyle\int_1^x \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 1, \\ \mathrm{P}(1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

8. Vérifier que $\varphi(\mathrm{P}) \in \mathrm{E}$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$.

9. Montrer que φ est un automorphisme de E.

10. Exprimer $\varphi^{-1}(\mathrm{P})$ à l'aide de P et P'.

11. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ. Faire de même pour φ^{-1}.

DM 2 - éléments de solution

SUJET A

1. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^i = 0_n$. Considérons le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i x^i.$$

Ainsi P est un polynôme annulateur de A. Il admet donc au moins n racines données par les valeurs propres de A. Or $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$. Nécessairement $P = 0_{\mathbb{R}[x]}$, on en déduit que pour tout indice i, $\lambda_i = 0$. La famille est libre. On en déduit que

$$\dim \mathrm{Vect}\left(I_n, \dots, A^{n-1}\right) = n.$$

2. Soient M_1, $M_2 \in \mathscr{C}$ et λ, $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(\lambda M_1 + \mu M_2) A &= \lambda M_1 A + \mu M_2 A \\ &= \lambda A M_1 + \mu A M_2 \\ &= A(\lambda M_1 + \mu M_2).\end{aligned}$$

Ainsi $\lambda M_1 + \mu M_2 \in \mathscr{C}$.
De plus $0_n \in \mathscr{C}$.
En conclusion, $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
De plus, les puissances de A commutent avec A et

$$\mathrm{Vect}\left(I_n, \dots, A^{n-1}\right) \subset \mathscr{C}$$

D'où $\qquad n \leqslant \dim \mathscr{C}.$

3. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Comme A admet n valeurs propres distinctes (notées dans la suite $\lambda_1, \dots, \lambda_n$), φ aussi et il existe une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ notée $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \varphi(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i.$$

D'après le cours, la famille $\mathscr{B}$ est libre car chaque vecteur propre est associé à une valeur propre distincte. Comme il y a autant de vecteurs ans la famille que la dimension de $\mathbb{R}^n$, on en déduit que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
Ensuite, par la formule de changement de base

$$\begin{aligned}A &= \mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(\varphi) \\ &= P_{\mathrm{can},\mathscr{B}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) \left(P_{\mathrm{can},\mathscr{B}}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

On conclut en posant

$$P = P_{\mathrm{can},\mathscr{B}} \quad \text{et} \quad \Delta = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$$

avec Δ qui est bien diagonale.

4. Notons que chaque sous-espace propre de A est de dimension 1 car

$$n = \sum_{i=1}^{n} 1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim E_{\lambda_i}(A) \leqslant \dim \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = n.$$

De plus, pour X un vecteur propre de A associé à $\lambda \in \mathbb{R}$, la relation

$$AX = \lambda X \quad \text{et} \quad X \neq 0_{n,1}.$$

implique pour $M \in \mathscr{C}$

$$\begin{aligned}AMX &= MAX \\ &= M(\lambda X) = \lambda MX.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$MX \in E_\lambda(A).$$

Or on a vu que $E_\lambda(A)$ est de dimension 1, ce sous-espace est donc engendré par la matrice colonne non nulle X

$$E_\lambda(A) = \mathrm{Vect}(X)$$

et MX est colinéaire à X. Autrement dit, X est vecteur propre pour M.
Reprenons l'endomorphisme φ de la question précédente et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, une base de vecteurs propres. Notons ψ l'endomorphisme canoniquement associé de à M. D'après le début de question pour tout indice i, il existe $\mu_i \in \mathbb{R}$ tel que

$$\psi(\varepsilon_i) = \mu_i \varepsilon_i.$$

On conclut de nouveau par la formule de changement de base.

5. Considérons l'application

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C} & \to & \mathscr{D}_n \\ M & \mapsto & P^{-1}MP. \end{array} \right.$$

où $\mathscr{D}_n$ désigne l'espace vectoriel des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, on vérifie que Φ est une application linéaire injective. Nécessairement,

$$\dim \varepsilon \leqslant n.$$

6. En regroupant les résultats des questions 2 et 5 :

$$\dim \mathscr{C} = n.$$

Et par la question 1, la famille $\left(I_n, A, \dots, A^{n-1}\right)$ composée d'éléments de$\mathscr{C}$ est libre avec autant d'éléments que la dimension de $\mathscr{C}$. C'est donc une base de $\mathscr{C}$.

7.a) Comme $\mathscr{R} \subset \mathscr{C}$ avec $n = 2$, il vient

$$\mathscr{C} = \mathrm{Vect}(I, A)$$

Le résultat s'en déduit.

7.b) Soit $M \in \mathscr{R}$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$M = aI_2 + bA.$$

Or $$\mathrm{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$

et
$$\mathrm{M}^2 = (a\mathrm{I}_2 + b\mathrm{A})^2 = a^2\mathrm{I} + b^2\mathrm{A}^2 + 2ab\mathrm{A}.$$

En regardant le coefficient en position $(1,1)$ dans l'égalité $\mathrm{M}^2 = \mathrm{A}$, il vient
$$a^2 + b^2 + 2ab = 1$$

soit $(a+b)^2 = 1$, puis $a + b = \varepsilon_1$ avec $\varepsilon_1 \in \{-1;1\}$.
De même, le coefficient en position $(2,2)$ impose

$$a^2 + 16b^2 + 8ab = 4,$$

D'où $(4b+a)^2 = 2^2$. Ainsi $a+4b = 2\varepsilon_2$ avec $\varepsilon_2 \in \{-1;1\}$. D'où

$$\varepsilon_1 + 3b = 4b + a = 2\varepsilon_2, \qquad b = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{3}$$

et $$a = \varepsilon_1 - b = \frac{4\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2}{3}.$$

On trouve 4 couples possibles pour (a,b) suivant les valeurs $\varepsilon_1 = \pm 1$ et $\varepsilon_2 = \pm 1$,

$$(2/3, 1/3), \quad (-2/3, -1/3), \quad (2,-1), \quad (-2,1).$$

Ce qui donne les matrices

$$\pm \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \pm \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

On vérifie que ces matrices conviennent.

8. Raisonnons par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$ Si f est définie sur I par $f(x) = \mathrm{C}e^{\mathrm{A}(x)}$ alors f est dérivable par composition et pour tout $x \in \mathrm{I}$

$$f'(x) = \mathrm{C}\mathrm{A}'(x)e^{\mathrm{A}(x)} = a(x)f(x).$$

on a bien $f' = af$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si f est solution de $f' = af$. Posons h définie sur I par

$$h(x) = f(x)e^{-\mathrm{A}(x)}.$$

La fonction h est dérivable sur I (f l'est) et pour $x \in \mathrm{I}$

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)e^{-\mathrm{A}(x)} - f(x)\mathrm{A}'(x)e^{-\mathrm{A}(x)} \\ &= \big(f'(x) - f(x)a(x)\big)e^{-\mathrm{A}(x)} \\ h'(x) &= 0. \end{aligned}$$

Comme I est un intervalle, h est constante. Soit $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ la constante et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathrm{I}, \qquad \mathrm{C} &= h(x) = f(x)e^{-\mathrm{A}(x)} \\ f(x) &= \mathrm{C}e^{\mathrm{A}(x)}. \end{aligned}$$

Ce qui conclut.

9. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$. Soit Q la primitive de P qui s'annule en 1. Notons que $\mathrm{Q}' = \mathrm{P}$ et il existe $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}(x) &= \underbrace{\mathrm{Q}(1)}_{=0} + \mathrm{Q}'(1)(x-1) + (x-1)^2\mathrm{R}(x) \\ &= \mathrm{P}(1)(x-1) + (x-1)^2\mathrm{R}(x). \end{aligned}$$

Ainsi pour $x \neq 1$

$$\begin{aligned} \varphi(\mathrm{P})(x) &= \frac{1}{(x-1)}\big(\mathrm{Q}(x) - \mathrm{Q}(1)\big) \\ &= \mathrm{P}(1) + (x-1)\mathrm{R}(x). \end{aligned}$$

Or cette dernière formule convient aussi au cas où $x = 1$.
Ainsi $\varphi(\mathrm{P})$ est le polynôme $\mathrm{P}(1) + (x-1)\mathrm{R}(x)$ et $\varphi(\mathrm{P}) \in \mathrm{E}$.
Notons que si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[x]$, *alors* $\varphi(\mathrm{P})$ *aussi car* $\deg \mathrm{R} \leqslant n-1$.

Remarque. On aurait pu partir de la formule de Taylor dans sa version polynomiale

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\mathrm{Q}^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\mathrm{P}^{(k-1)}(1)}{k!}(x-1)^k. \end{aligned}$$

10. On vérifie que φ est linéaire : soient $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[x]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
→ Pour $x \neq 1$, par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} \varphi(\mathrm{P}+\lambda\mathrm{Q})(x) &= \frac{1}{x-1}\int_1^x (\mathrm{P}+\lambda\mathrm{Q})(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x-1}\int_1^x \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x-1}\int_1^x \mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \varphi(\mathrm{P})(x) + \lambda\varphi(\mathrm{Q})(x). \end{aligned}$$

→ Pour $x = 1$,

$$\begin{aligned} \varphi(\mathrm{P}+\lambda\mathrm{Q})(1) &= (\mathrm{P}+\lambda\mathrm{Q})(1) \\ &= \mathrm{P}(1) + \lambda\mathrm{Q}(1) \\ &= \varphi(\mathrm{P})(1) + \lambda\varphi(\mathrm{Q})(1). \end{aligned}$$

Finalement :

$$\varphi(\mathrm{P}+\lambda\mathrm{Q}) = \varphi(\mathrm{P}) + \lambda\varphi(\mathrm{Q}).$$

Justifions maintenant la bijectivité.
→ *Injectivité.*
Soit $\mathrm{P} \in \ker(\varphi)$. On a directement $\mathrm{P}(1) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \qquad \frac{1}{x-1}\int_1^x \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

D'où
$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \qquad \int_1^x \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Par dérivation, il vient $\mathrm{P}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Finalement $\mathrm{P} = 0_{\mathrm{E}}$, φ est injective.

→ *Surjectivité.*
Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[x]$. Fixons un tel entier n. En reprenant la question 1, on montre que $\mathbb{R}_n[x]$ est stable par φ et on peut définir la restriction, noté φ_n de φ à $\mathbb{R}_n[x]$ par

$$\varphi_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \to & \mathbb{R}_n[x] \\ \mathrm{P} & \mapsto & \varphi(\mathrm{P}) \end{array} \right. .$$

L'endomorphisme de dimension finie φ_n reste injectif, il est donc surjectif. Il existe donc un antécédent à P par φ_n.
C'est aussi un antécédent de P par φ.
On en déduit la surjectivité de φ.

— Concluons : φ est une endomorphisme bijectif.

11. Soit P ∈ E, soit Q l'unique antécédent de P par φ.

$$\varphi(\mathrm{Q}) = \mathrm{P} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Q} = \varphi^{-1}(\mathrm{P}).$$

Or, en posant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x-1$, on a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$f(x)\varphi(\mathrm{Q})(x) = \int_1^x \mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par dérivation sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f'(x)\varphi(\mathrm{Q})(x) + f(x)\varphi(\mathrm{Q})'(x) = \mathrm{Q}(x)$$

c'est-à-dire

$$1 \cdot \mathrm{P}(x) + (1-x)\mathrm{P}'(x) = \mathrm{Q}(x).$$

Comme les fonctions considérés sont continues en 1, l'égalité s'étend à $x = 1$.
En résumé, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\varphi^{-1}(\mathrm{P})(x) = \mathrm{Q}(x) = \mathrm{P}(x) + (1-x)\mathrm{P}'(x).$$

12. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et supposons que P ∈ E est un vecteur propre de φ pour la valeur propre λ, on a

$$\varphi(\mathrm{P}) = \lambda \mathrm{P}.$$

ou encore

$$\mathrm{P} = \lambda\varphi^{-1}(\mathrm{P}) = \lambda\left(\mathrm{P} + (1-x)\mathrm{P}'\right),$$

il vient $\mathrm{P}(1-\lambda) = \lambda(1-x)\mathrm{P}'$. En particulier, pour $x > 1$

$$\mathrm{P}'(x) = \frac{(1-\lambda)}{\lambda(1-x)}\mathrm{P}(x).$$

D'après le préliminaire avec $a(x) = (1-\lambda)/(\lambda(1-x))$ qui admet pour primitive sur l'intervalle $]1, +\infty[$

$$\mathrm{A} : x \mapsto \frac{1-\lambda}{\lambda}\ln(1-x) = \ln\left((1-x)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\right).$$

On en déduit qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 1$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(x) &= \mathrm{C}e^{\mathrm{A}(x)} \\ &= \mathrm{C} \cdot (1-x)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = \mathrm{C}(1-x)^{\frac{1}{\lambda}-1}. \end{aligned}$$

Or P ∈ E, on a nécessairement

$$\frac{1}{\lambda} - 1 \in [\![0; n]\!]$$

c'est à dire

$$\lambda = \frac{1}{k+1} \quad \text{où} \quad k \in [\![0; n]\!]$$

et pour $x > 1$

$$\mathrm{P}(x) = c(1-x)^k$$

(relation qui s'étend à $x \in \mathbb{R}$ car P est polynomial). En résumé, les valeurs propres sont

$$1, \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots, \frac{1}{n+1}$$

avec respectivement les espaces propres

$$\mathrm{Vect}(1), \mathrm{Vect}(1-x), \mathrm{Vect}\left((1-x)^2\right), \ldots, \mathrm{Vect}\left((1-x)^n\right)$$

qui sont tous de dimension 1.

SUJET *

1. Soit $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}[x]$. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k &= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{m} {\lambda_i}^k p_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k {\lambda_i}^k\right) p_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \mathrm{P}(\lambda_i)\, p_i. \end{aligned}$$

2. Pour tout $i \in [\![1; m]\!]$, $\mathrm{Q}(\lambda_i) = 0$, donc

$$\mathrm{Q}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Q}(\lambda_i)\, p_i = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}.$$

Le polynôme Q est annulateur de φ. On sait alors que toute valeur propre de φ est racine de Q.

3. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_k(\varphi) &= \sum_{i=1}^{m} \mathrm{L}_k(\lambda_i)\, p_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \delta_{ik} p_i = p_k. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\mathrm{Q}(x) = c_k\left(x - \lambda_k\right)\mathrm{L}_k(x)$$

$$\text{où} \quad c_k = \frac{1}{\prod_{k \neq i}(\lambda_k - \lambda_i)}.$$

Ainsi

$$\left(\varphi - \lambda_k \mathrm{id}_\mathrm{E}\right) \circ \mathrm{L}_k(\varphi) = \frac{1}{c_k}\mathrm{Q}(\varphi) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}.$$

D'où

$$\left(\varphi - \lambda\, \mathrm{id}_\mathrm{E}\right) \circ p_k = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}.$$

À partir de cette égalité, on montre que

$$\mathrm{Im}\, p_k \subset \mathrm{Ker}\left(\varphi - \lambda_k \mathrm{id}_\mathrm{E}\right).$$

Comme p_k n'est pas l'application nulle, $\mathrm{Im}\, p_k$ n'est pas réduit à l'espace nul $\{0_\mathrm{E}\}$. D'où $\mathrm{E}_{\lambda_k}(\varphi)$ n'est pas réduit à $\{0_\mathrm{E}\}$ et λ_k est valeur propre de φ. En résumé

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\} \subset \mathrm{Sp}(\varphi).$$

On a l'inclusion réciproque (et donc l'égalité) à l'aide de la question 2.

4. En reprenant la relation sur φ pour $k = 0$, il vient

$$\mathrm{id}_\mathrm{E} = \sum_{i=1}^{m} p_i.$$

Ainsi pour tout $x \in \mathrm{E}$

$$x = \underbrace{p_1(x)}_{\in \mathrm{Im}\, p_1} + \underbrace{p_2(x)}_{\in \mathrm{Im}\, p_2} + \ldots + \underbrace{p_m(x)}_{\in \mathrm{Im}\, p_m}.$$

On a donc

$$\mathrm{E} \subset \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Im}\, p_i.$$

Puis, avec la question précédente

$$\mathrm{E} \subset \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}_{\lambda_k}(\varphi).$$

Sachant que les $\mathrm{E}_{\lambda_k}(\varphi)$ sont des sous-espaces de E, on a même égalité.
De plus, on sait d'après le cours que la somme des sous-espaces propres est toujours directe. On en déduit le résultat.

5. Soient $i, j \in [\![1;m]\!]$. Supposons $i \neq j$. On a

$$p_i \circ p_j = \mathrm{L}_i(\varphi) \circ \mathrm{L}_j(\varphi) = \left(\mathrm{L}_i\mathrm{L}_j\right)(\varphi).$$

Or, on constate que Q divise $\mathrm{L}_i\mathrm{L}_j$. Comme Q est annulateur de φ, $\mathrm{L}_i\mathrm{L}_j$ l'est aussi et

$$p_i \circ p_j = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}.$$

Traitons maintenant le cas où $i = j$. On a maintenant

$$p_i \circ p_i = \left(\mathrm{L}_i{}^2\right)(\varphi) = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{L}_i{}^2(\lambda_k)p_k = p_k.$$

Ce qui conclut.

6. À l'aide de la relation précédente, on montre que la famille $(p_1, \ldots, p_m)$ est libre. En effet, s'il existe des réels $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{m} a_i p_i = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ en composant par p_j, il vient $a_j p_j = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ puis $a_j = 0$ car $p_j \neq 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$. Finalement la famille est libre, c'est une base de F qui est donc de dimension m.