1

ANALYSE

Exercice 1.01.

1. Déterminer les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{x+1}}$ est convergente.

On pose alors $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{x+1}}$

2. Montrer que $f(1) = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

3. Montrer que f est décroissante sur son domaine de définition.

4. a) Montrer que pour $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+t^{x+1}}$ est convergente. On note alors $g(x)$ sa valeur.

b) Montrer, à l'aide d'un changement de variable simple que

$$g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}dt}{t^x(1+t^x)} = \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \frac{du}{u(1+u)}$$

c) Vérifier que pour tout $u > 0$, $\dfrac{1}{u(1+u)} = \dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{1+u}$; en déduire la valeur de $g(x)$.

5. a) Montrer que pour $x > 0$, on a : $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\ln 2}{x}$.

b) Montrer que pour $x > 0$, on a : $0 \leqslant \dfrac{\ln 2}{x} - f(x) \leqslant \dfrac{1}{2x+1}$.

c) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers l'infini et un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de 0.

Solution

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$. Le seul problème est en la borne infinie.

$\rightarrow$ Si $x>0$, $f(t) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{t^{x+1}}$ et $x+1>1$, la règle de Riemann assure la convergence.

$\rightarrow$ Si $x=0$, $f(t)=\dfrac{1}{1+2t} \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{2t}$ et la règle de Riemann assure cette fois la divergence.

$\rightarrow$ Si $x<0$, $t+t^{x+1} \underset{(+\infty)}{\sim} t$ et $f(t) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{t}$, ce qui permet de conclure à la divergence (on peut aussi dire que le troisième cas est pire que le deuxième)

Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}_+^*$.

2. $f(1)=\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^2}=\int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dt=\frac{2}{3}\int_1^{+\infty} \frac{1}{(\frac{2t+1}{\sqrt{3}})^2+1}\,dt$

Soit : $f(1)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\big[\arctan u\big]_{\sqrt{3}}^{\to+\infty}=\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

3. Si $0<x\leqslant x'$, $\forall t\geqslant 1, t^{x+1}\leqslant t^{x'+1}$, $\dfrac{1}{1+t+t^{x'+1}}\leqslant\dfrac{1}{1+t+t^{x+1}}$ et par conservation des inégalités par intégration (les bornes sont dans l'ordre croissant et les intégrales convergent) : $f(x')\leqslant f(x)$.

La fonction f est décroissante sur son domaine de définition.

4. a) Voir 1., la suppression du terme 1 étant sans incidence sur la convergence.

b) $g(x)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t(1+t^x)}=\int_1^{+\infty}\frac{t^{x-1}dt}{t^x(1+t^x)}$

Et, par le changement de variable préparé $u=t^x$ de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone :

$$g(x)=\frac{1}{x}\int_1^{+\infty}\frac{du}{u(1+u)}$$

c) $g(x)=\dfrac{1}{x}\big[\ln u-\ln(1+u)\big]_1^{\to+\infty}=\dfrac{1}{x}\big[\ln\big(\dfrac{u}{1+u}\big)\big]_1^{\to+\infty}$

$$g(x)=\frac{1}{x}\ln 2$$

5. a) Clairement $0\leqslant\dfrac{1}{1+t+t^{x+1}}\leqslant\dfrac{1}{t+t^{x+1}}$ et les convergences étant acquises avec des bornes dans l'ordre croissant : $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$, *i.e.* $0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{x}\ln 2$.

b) $\dfrac{\ln 2}{x}-f(x)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+t+t^{x+1})(t+t^{x+1})}\,dt\leqslant\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{2x+2}}=\frac{1}{2x+1}$

c) $\star$ Le résultat a) donne $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

$\star$ Le résultat b) donne $0 \leqslant \frac{1}{x}\ln 2 - f(x) \leqslant 1$, ce qui est plus fort que ce qui est demandé et donne donc la conclusion :

$$f(x) \underset{(0^+)}{\sim} \frac{1}{x}\ln 2$$

Exercice 1.02.

1. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

a) Montrer que u_n est bien défini.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente. Déterminer sa limite notée ℓ.

c) À l'aide d'une intégration par parties, donner un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers l'infini. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

d) Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que au voisinage de l'infini, on a :

$$u_n = \ell + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

2. On pose maintenant $v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

a) Montrer que v_n est bien défini pour tout entier naturel n.

b) Déterminer la limite éventuelle de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$?

__Solution__

1. a) La suite (u_n) est bien définie puisque $x \mapsto \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x}}$ est continue sur $[0,1]$.

b) Elle est décroissante puisque $0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$ sur $[0,1]$ et positive, donc convergente. Sa limite est nulle car :

$$0 \leqslant u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\,dx \leqslant \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$$

c) Les fonctions $x \mapsto x^{n+1}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ étant de classe C^1 sur $[0,1]$, il vient en intégrant par parties :

$$u_n = \Big[\frac{x^{n+1}}{n+1}\times\frac{1}{\sqrt{1+x}}\Big]_0^1 + \frac{1}{2(n+1)}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{3/2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} + v_n$$

avec $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{2(n+1)}\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}dx = \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)} = o\big(\dfrac{1}{2(n+1)}\big)$.

Ainsi : $u_n \underset{(\infty)}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \underset{(\infty)}{\sim} \dfrac{1}{n\sqrt{2}}$

Enfin, la règle de Riemann montre que la série $\sum u_n$ diverge.

2. Une seconde intégration par parties (dans le même sens !) donne :

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{3/2}}\,dx = \Big[\frac{x^{n+2}}{n+2}\times\frac{1}{(1+x)^{3/2}}\Big]_0^1 + \frac{3}{2(n+2)}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^{5/2}}\,dx$$

Donc : $v_n = \dfrac{1}{2(n+1)}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{3/2}}\,dx = \dfrac{1}{2^{5/2}(n+1)(n+2)} + o\big(\dfrac{1}{n^2}\big)$

Puis : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}(n+1)} + \dfrac{1}{2^{5/2}(n+1)(n+2)} + o\big(\dfrac{1}{n^2}\big)$

$u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{2}}\big(1+\dfrac{1}{n}\big)^{-1} + \dfrac{1}{2^{5/2}n^2} + o\big(\dfrac{1}{n^2}\big) = \dfrac{1}{n\sqrt{2}} + \big(\dfrac{1}{2^{5/2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\big)\dfrac{1}{n^2} + o\big(\dfrac{1}{n^2}\big)$

3. a) La fonction $x \mapsto \dfrac{x^n}{\sqrt{1-x}}$ est continue sur $[0,1[$, positive et équivalente à $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ dont l'intégrale converge sur $[0,1[$, donc l'intégrale définissant v_n converge.

b) La suite (v_n) tend vers 0. En effet pour tout choix de a dans $]0,1[$:

$$0 \leqslant v_n \leqslant \int_0^a \frac{x^n}{\sqrt{1-a}}\,dx + \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx \leqslant \frac{1}{(n+1)\sqrt{1-a}} + 2\sqrt{1-a}$$

On se donne alors $\varepsilon > 0$. On choisit a de sorte que $2\sqrt{1-a} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, puis n assez grand pour que $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{1-a}} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ et alors $0 \leqslant v_n \leqslant \varepsilon$. D'où le résultat.

c) En revanche $v_n \geq \displaystyle\int_0^1 x^n\,dx = \dfrac{1}{n+1}$ et la divergence de la série s'en déduit.

Exercice 1.03.

1. Soit x un réel. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t}\,dt$ est convergente si et seulement si x est strictement positif. On pose alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t}\,dt$$

L'exercice a pour but l'étude de la fonction F.

2. Etudier le sens de variation de F sur $]0,+\infty[$.

3. a) Démontrer que pour tout $x>0$, on a $F(x)\geq \frac{1}{\mathrm{e}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\frac{1}{1+t}\,dt$. En déduire la limite de F en 0.

b) Démontrer que pour tout réel $x>0$, on a : $F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}\,du$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

4. Prouver que pour tous x_0 et x réels strictement positifs, on a :

$$\big|F(x)-F(x_0)\big|\leqslant\frac{|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|}{\sqrt{x}\sqrt{x_0}}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\big(\sqrt{x}F(x)-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\big)=-\frac{1}{2}$.

En déduire que $F(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x}+o\big(\frac{1}{x}\big)$ au voisinage de $+\infty$.

Solution

1. Pour tout réel x, la fonction $t\mapsto\frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\to$ Pour $x\leqslant 0, \forall\, t\in[0,+\infty[, 0\leqslant\frac{1}{1+t}\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t}$, par le critère de comparaison, on déduit que $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t}dt$ est divergente

$\to$ Pour $x>0$, on a $\forall t\in[1,+\infty[, 0\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t}\leqslant\mathrm{e}^{-xt}$. Or $\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}dt$ est convergente, donc par le critère de comparaison, on déduit que $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t}dt$ est convergente, puis que $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t}dt$ converge.

On conclut que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t}dt$ est convergente si et seulement si x est strictement positif.

2. On a : $0<x<y\implies\forall\, t\in[0,+\infty[, \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t}\geq\frac{\mathrm{e}^{-yt^2}}{1+t}$ et les intégrales étant convergentes et les bornes dans l'ordre croissant, il vient par conservatioin des inégalités $F(x)\geq F(y)$.
On déduit que F est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, (en fait même strictement décroissante).

3. a) Pour tout $x>0, F(x)\geq\int_0^{1/\sqrt{x}}\frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t}\,dt$, or

$$0 < t \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \implies xt^2 \leqslant 1 \implies -xt^2 \geq -1.$$

D'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t}dt \geq \mathrm{e}^{-1}\int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{1}{1+t}dt = \mathrm{e}^{-1}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{x}})$.

Par conséquent $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) = +\infty$.

b) Pour tout réel $x > 0$ et tout réel A positif, on effectue le changement de variable affine $u = \sqrt{x}t$ dans $\displaystyle\int_0^A \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t}dt$. On obtient : $\displaystyle\int_0^A \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t}dt = \int_0^{\sqrt{x}A} \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}du$, puis par passage à la limite :

(ce qui prouve au passage la convergence de l'intégrale que l'on va écrire ! !) :

$$\forall\, x > 0, F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}du$$

On déduit que $\displaystyle\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$, d'où

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.$$

4. Pour tout x_0 et x réels strictement positifs, on a :

$$\begin{aligned}|F(x) - F(x_0)| &= \Big|\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\big(\frac{1}{\sqrt{x}+u} - \frac{1}{\sqrt{x_0}+u}\big)\,du\Big|\\ &= \Big|\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\times\frac{\sqrt{x_0}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+u)(\sqrt{x_0}+u)}\,du\Big|\end{aligned}$$

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant \frac{|\sqrt{x_0}-\sqrt{x}|}{\sqrt{x}\sqrt{x_0}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,du = \frac{|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|}{\sqrt{x}\sqrt{x_0}}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

On en déduit que pour tout x_0 de $\mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\lim_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$, ce qui prouve que F est continue en tout point de $\mathbb{R}_+^*$.

5. On utilise les formes précédentes :

$$\begin{aligned}\sqrt{x}\big(\sqrt{x}F(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\big) &= \sqrt{x}\Big(\sqrt{x}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}du - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}du\Big)\\ &= -\sqrt{x}\int_0^{+\infty} \frac{u\mathrm{e}^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}\,du\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{u^2\mathrm{e}^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}\,du - \int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2}\,du\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{u^2\mathrm{e}^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}\,du - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Or $\displaystyle 0 \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{u^2\mathrm{e}^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}du \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} u^2e^{-u^2}du \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x}F(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, *i.e.* $F(x) \underset{(+\infty)}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} + o(x^{-1})$.

Exercice 1.04.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = a \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}}\, u_n^2$$

1. On suppose que la suite u vérifie : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \sqrt{n}$. Montrer que la suite u est croissante et divergente.

2. On suppose que la suite u vérifie : $\exists\, k \in \mathbb{N}^*, u_k < \sqrt{k}$.

a) Montrer que $\forall\, n \geq k, u_n < \sqrt{n}$.

b) Montrer que la suite u est décroissante à partir du rang k.

c) Montrer que la suite u converge de limite nulle.

3. En déduire que la suite u converge si et seulement si il existe un rang k tel que $u_k < 1$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{1}{2^{n-1}} \ln(u_n)$.

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est ainsi bien définie et que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, v_n - v_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \ln n$$

b) Montrer que la série de terme général $s_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln n$ est convergente.

On note $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \ln n$.

c) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $v_1 = v_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} s_k$. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

d) Montrer que la suite u converge si et seulement si $a < \mathrm{e}^S$.

Solution

1. Si on a toujours $u_n \geqslant \sqrt{n}$, *a fortiori* on a $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{n}} \geqslant 1$: la suite est bien croissante et la minoration donne trivialement la divergence.

2. a) Si pour un certain rang k, on a $u_k < \sqrt{k}$, alors $u_{k+1} = \frac{u_k^2}{\sqrt{k}} < \sqrt{k} < \sqrt{k+1}$. La propriété est donc héréditaire et par le principe de récurrence :

$$\forall\, n \geqslant k, u_n < \sqrt{n}$$

b) A partir du rang k, on a donc : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} < 1$: la suite u est décroissante à partir du rang k.

c) Décroissante à partir du rang k et minorée banalement par 0, la suite u est convergente.

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n^2}{\sqrt{n}} = 0$ et ainsi u converge de limite nulle.

3. $\star$ Si la suite u converge, elle converge vers 0, et il existe bien un rang k tel que $u_k < 1$.

$\star$ S'il existe un rang k tel que $u_k < 1$, on a sûrement $u_k < \sqrt{k}$ et le cheminement de la question 2 montre que la suite u converge vers 0.

4. a) u_n est toujours strictement positif, donc la définition de v_n est claire. De plus :

$$\begin{aligned} v_n - v_{n+1} &= \frac{1}{2^{n-1}} \ln(u_n) - \frac{1}{2^n} \ln(u_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \ln(u_n) - \frac{1}{2^n} \ln(u_n^2) + \frac{1}{2^n} \ln(\sqrt{n}) \\ &= \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2} \ln(n) \end{aligned}$$

b) On peut écrire :

$$\frac{1}{2^{n+1}} \ln n = \frac{1}{(1.9)^{n+1}} \times (0.95)^{n+1} \ln n \underset{(n\to\infty)}{=} o\Big(\frac{1}{(1.9)^{n+1}}\Big)$$

[$(3/2)^n \times \dfrac{1}{2^{n+1}} \ln n \to 0$ suffisait largement pour conclure !]

c) Notons $s_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} \ln n$ (s_n est positif ou nul et strictement positif pour $n \geqslant 2$). Par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n-1} s_k = \sum_{k=1}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) = v_1 - v_n$$

Ainsi : $v_n = v_1 - \sum\limits_{k=1}^{n-1} s_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v_1 - S = \ln(u_1) - S$

d) $\star$ Supposons $a < \mathrm{e}^S$. On a alors $\ln(u_1) = \ln a < S$ et $\lim v < 0$.

A partir d'un certain rang k on a $v_k < 0$, donc $u_k < 1$ et la suite u converge (voir la question 3.).

$\star$ Si la suite u converge, il existe un rang n tel que $u_n < 1$, donc $v_n < 0$ et $v_1 = v_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} s_k < S$, soit $\ln a < S$ et $a < \mathrm{e}^S$.

Exercice 1.05.

1. a) Justifier que $\arctan(u) \sim u$ au voisinage de 0.

b) Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x\,t)}{t\,(t^2+1)}\,dt$ est une intégrale convergente.

On note alors sa valeur $F(x)$.

2. On admet que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et que

$$\forall\, x \in D, F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\arctan(x\,t)}{t\,(t^2+1)}\Big)\,dt$$

a) Pour x appartenant à une partie de D à préciser, déterminer deux réels a et b (indépendants de t, mais pouvant dépendre de x) tels que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\arctan(x\,t)}{t\,(t^2+1)}\Big) = \frac{a}{t^2+1} + \frac{b}{x^2t^2+1}$$

b) Calculer $F'(x)$ pour tout $x \in D$.

c) En déduire $F(x)$ pour tout $x \in D$.

3. Soit g la fonction $t \mapsto g(t) = \Big(\dfrac{\arctan t}{t}\Big)^2$.

Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ et calculer sa valeur.

Solution

1. a) Clair, car $\arctan(0) = 0$ et $\arctan'(0) = 1$.

b) $\dfrac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)} \underset{(t\to 0)}{\sim} x$ et $t > 0 \implies |\dfrac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}| \leqslant \dfrac{\pi}{2|t|^3}$.

la fonction à intégrer est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 et la règle de majoration donne la convergence (absolue si on ne veut pas discuter selon le signe de x) pour la borne infinie :

$$D = \mathbb{R}$$

2. a) On a : $\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}) = \dfrac{1}{t(t^2+1)} \times \dfrac{t}{1+x^2t^2} = \dfrac{1}{(t^2+1)(x^2t^2+1)}$

Pour $x \notin \{-1, 1\}$, on a alors :

$\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}) = \dfrac{a}{t^2+1} + \dfrac{b}{x^2t^2+1}$, avec :

$$a = \frac{1}{1-x^2} \text{ et } b = -\frac{x^2}{1-x^2}$$

b) D'où pour $x > 0$ et $x \neq 1$, via le changement de variable affine $x \mapsto xt = u$,

$$F'(x) = \frac{1}{1-x^2}\Big[\arctan(t) - x\,\arctan(xt)\Big]_0^{\to+\infty} = \frac{\pi}{2(1+x)}$$

encore valable en $x=1$ par continuité (admise) de F'.
Par parité de F', on a donc :

$$\forall x\in\mathbb{R}, F'(x)=\frac{\pi}{2\,(1+|x|)}$$

c) Par intégration et imparité de F, avec $F(0)=0$, il vient

$$\forall x\in\mathbb{R}_+, F(x)=\frac{\pi}{2}\ln(1+x) \text{ et } \forall x\in\mathbb{R}_-, F(x)=-\frac{\pi}{2}\ln(1-x)$$

3. a) $g\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*)$, $g(t)\underset{t\to0^+}{\longrightarrow}$ et $g(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{\pi^2}{4t^2}$ donc I converge.

b) Par intégration par parties sur un segment de $\mathbb{R}_+^*$ et passage à la limite, on obtient :
$I=\displaystyle\int_0^{+\infty}(\arctan t)^2\times\frac{1}{t^2}\,dt=\Big[-\frac{1}{t}(\arctan t)^2\Big]_{\to0}^{\to+\infty}+2\int_0^{+\infty}\frac{\arctan t}{1+t^2}\times\frac{dt}{t}=$ $2F(1)$

$$I=\pi\ln 2$$

Exercice 1.06.

On note C^0 l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ et C_b^0 le sous-espace vectoriel de C^0 formé des fonctions bornées sur $\mathbb{R}_+$.
Soit ω une fonction de C^0 à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, on pose $\Omega(x)=\displaystyle\int_0^x\omega(t)\,dt$.

1. Soit $f\in C^0$. Pour tout $x>0$, on pose $\varphi(f)(x)=\dfrac{1}{\Omega(x)}\displaystyle\int_0^x f(t)\omega(t)\,dt$.

Montrer que $\varphi(f)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle admet un prolongement par continuité en 0.
On note $T(f)$ la fonction ainsi prolongée.
Soit T l'application qui à tout $f\in C^0$ associe $T(f)$.

2. **a)** Montrer que T est un endomorphisme de C^0. Est-ce que $T(C_b^0)\subset C_b^0$?
b) Montrer que T est injectif.

3. On dit que λ est une valeur propre de T sur C^0 s'il existe une fonction $f\in C^0$ non identiquement nulle telle que pour tout $x\in\mathbb{R}_+ : T(f)(x)=\lambda f(x)$.
Soit λ une valeur propre de T et f une fonction telle que $T(f)=\lambda f$.
a) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*, (1-\lambda)f(x)\omega(x)=\lambda f'(x)\Omega(x)\quad(*)$.
b) Soit H une primitive de $\dfrac{\omega}{\Omega}$. En utilisant la fonction $\psi : x\mapsto f(x)\mathrm{e}^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}H(x)}$, résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $(*)$ précédente.
c) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de T sur C^0 et donner pour chaque valeur propre λ, la dimension de l'espace $\{f\in C^0\ /\ T(f)=\lambda f\}$.

Solution

1. a) La fonction ω étant continue strictement positive, la fonction $\varphi(f)$ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ et continue comme quotient de deux fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas.

Montrons que $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(f)(x) = f(0)$.
En effet, soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue en 0 : il existe $\delta > 0$ tel que $|x| \leqslant \delta$ entraîne $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$. Ainsi, pour $|x| \leqslant \delta$, non nul :

$$\begin{aligned}|\varphi(f)(x) - f(0)| &= \Big|\frac{1}{\Omega(x)}\int_0^x (f(t) - f(0))\omega(t)\,dt\Big| \\ &\leqslant \frac{1}{|\Omega(x)|}\Big|\int_0^x |f(t) - f(0)|\omega(t)\,dt\Big| \leq \varepsilon\end{aligned}$$

2. a) L'application T est manifestement linéaire. La question précédente montre que T est un endomorphisme de C^0.
Si la fonction f appartient à C_b^0 et si M est un majorant de $|f|$, alors :

$$x > 0 \implies |\varphi(f)(x)| \leqslant \frac{1}{|\Omega(x)|}\int_0^x |f(t)|\omega(t)\,dt \leqslant M$$

Ce résultat reste banalement vrai en 0. Ainsi C_b^0 est stable par T.

b) Soit $f \in C^0$ telle que $\varphi(f) = 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\omega(t)dt = 0$, puis en dérivant et en utilisant le fait que $\omega(x) > 0$, il vient $f(x) = 0$ pour tout x strictement positif, et aussi en 0 par continuité.

3. Au vu de l'injectivité de T, on a $\lambda \neq 0$.

La fonction Ω est non nulle et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, pour f continue, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\omega(t)\,dt$ est également de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi $T(f)$ est de classe C^1 et puisque $f = \dfrac{1}{\lambda}T(f)$, f est de classe C^1

a) L'équation $T(f) = \lambda f$ donne pour $x > 0$:

$$\lambda f(x)\int_0^x \omega(t)\,dt = \int_0^x f(t)\omega(t)\,dt$$

En dérivant, il vient, toujours pour $x > 0$:
$\lambda(f'(x)\displaystyle\int_0^x \omega(t)\,dt + f(x)\omega(x)) = f(x)\omega(x)$, soit $(1-\lambda)f(x)\omega(x) = \lambda f'(x)\Omega(x)$.

b) Comme ω est la dérivée de Ω, une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de ω/Ω est la fonction $H : x \mapsto \ln(\Omega(x))$.
On remarque que :

$$\psi'(x) = \frac{d}{dx}\big(f(x)\mathrm{e}^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}H(x)}\big) = \big(f'(x) - \frac{1-\lambda}{\lambda}f(x)H'(x)\big)\mathrm{e}^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}H(x)}$$
$$= \big(f'(x) - \frac{1-\lambda}{\lambda}f(x)\frac{\omega(x)}{\Omega(x)}\big)\mathrm{e}^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}H(x)} = 0$$

Donc, il existe une constante C telle que $\forall\, x > 0, \psi(x) = f(x)e^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}H(x)} = C$, *i.e.* :

$$f(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln(\Omega(x))} = C[\Omega(x)]^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

c) Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \Omega(x) = 0$, la quantité $[\Omega(x)]^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ n'a une limite finie en 0 que si $\dfrac{1-\lambda}{\lambda} \geqslant 0$, d'où la discussion finale :

Si $0 < \lambda \leqslant 1$, on vérifie aisément que la fonction $f : x \mapsto [\Omega(x)]^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ est dans C^0 et vérifie $T(f) = \lambda f$ et λ est valeur propre de T de sous-espace propre associé la droite engendrée par la fonction $x \mapsto [\Omega(x)]^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$. (pour $\lambda = 1$, il s'agit donc de la fonction constante égale à 1)

Sinon, la seule fonction de C^0 vérifiant $T(f) = \lambda f$ est la fonction nulle et λ n'est pas valeur propre de T.

Exercice 1.07.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positifs.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \cdots + \sqrt{a_n}}}} \qquad (*)$$

(On a donc $u_1 = \sqrt{a_1}$.)

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

2. Dans cette question, on suppose qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_n = \beta$.

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{\beta + u_n}$, puis montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

3. Dans cette question, on suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_n = \alpha^{2^n}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n = \alpha\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1}}}}$
(n radicaux superposés).
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

4. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites à termes strictement positifs, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites associées selon la formule $(*)$. Montrer que :

$$[\forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq a'_n] \implies [\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq u'_n]$$

5. a) Supposons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente et soit M tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq M$. Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq M^{2^n}$$

b) Réciproquement, on suppose la suite $\left(\dfrac{1}{2^n}\ln(a_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ majorée. Déduire des questions 3. et 4. que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Solution

1. $\star$ On a : $a_1 + \sqrt{a_2} > a_1$, donc $u_2 = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2}} > \sqrt{a_1} = u_1$.

$\star$ Supposons alors que la suite u soit croissante jusqu'à un certain rang n. On a donc, par décalage de la suite a (c'est-à-dire en utilisant l'hypothèse de récurrence sur la suite u' définie à partir de $a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$) :

$$\sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \sqrt{\cdots + \sqrt{a_{n+1}}}}} > \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \sqrt{\cdots + \sqrt{a_n}}}}$$

et, par le premier point :

$$u_{n+1} = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{a_{n+1}}}}} > \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{a_n}}}} = u_n$$

La suite u est donc strictement croissante jusqu'au rang $n+1$, et on conclut par le principe de récurrence :

$$\text{la suite } u \text{ est strictement croissante}$$

2. Dans cette question, on a $u_1 = \beta$ et en regroupant : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \sqrt{\beta + u_n}$.

Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\beta + x}$. Cette fonction est évidemment strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, cet intervalle étant stable par f.

$\ell = \sqrt{\beta + \ell}$ donne $\ell^2 - \ell - \beta = 0$ de solution positive : $\ell = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4\beta}}{2} > \sqrt{\beta}$.

Ainsi $u_1 \leqslant \ell$ et par croissance de f : $u_2 \leqslant f(\ell) = \ell$ et récurrence : $\forall\, n, u_n \leqslant \ell$.

Comme on sait déjà que la suite est croissante :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente de limite } \frac{1 + \sqrt{1 + 4\beta}}{2}$$

3. On a : $u_n = \sqrt{\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + \sqrt{\alpha^8 + \cdots + \sqrt{\alpha^{2^n}}}}}$

$$u_n = \alpha\sqrt{1 + \frac{1}{\alpha^2}\sqrt{\alpha^4 + \sqrt{\alpha^8 + \cdots + \sqrt{\alpha^{2^n}}}}}$$

$$= \alpha\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha^4}\sqrt{\alpha^8 + \cdots + \sqrt{\alpha^{2^n}}}}}$$

$$= \alpha\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{\alpha^8}\sqrt{\alpha^{16}+\cdots+\sqrt{\alpha^{2^n}}}}}}$$

et ainsi de suite, jusqu'à : $u_n = \alpha\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}}$ et donc :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \alpha\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

4. On a : $a_n \leqslant a'_n$, puis $a_{n-1}+\sqrt{a_n} \leqslant a'_{n-1}+\sqrt{a'_n}$, et un cran plus loin

$$a_{n-2}+\sqrt{a_{n-1}+\sqrt{a_n}} \leqslant a'_{n-2}+\sqrt{a'_{n-1}+\sqrt{a'_n}}$$

et ainsi, de proche en proche jusqu'à $u_n \leqslant u'_n$.

$$(\forall\, n\in\mathbb{N}^*, a_n \leqslant a'_n) \implies (\forall\, n\in\mathbb{N}^*, u_n \leqslant u'_n)$$

5. a) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, alors elle est majorée. Notons M un de ses majorants. On obtient, par le résultat précédent et pour tout n :

$$M \geqslant u_n = \sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\cdots+\sqrt{a_n}}}} \geqslant \sqrt{0+\sqrt{0+\sqrt{0+\cdots+\sqrt{a_n}}}}$$

Ainsi : $M \geqslant u_n \geqslant (a_n)^{2^{-n}}$ et donc : $a_n \leqslant M^{2^n}$.

b) Si $\forall\, n, a_n \leqslant M^{2^n}$, la suite (u_n) est majorée par la suite (u'_n) associée à la suite $(a'_n)_n = (M^{2^n})_n$.

Or, la suite $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, donc elle est majorée et a fortiori la suite u est majorée.

Ainsi u, qui est croissante, est donc convergente.
Finalement :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente} \iff \left(\frac{1}{2^n}\ln(a_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \text{ est majorée.}$$

Exercice 1.08.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $a_1,\ldots,a_n$ des réels non tous nuls. On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{k=1}^{n} x_k^2,\quad g(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \quad \text{et} \quad h(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k.$$

1. a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Déterminer son gradient en tout point.

b) Prouver que f admet un maximum sur la sphère unité S de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$S = \{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \;/\; \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1\}$$

c) Déterminer le maximum de f sur S.

d) En déduire que pour tout point $u = (u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\Big|\prod_{k=1}^{n} u_k\Big| \leqslant \left(\frac{\|u\|}{\sqrt{n}}\right)^n$$

où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$.

2. a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_i \neq 0$. On pose

$H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ h(x_1, \ldots, x_n) = 1\}$ et $B = \left\{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \|x\| \leqslant \dfrac{1}{|a_i|}\right\}$

Prouver que l'ensemble $B \cap H$ est non vide, puis qu'il est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$.

b) Justifier que la fonction g admet un minimum sur $B \cap H$. Prouver que ce minimum est aussi le minimum de g sous la contrainte $h(x_1, \ldots, x_n) = 1$.

c) Déterminer le minimum de g sur H.

Solution

1. a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^n$ comme produit de fonctions qui le sont de façon évidente. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il vient

$$\partial_i(f)(x) = 2x_i \prod_{k=1, k\neq i}^{n} x_k^2$$

On trouve donc $\nabla(f)(x) = (2x_1x_2^2 \ldots x_n^2, 2x_2x_1^2x_3^2 \ldots x_n^2, \ldots, 2x_nx_1^2 \ldots x_{n-1}^2)$.

b) Comme $S = \{x \in \mathbb{R}^n ; g(x) = 1\}$, on voit que S est fermé en utilisant la continuité de g. (On peut aussi écrire $S = \{x \in \mathbb{R}^n ; |g(x) - 1| \leqslant 0\}$ si l'on veut se ramener à un ensemble du type $\{x \in \mathbb{R}^n ; \varphi(x) \leqslant a\}$ avec φ continue sur $\mathbb{R}^n$).

Il est clair que S est borné. Comme f est continue sur le fermé borné S, elle y admet un maximum.

c) On est dans le cas d'application du théorème du cours qui nous dit qu'il faut qu'il existe un réel λ tel que $\nabla(f)(y) = \lambda\nabla(g)(y)$ en un point $y \in S$. Ce qui nous conduit aux équations : $2y_i \displaystyle\prod_{k=1, k\neq i}^{n} y_k^2 = 2\lambda y_i$, pour $i \in [\![1, n]\!]$.

En multipliant les deux membres par $y_i/2$, on obtient $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} y_k^2 = \lambda y_i^2$.

Si $\lambda = 0$, on voit que $f(y) = 0$ qui ne peut pas être un maximum.

Si $\lambda \neq 0$, on en déduit que $y_i^2 = y_j^2$, puis que $y_i^2 = 1/n$ puisque $y \in S$.

On a donc nécessairement $f(y) = 1/n^n$ et il s'agit donc bien de points où f atteint son maximum sur S.

d) Si $u = 0$, l'inégalité est évidente, sinon on pose $x = u/\|u\| \in S$ et on trouve que $f(x) \leqslant 1/n^n$ d'après la question précédente. L'inégalité souhaitée en découle facilement.

2. a) Le point $x_0 = (0, \dots, 1/a_i, \dots, 0)$ appartient à $B \cap H$, ce dernier est donc non vide. Comme h et la norme euclidienne sont continues, on en tire comme en 1. b) que B et H sont fermés. Il en est donc de même pour leur intersection. Il est clair que $B \cap H$ est borné puisque B l'est déjà.

b) La fonction g est continue sur le fermé borné $B \cap H$, elle admet donc un minimum m sur cet ensemble. De plus, on remarque que l'on a obligatoirement $m \leqslant 1/a_i^2 = g(x_0)$ et $g(x) = \|x\|^2 > 1/a_i^2$ pour tout x de H qui n'appartient pas à B. Il en résulte immédiatement que m est aussi le minimum de g sur H.

c) On peut appliquer le théorème du cours qui nous dit qu'en un point $x \in H$ où le minimum est atteint, on a nécessairement

$$\nabla(g)(x) \in \{x \in \mathbb{R}^n ; \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0\}^{\perp} = \mathrm{Vect}(a_1, \cdots, a_n)$$

Il existe donc un réel λ tel que $2x_k = \lambda a_k$ pour $k \in [\![1, n]\!]$, on en déduit que

$$0 = \sum_{k=1}^{n} a_k(2x_k - \lambda a_k) = 2 - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

D'où :

$$m = f(x) = \sum_{k=1}^{n} \Big[\frac{a_k}{\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell^2}\Big]^2 = \frac{1}{\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell^2}$$

Exercice 1.09.

1. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f et g deux applications de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ continues ; de plus on suppose que g garde un signe constant sur $[a, b]$.

Montrer qu'il existe au moins un point c dans $[a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

2. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^+$ de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante et g une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ continue. On veut prouver le résultat suivant :

$$\exists\, c \in [a, b],\ \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^c g(x)\,dx$$

a) Prouver le résultat si $f(a) = 0$.

On suppose dans la suite que $f(a) \neq 0$.

b) On note G la primitive de g sur $[a, b]$ nulle en a. Justifier l'existence d'au moins un point d dans $[a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f'(x)G(x)\,dx = G(d)\int_a^b f'(x)\,dx$$

c) Conclure à l'aide d'une intégration par parties.

Solution

1. La fonction f est continue sur le segment $[a,b]$, donc il existe m et M tels que :

$$\forall x \in [a,b], m \leqslant f(x) \leqslant M$$

$\star$ Supposons que $\forall x \in [a,b], g(x) \geq 0$.

Comme g est à valeurs positives ou nulles :

$$\forall x \in [a,b], mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$$

Les bornes étant dans l'ordre croissant, par conservation des inégalités par encadrement : $\displaystyle\int_a^b mg(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant \int_a^b Mg(x)\,dx$

Soit :

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx$$

Si g est la fonction nulle le résultat demandé est banal et sinon $I = \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx > 0$, ce qui permet d'écrire :

$$m \leqslant \frac{1}{I}\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M$$

et comme $\displaystyle\frac{1}{I}\int_a^b f(x)g(x)\,dx \in [m,M]$, le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'au moins un point $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\frac{1}{I}\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)$.

Il n'y a plus qu'à remultiplier par I.

$\star$ Si g est à valeurs négatives ou nulles, il suffit d'appliquer le résultat précédent à la fonction $-g$.

2. a) Si $f(a) = 0$, alors comme f est positive décroissante et $a \leqslant b$, f est en fait la fonction nulle et le résultat est banal.

b) G est continue sur $[a,b]$ et f' est continue sur $[a,b]$ et garde un signe constant (négatif ou nul sur $[a,b]$).

Le résultat de la question 1. donne donc directement :

$$\exists\, d \in [a,b] \int_a^b G(x)f'(x)\,dx = G(d)\int_a^b f'(x)\,dx$$

c) En intégrant par parties le résultat précédent donne :

$$f(b)G(b) - f(a)G(a) - \int_a^b f(x)g(x)dx = G(d)(f(b) - f(a))$$

Comme $f(a) \neq 0$, ceci peut s'écrire :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\Big(\frac{f(b)}{f(a)}G(b) + \big(1 - \frac{f(b)}{f(a)}\big)G(d)\Big)$$

Posons $\rho = \dfrac{f(b)}{f(a)}$, comme f est décroissante à valeurs positives et telle que $f(a) > 0$, on a $0 \leqslant \rho \leqslant 1$.

En notant m_G et M_G les bornes inférieure et supérieure de la fonction continue G sur le segment $[a, b]$, on a :

$$m_G = \rho m_G + (1-\rho)m_G \leqslant \rho G(b) + (1-\rho)G(d) \leqslant \rho M_G + (1-\rho)M_G = M_G$$

Une nouvelle application du théorème des valeurs intermédiaires donne :

$$\exists\, c \in [a, b], \frac{f(b)}{f(a)}G(b) + (1 - \frac{f(b)}{f(a)})G(d) = G(c) = \int_a^c g(x)\,dx$$

D'où le résultat.

Exercice 1.10.

On s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions $g : I =]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés :

$$\forall\, x \in I, g(x+1) - g(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \qquad (1)$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0 \qquad (2)$$

1. Montrer que si g vérifie (1) et (2), alors $\forall\, x \in I$, la série $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{(x+n)^2}$ converge et $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(x+n)^2}$ (3).

2. a) Réciproquement, montrer que (3) définit une fonction g sur I vérifiant (1).

b) Quel est alors le sens de variation de g ?

c) Montrer que g vérifie (2). En déduire que $\mathcal{E}$ contient une fonction et une seule.

3. Déterminer un équivalent de g en $+\infty$.

4. Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

5. On admet que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$. Calculer $g\big(-\frac{1}{2}\big)$.

Solution

1. Par sommation télescopique et passage à la limite :

$$g(x+n)-g(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\big[g(x+k+1)-g(x+k)\big]=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x+k)^2}$$

D'où :

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^2}$$

2. a) La série est bien convergente (règle de Riemann), donc g est bien définie sur I et via les sommes partielles et passage à la limite :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x+1+k)^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x+k)^2}=\frac{1}{(x+n+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}$$

D'où :

$$g(x+1)-g(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$$

b) $\forall\, x>-1, \forall\, n\in\mathbb{N}^*, x+n>0$, donc $x\mapsto 1/(x+n)^2$ est décroissante, et (via les sommes partielles) g décrot.

c) $t\mapsto 1/(x+t)^2$ est positive et décroissante sur $]-1,+\infty[$ et par comparaison série-intégrale :

$$\int_k^{k+1}\frac{dt}{(x+t)^2}\le\frac{1}{(x+k)^2}\le\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{(x+t)^2}$$

Donc :

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{(x+t)^2}\le g(x)\le\frac{1}{(x+1)^2}+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{(x+t)^2}$$

soit : $\dfrac{1}{x+1}\le g(x)\le\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$ et donc :

$$\lim_{+\infty} g=0$$

3. $\mathcal{E}$ contient une unique fonction, g définie par (3).

4. Par encadrement $g(x)\underset{(+\infty)}{\sim}\dfrac{1}{x}$

5. idem $\lim\limits_{(-1)^+} g=+\infty$.

6. Par décomposition en sommes de séries convergentes (ou via les sommes partielles)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p)^2}+\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\implies\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

et

$$g\big(-\tfrac{1}{2}\big)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{4}{(2p-1)^2}=\frac{\pi^2}{2}$$

Exercice 1.11.

1. a) Pour quelles valeurs du réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$ est-elle convergente ?

On pose alors $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$.

b) Pour quelles valeurs du réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$ est-elle convergente ?

On pose alors $g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$.

c) Etudier la monotonie des fonctions f et g.

2. a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $f(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}\,dt - \ln(x) + f(1)$.

b) Montrer qu'il existe un réel k_1 tel que l'on a, au voisinage de 0 :

$$f(x) = -\ln(x) + k_1 + o(1)$$

3. a) Montrer que :

$$\forall\, x > 0, f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{u}du \text{ et } g(x) = f(x) + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\Big(\frac{1}{\sqrt{t^2-1}} - \frac{1}{t}\Big)\,dt$$

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $g(x) = \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{2xu+u^2}}\,du$.

4. a) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que $0 < \dfrac{1}{\sqrt{a}} - \dfrac{1}{\sqrt{b}} \leqslant \dfrac{b-a}{2a^{3/2}}$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$:

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{2xu}}\,du - g(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2(2x)^{3/2}}\int_0^{+\infty} \sqrt{u}\,\mathrm{e}^{-u}\,du$$

Solution

1. a) Soit $x > 0$, la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est définie, continue et positive sur $[x, +\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) = o(\mathrm{e}^{-t})$. Il suit que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$ converge pour tout $x > 0$. En revanche $\varphi(t) \underset{(0)}{\sim} \dfrac{1}{t}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$ diverge. A fortiori, on ne peut pas prendre $x < 0$ et f est définie sur $]0, +\infty[$.

b) Soit $x > 0$. La fonction $\psi : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}}$ est définie, continue et positive sur $]1,+\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, $\psi(t) = o(\mathrm{e}^{-xt})$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}dt$ converge. D'autre part, $\psi(t) \underset{(1^+)}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{2}\sqrt{t-1}}$ et $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt$ converge en tant qu'intégrale de référence. Il suit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}}dt$ converge pour tout $x > 0$. Mais pour $x \leqslant 0$, on a $\psi(t) \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}} \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{t}$ et l'intégrale proposée diverge. Ainsi, g est définie sur $]0,+\infty[$.

c) $\star$ f est dérivable et $f'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} < 0$: f est décroissante.

$\star$ Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$. Pour tout $t \geqslant 1$, $\mathrm{e}^{-yt} \leqslant \mathrm{e}^{-xt}$.
D'où, $\dfrac{\mathrm{e}^{-ty}}{\sqrt{t^2-1}} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}}$

Par conservation des inégalités par intégration (les bornes sont dans l'ordre croissant), on en déduit que $g(y) \leqslant g(x)$: g est donc décroissante sur $]0,+\infty[$.

2. a) $\displaystyle f(x) - f(1) = \int_x^{+\infty} \dots - \int_1^{+\infty} \dots = \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt = \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}\,dt + \int_x^1 \frac{dt}{t}$

$$f(x) = \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}\,dt - \ln x + f(1)$$

b) La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}$ se prolonge par continuité en 0 (par la valeur -1), donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}\,dt$ converge et la notant I, la relation précédente donne :

$$f(x) \underset{(0^+)}{=} -\ln x + f(1) + I + o(1)$$

3. a) $\bullet$ Soit $x > 0$ On effectue dans $f(x)$ le changement de variable affine $t = xu$, la fonction $u \mapsto xu$ réalisant une bijection strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ de $]1,+\infty[$ sur $]x,+\infty[$. On a alors

$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{u}\,du$$

Puis par linéarité de l'intégration, $\displaystyle g(x) - f(x) = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\Big(\frac{1}{\sqrt{t^2-1}} - \frac{1}{t}\Big)dt$, ce qui donne la formule attendue.

b) Soit $x > 0$. On effectue dans $g(x)$ le changement de variable affine $t = \dfrac{u}{x} + 1$, la fonction $u \mapsto \dfrac{u}{x} + 1$ réalisant une bijection strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ sur $]1,+\infty[$. On a alors

$$g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(u+x)}}{\sqrt{(u/x+1)^2-1}}\frac{du}{x}=\mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{(u+x)^2-x^2}}du$$
$$=\mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{2xu+u^2}}du.$$

4. a) Soient a et b tels que $b>a>0$. On a :

$$0<\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}=\frac{b-a}{\sqrt{ab}(\sqrt{b}+\sqrt{a})}\leqslant\frac{b-a}{2a^{3/2}}.$$

b) Pour tout $x>0$, on trouve, en remplaçant $g(x)$ par l'expression trouvée précédemment :

$$\mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{2xu}}du-g(x)=\mathrm{e}^{-x}\Big(\int_0^{+\infty}(\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{2xu}}-\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{2xu+u^2}})du\Big)$$
$$=\mathrm{e}^{-x}\Big(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}(\frac{1}{\sqrt{2xu}}-\frac{1}{\sqrt{2xu+u^2}})du\Big)$$

On applique alors le résultat a) avec $a=2xu>0$ et $b=2xu+u^2>a>0$. On en déduit que

$$0<\mathrm{e}^{-u}\Big(\frac{1}{\sqrt{2xu}}-\frac{1}{\sqrt{2xu+u^2}}\Big)\leqslant\frac{\sqrt{u}\mathrm{e}^{-u}}{2(2x)^{3/2}}.$$

D'où le résultat par intégration.

Exercice 1.12.

On considère l'espace vectoriel E des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$. Pour toute fonction $f\in E$, on définit la fonction moyenne $T(f)$ associée à f en posant

$$T(f)(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & \text{si } x\in\,]0,1]\\ f(0) & \text{si } x=0\end{cases}$$

1. a) Montrer $T: f\mapsto T(f)$ est un endomorphisme de E.

b) T est-il injectif ? Surjectif ?

2. Soient f et g deux fonctions appartenant à E. On considère la fonction F définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall\, x\in[0,1], F(x)=x\int_0^x f(t)g(t)\,dt-\Big(\int_0^x f(t)\,dt\Big)\Big(\int_0^x g(t)\,dt\Big)$$

a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et exprimer sa dérivée à l'aide d'une seule intégrale.

b) On suppose que f et g sont croissantes. Montrer que
$\forall\, x\in[0,1], T(fg)(x)\geqslant T(f)(x)T(g)(x)$.

c) Que peut-on dire si les deux fonctions f et g de E sont supposées décroissantes ?

d) Quelle inégalité obtient-on si l'une des fonctions est croissante et l'autre décroissante ?

3. Si $f \in E$, on lui associe la fonction $\widetilde{f}$ en posant $\widetilde{f}(x) = \max\limits_{t\in[0,x]} f(t)$.

a) Montrer que $\widetilde{f}$ est bien définie et croissante.

b) Soit x et y deux points de $[0,1]$ tels que $x < y$. Montrer que

$$|\widetilde{f}(y) - \widetilde{f}(x)| \leqslant \max_{(t,s)\in[x,y]^2} |f(t) - f(s)|$$

En déduire que $\widetilde{f}$ est continue.

c) Etablir l'inégalité suivante :

$$\int_0^1 \widetilde{f}(t)\widetilde{g}(t)\,dt \geqslant \Big(\int_0^1 \widetilde{f}(t)\,dt\Big)\Big(\int_0^1 \widetilde{g}(t)\,dt\Big)$$

Solution

1. a) Comme f est continue sur $]0,1]$, la fonction $T(f)$ est le quotient d'une primitive de f par une fonction continue qui ne s'annule pas, elle est donc continue sur $]0,1]$.
De plus $T(f)(x) = \dfrac{F(x)}{x} = \dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}$, où F désigne la primitive de f nulle en 0. Ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to 0} T(f)(x) = F'(0) = f(0)$.
Enfin, la linéarité de l'opérateur T est banale.

b) Si $T(f) = 0$, F s'annule sur $]0,1]$ (notation précédente), la fonction f s'annule donc sur $]0,1]$ et en 0 par continuité, par suite $f = 0$ et T est injectif.
La fonction $T(f)$ est toujours de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$, il suffit donc de choisir une fonction $g \in E$ qui n'est pas dérivable en un point de $]0,1]$ (on peut prendre par exemple $g(x) = |x - 1/2|$) pour que l'équation $T(f) = g$ n'ait pas de solution. L'endomorphisme T n'est donc pas surjectif.

2. a) La fonction F est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ comme somme de produits ne faisant intervenir que des primitives de fonctions continues et de la fonction $x \mapsto x$.
Le calcul de la dérivée donne :

$$F'(x) = \int_0^x f(t)g(t)\,dt + xfx)g(x) - f(x)\int_0^x g(t)\,dt - g(x)\int_0^x f(t)\,dt$$

Soit : $F'(x) = \displaystyle\int_0^x (f(x) - f(t))(g(x) - g(t))\,dt.$

b) Les fonctions f et g étant croissantes, on voit que l'intégrande précédent est positif, par suite $F'(x) \geqslant 0$. La fonction F est donc croissante et comme $F(0) = 0$, on aboutit à $T(fg)(x) \geqslant T(f)(x)T(g)(x)$ sur $]0,1]$ et ceci reste évidemment vrai en 0.

Si les deux fonctions f et g de E sont supposées décroissantes, l'intégrande correspondant à F' reste positif et on arrive à la même inégalité.

c) Si l'une des fonctions est croissante et l'autre décroissante, l'intégrande associé à F' est négatif et par suite F est décroissante.
On obtient alors $T(fg)(x) \leqslant T(f)(x)T(g)(x)$ sur $[0,1]$.

3. a) La fonction $\widetilde{f}$ est bien définie car f est une fonction continue, elle admet donc un maximum sur le segment $[0,x]$.
Si $x \leqslant y$, on a $[0,x] \subseteq [0,y]$ et par suite $\widetilde{f}(x) \leqslant \widetilde{f}(y)$, la fonction $\widetilde{f}$ est donc croissante.

b) $\star$ Si $x < y$, on observe que pour $t \leqslant x$ on a $f(t) \leqslant \widetilde{f}(x)$ et si $x \leqslant t \leqslant y$ alors il vient :

$f(t) = (f(t)-f(x))+f(x) \leqslant |f(t)-f(x)|+f(x) \leqslant \max\limits_{t,s\in[x,y]} |f(t)-f(s)|+\widetilde{f}(x)$.

D'où $\widetilde{f}(y) \leqslant \max\limits_{t,s\in[x,y]} |f(t)-f(s)| + \widetilde{f}(x)$.

Comme $\widetilde{f}$ est croissante, on observe que $|\widetilde{f}(y) - \widetilde{f}(x)| = \widetilde{f}(y) - \widetilde{f}(x)$ et que l'inégalité précédente conduit immédiatement à l'inégalité souhaitée.

On déduit de cette inégalité que si $|f(y) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon/2$ sur un intervalle I de la forme $I =]x_0 - \alpha, x_0 - \alpha[\cap [0,1]$, alors $|\widetilde{f}(y) - \widetilde{f}(x_0)| \leqslant \varepsilon$ sur I.
La continuité de $\widetilde{f}$ en x_0 provient alors clairement de celle de f en x_0.
(faire un petit dessin pour montrer le lien entre $\widetilde{f}$ et f)

c) Puisque $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ sont continues et croissantes, d'après 2. b) on a :

$$T(\widetilde{f}\widetilde{g})(1) \geqslant T(\widetilde{f})(1)T(\widetilde{g})(1)$$

et c'est exactement l'inégalité demandée.

Exercice 1.13.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels non nuls. On considère les ensembles suivants :

$$\mathcal{E} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} \leqslant 1\}$$

ainsi que :

$$S = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1\}$$

et

$$\mathcal{E}_0 = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} < 1\}$$

1. **a)** Montrer que $\mathcal{E}$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$ telle que :
$\forall (x, y) \in \mathcal{E}^2, \frac{1}{2}(x + y) \in \mathcal{E}$.

b) Montrer que $\mathcal{E}_0$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et que S est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, tel que $x \notin \mathcal{E}$. On considère la fonction f définie sur $\mathcal{E}$ par :

$f(z) = \|z - x\|^2$, où $\|.\|$ représente la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$

2. **a)** Montrer que $\inf_{z\in\mathcal{E}} f(z)$ existe et est atteint en un (ou plusieurs) point(s) de $\mathcal{E}$.

b) Soit z_0 un point où f atteint son minimum sur $\mathcal{E}$. En calculant le gradient de f, montrer que z_0 appartient à S.

c) Montrer que $\inf_{z\in\mathcal{E}} f(z)$ est atteint en un seul point. On le note x^*.

3. **a)** Montrer que le point $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ est défini par : il existe λ réel tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$x_i^* = \frac{a_i^2 x_i}{a_i^2 + \lambda} \qquad (\star)$$

b) Montrer que l'on peut supposer $\lambda > 0$.

c) En étudiant la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2 x_i^2}{(a_i^2 + t)^2} - 1$$

montrer qu'il existe un unique λ vérifiant $(\star)$.

4. On suppose dans cette question que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i = 1$. Déterminer le point x^* ainsi que $f(x^*)$.

__Solution__

1. a) $\star$ L'ensemble $\mathcal{E}$ est fermé car l'application $(x_1, \dots, x_n) \to \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2}$ est polynomiale donc continue.
$\star$ Il est borné car pour $x \in \mathcal{E}$, on a, pour tout indice i, $|x_i| \leqslant |a_i|$, donc $\|x\| \leqslant \|a\|$ (en posant bien entendu $a = (a_1, \dots, a_n)$).
$\star$ Enfin, $\left(\frac{x_i + y_i}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}(x_i^2 + y_i^2)$ (car $(x_i - y_i)^2 \geqslant 0$)
Donc avec $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, et $z = \frac{1}{2}(x + y) = (z_1, \dots, z_n)$:

$$x, y \in \mathcal{E} \implies \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^2}{a_i^2} \leqslant \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{a_i^2}\Big) \leqslant \frac{1}{2}(1 + 1) = 1 \text{ et } z \in \mathcal{E}$$

b) $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{E}_0$ est fermé pour la même raison que précédemment donc $\mathcal{E}_0$ est ouvert et S est fermé, borné car $S = \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_0 = \mathcal{E} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{E}_0)$.

2. a) La fonction f est continue, car polynomiale. Sa restriction à $\mathcal{E}$ qui est fermé et borné admet donc un minimum sur ce domaine.

b) Si ce minimum est atteint en un point z_0 de l'ouvert $\mathcal{E}_0$, c'est un point critique. Or :

$$\nabla f(z) = \big(2(x_1 - z_1), \dots, 2(x_n - z_n)\big)$$

Le seul point critique de f est donc le point x qui n'appartient pas à $\mathcal{E}$. Ainsi le minimum est-il atteint sur $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_0 = S$.

c) Supposons le minimum m atteint en $z_1 \neq z_2$ de S. Soit $z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$. Comme $z \in \mathcal{E}$, on a :

$$m \leqslant \|z - x\| = \frac{1}{2}\|(z_1 - x) + (z_2 - x)\|\| \leqslant \frac{1}{2}(\|z_1 - x\| + \|z_2 - x\|) = m$$

On a donc égalité dans les inégalités précédentes, et égalité dans l'inégalité du triangle. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_1 - x = \alpha(z_2 - x)$.

Comme $\|z_1 - x\| = \|z_2 - x\|$, il vient $\alpha = 1$ et $z_1 = z_2$, ce qui contredit l'hypothèse faite. (On peut aussi se contenter de faire un petit dessin pour comparer côtés et hauteur d'un triangle isocèle.)

Le minimum est donc atteint en un seul point noté x^*.

3. a) On utilise les multiplicateurs de Lagrange.

On cherche le minimum de f sous la contrainte $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^2}{a_i^2} - 1 = 0$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla(f(z) + \lambda g(z)) = 0$. Il vient :

$\forall\, i \in [\![1, n]\!], z_i - x_i + \lambda \dfrac{z_i}{a_i^2} = 0$, soit $\lambda \dfrac{x_i^*}{a_i^2} = x_i - x_i^*$ et $x_i^* = \dfrac{a_i^2 x_i}{a_i^2 + \lambda}$

b) Comme $\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_i^*)^2 = \lambda^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^*}{a_i^2}$, on peut supposer $\lambda > 0$ (car $x \neq x^*$).

c) La fonction φ est clairement strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ telle que l'on ait $\varphi(0) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^*}{a_i^2} > 1$ (car $x \notin \mathcal{E}$) et $\lim\limits_{+\infty} \varphi = 0$. Il existe donc un unique $\lambda_0 > 0$ tel que $\varphi(\lambda_0) = 0$. Ce λ_0 donnera le point x^*.

4. Dans le cas particulier de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, les calculs précédents donnent $x_i^* = \dfrac{x_i}{1 + \lambda}$ et $\varphi(\lambda) = 0$ donne $(1 + \lambda)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2$; donc $\lambda_0 = \|x\| - 1$ (car $\|x\| > 1$). Le minimum est atteint en $\dfrac{x}{1 + \|x\| - 1}$ ce qui correspond à l'intersection de la sphère unité et de la demi-droite $[0, x[$.

Exercice 1.14.

Soit f une fonction définie sur $I = \mathbb{R}_+$ à valeurs réelles. Pour tout réel positif m, on définit la fonction h_m sur I, par $h_m : x \mapsto mx - f(x)$ et on note :

$$M(f) = \{m \in \mathbb{R}_+ \ / \ h_m \text{ est majorée sur } I\}$$

1. Montrer que si $m \in M(f)$, alors $[0, m] \subset M(f)$.

Désormais, lorsque $m \in M(f)$, on pose $f^*(m) = \sup\limits_{x \in I} h_m(x) = \sup\limits_{x \in I}(mx - f(x))$.
La fonction f^*, ainsi définie sur $M(f)$, est appelée la fonction conjuguée de f.

2. Soit c un réel et α un réel strictement supérieur à 1. Pour les fonctions qui suivent, préciser $M(f)$ et expliciter, pour les réels x de $M(f)$, $f^*(x)$ en fonction de x.

a) $f : I \to \mathbb{R}, x \mapsto c$.

b) $f : I \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x^\alpha}{\alpha}$.

3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $M(f)$ soit non vide. Montrer que :

$$\forall\, x \in I, \forall\, m \in M(f), f(x) + f^*(m) \geqslant mx$$

4. Soient f, g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ telles que $f \leqslant g$. Montrer que $M(f) \subset M(g)$, puis que

$$\forall\, m \in M(f),\ g^*(m) \leqslant f^*(m)$$

5. On se propose de chercher les fonctions vérifiant $M(f) = I$ et $f = f^*$.

a) A l'aide de la question 2., déterminer une solution.

b) A l'aide des résultats précédents, montrer qu'il existe une seule fonction f égale à sa conjuguée.

Solution

1. Soit $m \in M(f)$ et $\mu \in [0, m]$. Comme $m \in M(f)$, la fonction h_m est majorée sur I et il existe un réel K tel que $\forall\, x \in I, mx - f(x) \leqslant K$.
Alors $\forall\, x > 0$, $\mu x - f(x) = mx - f(x) - (m - \mu)x \leqslant K$ et $\mu \in M(f)$.
Ainsi $[0, m] \subset M(f)$.

2. **a)** Soit f_1 la fonction constante égale c. Soit m un réel strictement positif, alors $\lim\limits_{x \to +\infty}(mx - c) = +\infty$ et $m \notin M(f_1)$. Donc la fonction $h_m : x \mapsto mx - c$ est majorée sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $m = 0$. Ainsi,

$$M(f_1) = \{0\}, f_1^* : 0 \mapsto -c$$

b) Ici $h_m(x) = mx - \dfrac{x^\alpha}{\alpha}$, h_m est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, avec $h'_m(x) = m - x^{\alpha-1}$. Comme $\alpha > 1$, h_m passe par un maximum en $x_0 = m^{\frac{1}{\alpha-1}}$, ce maximum valant :

$$h_m(x_0) = m^{1+\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha} m^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \frac{\alpha-1}{\alpha} m^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

Donc $M(f_2) = I$ et $f_2^* : x \mapsto \dfrac{\alpha-1}{\alpha} x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$.
On peut noter que f_2^* est de la même forme que f_2, en remplaçant $\alpha > 1$ par $\dfrac{\alpha}{\alpha-1} > 1$. (à suivre ...)

3. Soit $m \in M(f)$ et $x \in I$. D'après la définition de $f^*(m)$:
$f(x) + f^*(m) \geqslant f(x) + h_m(x) = mx$.
Finalement :

$$\forall\, x \in I, \forall\, m \in M(f), f(x) + f^*(x) \geqslant mx$$

4. Soit f, g telles que $f > g$. Pour tout $m \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in I$,
$mx - g(x) \leqslant mx - f(x)$
Ainsi, si $m \in M(f)$, alors $x \mapsto mx - f(x)$ est bornée et $x \mapsto mx - g(x)$ est bornée. D'où $M(f) \subset M(g)$.

Alors, comme $f^*(m)$ est un majorant de $x \mapsto mx - f(x)$,

$$\forall\, x \in I, mx - g(x) \leqslant f^*(m)$$

Ainsi, $f^*(m)$ est un majorant de $x \mapsto mx - g(x)$ et $g^*(m) \leqslant f^*(m)$.

5. a) Soit $f_2 : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$, on a vu en 2. b) que $f_2^* = f_2$.

b) D'après la question 3., $\forall\, x \in I, \forall\, m \in M(f), f(x) + f^*(m) \geqslant mx$.
Ainsi, comme $f = f^*$ et $M(f) = I$, $\forall\, x \in I$, $2f(x) \geqslant x^2$. Ainsi :

$$\text{si } f = f^*, \text{ alors } f \geqslant f_2.$$

Comme $f \geqslant f_2$, d'après la question 4., on a $f^* \leqslant f_2^* = f_2$, et puisque $f = f^*$, $f \leqslant f_2$.
Finalement $f = f_2$ et le problème a donc une solution et une seule.

Exercice 1.15.

E désigne l'ensemble des suites de nombres entiers naturels $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$p_0 > 1, \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}, p_n \leq p_{n+1}$$

Soit $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, x_n = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_0p_1} + \frac{1}{p_0p_1p_2} + \cdots + \frac{1}{p_0p_1\ldots p_n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p_0p_1\cdots p_k}$$

1. **a)** On suppose ici que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $p_n = a$, où a est un entier fixé tel que $a \geqslant 2$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer x_n et déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

b) On suppose ici que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $p_n = n+2$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

c) On revient au cas général. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite appartient à $]0,1]$.

Pour $p \in E$, on note alors $f(p)$ la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée, définissant ainsi une application de E dans $]0,1]$.

2. Soit $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $q = (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments distincts de E.

a) On suppose $p_0 > q_0$. Montrer que $f(p) < f(q)$.

b) On suppose $p_0 = q_0$. En introduisant $\ell = \min\{j \in \mathbb{N}^* \ / \ p_j \neq q_j\}$, montrer que $f(p) \neq f(q)$. Quelle propriété de f a-t-on ainsi obtenu ?

<u>Solution</u>

1. a) $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{a^{k+1}} = \dfrac{1}{a} \times \dfrac{1-(\frac{1}{a})^{n+1}}{1-\frac{1}{a}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{a-1}$

b) $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(k+2)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}-2.$

c) La suite (x_n) est strictement croissante de premier terme strictement positif et comme la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2, on a : $x_n \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^{k+1}} \leqslant \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^k} = 1.$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée par 1, donc convergente et sa limite appartient à $]0,1]$.

2. **a)** La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc par majoration du terme général puis passage à la limite :

$$f(p) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_0^{k+1}} = \frac{1}{p_0} \times \frac{1}{1-\frac{1}{p_0}} = \frac{1}{p_0-1}$$

Alors que $f(q) = \dfrac{1}{q_0} + \cdots > \dfrac{1}{q_0} \geqslant \dfrac{1}{p_0-1}$ (car $p_0 > q_0 \implies p_0 - 1 \geqslant q_0$, puisque l'on travaille avec des entiers)

Ainsi $f(p) < f(q)$.

b) Quitte à échanger p et q, on peut supposer $p_0 = q_0, p_1 = q_1, \ldots, p_{\ell-1} = q_{\ell-1}$ et $p_\ell > q_\ell$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{p_0 p_1 \ldots p_k}$ et $y_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{q_0 q_1 \ldots q_k}$

soit alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant \ell$. On a, les convergences ayant été vues :

$$f(p) = x_{\ell-1} + \frac{1}{p_0 \dots p_{\ell-1}} \sum_{k=\ell}^{\infty} \frac{1}{p_\ell \dots p_k}$$

$$\leqslant x_{\ell-1} + \frac{1}{p_0 \dots p_{\ell-1}} \sum_{k=\ell}^{n} \frac{1}{p_\ell^{k-\ell+1}} = x_{\ell-1} + \frac{1}{p_0 \dots p_{\ell-1}} \times \frac{1}{p_\ell - 1}$$

$$f(p) \leqslant x_{\ell-1} + \frac{1}{p_0 \dots p_{\ell-1}} \times \frac{1}{q_\ell}$$

tandis que

$$f(q) > y_\ell = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_k} = x_{\ell-1} + \frac{1}{p_0 \dots p_{\ell-1}} \times \frac{1}{q_\ell}$$

(puisque la suite q coincide avec la suite p jusqu'au rang $\ell - 1$)

On a donc $f(p) \neq f(q)$.

On vient de démontrer que l'application f réalise une injection de E dans $]0, 1]$.

Exercice 1.16.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application f_n définie comme suit :

$$f_n :]n, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x-k}$$

1. Soit A un réel fixé strictement positif. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = A$ admet une unique solution que l'on notera x_n.

2. Déterminer la limite de la suite $(x_n)_n$.

3. a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(n+1)$.

En déduire qu'il existe un entier n_1 tel que $\forall\, n \geqslant n_1, x_n > n+1$.

b) Plus généralement, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un rang n_k tel que $\forall\, n \geqslant n_k, x_n > n+k$.

4. Montrer que pour tout entier $n \geqslant n_1$

$$\int_{x_n-n}^{x_n+1} \frac{dt}{t} \leqslant f_n(x_n) = A \leqslant \int_{x_n-n-1}^{x_n} \frac{dt}{t}$$

5.a) Montrer que la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)_n$ est convergente et exprimer sa limite en fonction de A.

b) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{x_n}$.

<u>Solution</u>

1. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $g_k : x \mapsto \dfrac{1}{x-k}$. La fonction g_k est strictement décroissante sur $]n, +\infty[$. Par somme, $f_n = g_0 + g_1 + \cdots + g_n$ est continue et strictement décroissante sur $]n, +\infty[$.

Lorsque x tend vers n^+, $g_n : x \mapsto \dfrac{1}{x-n}$ tend vers $+\infty$ et $\lim\limits_{x \to n} f_n(x) = +\infty$.
Lorsque x tend vers $+\infty$, chaque fonction g_k tend vers 0 et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$.
La fonction f_n réalise donc une bijection de $]n, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$. Ainsi, tout réel $A > 0$ admet un unique antécédent $x_n \in \,]n, +\infty[$ par f_n.

2. Pour tout entier n, $x_n > n$. Donc, par comparaison, la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.

3. Pour tout entier n, $f_n(n+1) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(n+1)-k} = \sum\limits_{u=1}^{n+1} \dfrac{1}{u}$, grâce au changement d'indice $u = (n+1) - k$.
On reconnaît la somme partielle de rang $n+1$ de la série harmonique.
Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(n+1) = +\infty$.
Ainsi, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $f_n(n+1) > A = f_n(x_n)$. D'où, par stricte décroissance de f_n, pour tout $n \geqslant n_0$, $x_n > n+1$.
Plus généralement :

$$f_n(n+p) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+p-k} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{1}{p+n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Ainsi pour n assez grand $f_n(n+p) > A$ et $x_n > n+p$

4. Soit $n \geqslant n_0$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Prenons un réel t tel que $x_n - k \leqslant t \leqslant x_n - k + 1$. Comme $x_n - k > (n+1) - k \geqslant 1$, nous sommes dans l'intervalle $]0, +\infty[$, intervalle dans lequel la fonction inverse est décroissante. Nous obtenons donc $\dfrac{1}{x_n - k + 1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{x_n - k}$ puis en intégrant sur $[x_n - k + 1, x_n - k]$:

$$\frac{1}{x_n - k + 1} \leqslant \int_{x_n - k}^{x_n - k + 1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{x_n - k}.$$

En opérant de même avec un réel t tel que $0 < x_n - k - 1 \leqslant t \leqslant x_n - k$, on obtient :

$$\frac{1}{x_n - k} \leqslant \int_{x_n - k - 1}^{x_n - k} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{x_n - k - 1}.$$

En combinant les deux inégalités obtenues, on obtient :

$$\int_{x_n - k}^{x_n - k + 1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{x_n - k} \leqslant \int_{x_n - k - 1}^{x_n - k} \frac{dt}{t}$$

On somme pour k allant de 0 à n, ce qui donne grâce à la relation de Chasles :

$$\int_{x_n - n}^{x_n + 1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_n - k} = f_n(x_n) \leqslant \int_{x_n - n - 1}^{x_n} \frac{dt}{t}.$$

5. a) Comme une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$ est la fonction ln, l'inégalité précédente se réécrit :

$$\ln\Big(\frac{x_n+1}{x_n-n}\Big) \leqslant A \leqslant \ln\Big(\frac{x_n}{x_n-n-1}\Big) \qquad (**).$$

L'inégalité de gauche de $(**)$ donne une fois transformée $x_n \geqslant \dfrac{1+ne^A}{e^A-1}$, d'où :

$$\frac{x_n}{n} \geqslant \frac{1/n+e^A}{e^A-1}.$$

L'inégalité de droite de $(**)$ donne $x_n \leqslant \dfrac{(n+1)e^A}{e^A-1}$, d'où $\dfrac{x_n}{n} \leqslant \dfrac{(1+1/n)e^A}{e^A-1}$.

Par théorème d'encadrement, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = \frac{e^A}{e^A-1}$.

b) D'après la question précédente, $\dfrac{1}{x_n} \sim (\dfrac{e^A-1}{e^A})\,\dfrac{1}{n}$, les deux termes comparés étant positifs.

Donc, par critère d'équivalence, la série $\sum \dfrac{1}{x_n}$ diverge.

Exercice 1.17.

1. **a)** Déterminer l'ensemble D' des réels α tels que l'intégrale $G(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$ converge.

b) Déterminer l'ensemble D des réels α tels que l'intégrale $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$ converge.

2. Soit p et q des réels quelconques. On pose $I(p,q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2q}}{1+t^{2p}}\,dt$.

a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des couples $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ tels que l'intégrale $I(p,q)$ converge.

b) Représenter l'ensemble solution $\mathcal{S}$ dans un repère cartésien du plan, avec p en abscisse et q en ordonnée. On hachurera la partie du plan correspondant à l'ensemble des points M de coordonnées $(p,q) \in \mathcal{S}$.

3. **a)** Justifier que $t \mapsto u = t^{2q+1}$ définit un changement de variables admissible dans l'intégrale $I(p,q)$, pour $q > -1/2$, et en déduire une relation entre $I(p,q)$ et $F(\alpha)$ pour des valeurs de p, q et α à préciser.

b) En utilisant le changement de variable $u \mapsto t = u^{1/(1-\alpha)}$, montrer que pour α dans un intervalle à préciser on a

$$F(\alpha) = G(\alpha) + \frac{1}{\alpha-1}\,G\big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\big)$$

c) On admet que, pour $\alpha \in D$, $G(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\alpha+1}$.

Pour $\alpha \in D$, exprimer $F(\alpha)$ comme la somme d'une série.

d) En déduire l'expression de $I(p, q)$ sous forme d'une série, pour des valeurs de p et q à préciser.

Solution

1. a) $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ si $\alpha \geqslant 0$ et $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0$ si $\alpha < 0$. L'intégrale définissant $G(\alpha)$ est donc convergente pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) $f(t) \underset{(+\infty)}{\sim} \begin{cases} \dfrac{1}{t^\alpha} & \text{si } \alpha > 0 \\ 1/2 & \text{si } \alpha = 0 \\ 1 & \text{si } \alpha \leqslant 0 \end{cases}$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

$$D' = \mathbb{R}, D =]1, +\infty[$$

2. a) Notons $h_{p,q} : t \mapsto \dfrac{t^{2q}}{1+t^{2p}}$.

$\star$ En 0 : $h_{p,q}(t) \sim \begin{cases} t^{2q} & \text{si } p > 0, \text{ intégrable sur }]0,1] \text{ lorsque } q > -1/2 \\ \frac{1}{2}t^{2q} & \text{si } p = 0 \text{ intégrable sur }]0,1] \text{ lorsque } q > -1/2 \\ t^{2(q-p)} & \text{si } p < 0, \text{ intégrable sur }]0,1] \text{ lorsque } q - p > -1/2 \end{cases}$

$\star$ En $+\infty$:

$h_{p,q}(t) \sim \begin{cases} 1/t^{2(p-q)} & \text{si } p > 0, \text{ intégrable sur } [+\infty[\text{ lorsque } p - q > 1/2 \\ \frac{1}{2}t^{2q} & \text{si } p = 0, \text{ intégrable sur } [1, +\infty[\text{ lorsque } q < -1/2 \\ t^{2q} & \text{si } p < 0, \text{ intégrable sur } [1, +\infty[\text{ lorsque } q < -1/2 \end{cases}$

En résumé : $(p, q) \in \mathcal{S} \iff [p > 0$ et $-\frac{1}{2} < q < p - \frac{1}{2}]$ ou $[p < 0$ et $p - \frac{1}{2} < q < -\frac{1}{2}]$.

b) Dans le plan (p, q) on trace les deux droites d'équations respectives $q = -\dfrac{1}{2}$ et $q = p - \dfrac{1}{2}$ et l'ensemble $\mathcal{S}$ des points situés dans les deux angles aigus (ouverts) formés par ces deux droites.

3. a) Pour $q > -1/2$, $t \mapsto t^{2q+1} = u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et alors : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2q}}{1+t^{2p}}\,dt = \frac{1}{2q+1}\int_0^{+\infty} \frac{u^{2q/(2q+1)}}{1+u^{2p/(2q+1)}} u^{-2q/(2q+1)}\,du$, donc :

$$I(p, q) = \frac{1}{2q+1}\, F\Big(\frac{2p}{2q+1}\Big)$$

à condition bien entendu que (p, q) appartienne à $\mathcal{S}$, donc à condition que $p > 0$ et $q < p - \dfrac{1}{2}$, ce qui donne bien $\alpha = \dfrac{2p}{2q+1} > 1$.

b) Le changement de variable $t = u^{1/(1-\alpha)}$, est de classe $\mathcal{C}^1$ bijectif de $[1, +\infty[$ sur $]0, 1]$, avec $\alpha/(\alpha - 1) > 1$ d'où, pour $\alpha > 1$,

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{1+t^\alpha}=-\frac{1}{1-\alpha}\int_0^1\frac{du}{1+u^{\alpha/(\alpha-1)}}=\frac{1}{\alpha-1}\,G\big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\big),\text{ et :}$$

$$F(\alpha)=G(\alpha)+\frac{1}{\alpha-1}\,G\big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\big)$$

c) $F(\alpha)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\,\alpha+1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\,\alpha+\alpha-1}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big[\dfrac{(-1)^n}{n\,\alpha+1}+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\,\alpha-1}\Big]$

$$F(\alpha)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\,(-1)^{n-1}}{n^2\,\alpha^2-1}$$

d) Pour $-1/2<q<p-1/2$ (et $p>0$)

$$I(p,q)=\frac{1}{2q+1}\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\,(-1)^{n+1}}{n^2\,(\frac{2p}{2q+1})^2-1}\Big]$$

Exercice 1.18.

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f:x\mapsto\begin{cases}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1} & \text{si } x>0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue sur $[0,+\infty[$ et prouver que : $\forall\,x\in[0,+\infty[, 0<f(x)\leqslant 1$.

2. Etablir que pour tout entier naturel n non nul et tout réel strictement positif x, on a :

$$\frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x-1}=\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}-\sum_{k=1}^{n}x\mathrm{e}^{-kx}$$

3. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}x.\mathrm{e}^{-nx}\,dx$ est convergente et déterminer sa valeur.

4. Prouver que pour tout entier naturel n non nul, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x.\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x-1}\,dx$ est convergente et démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x.\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x-1}\,dx=0$.

5. Déduire de ce qui précède que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.

6. On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$. En adaptant les méthodes développées aux questions précédentes, prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}\,dx$ converge et vaut $\dfrac{\pi^2}{12}$.

Solution

1. $\mathrm{e}^x - 1 \underset{(0)}{\sim} x$ fait partie du patrimoine et la continuité de f en 0 est donc acquise.
$\mathrm{e}^x - 1 \geqslant x$ est tout aussi classique et on a bien $x \geqslant 0 \implies 0 < f(x) \leqslant 1$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, et tout réel strictement positif x, on a :
$$\sum_{k=1}^{n} x\mathrm{e}^{-kx} = x\mathrm{e}^{-x}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-(k-1)x} = x\mathrm{e}^{-x}\sum_{j=0}^{n-1}(\mathrm{e}^{-x})^j = x\mathrm{e}^{-x}\frac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{1-\mathrm{e}^{-x}} = x\frac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x-1}$$
et on remet dans l'ordre souhaité.

3. Pour $a > 0$, $\displaystyle\int_0^a x\mathrm{e}^{-nx}dx = -\frac{1}{n}\left[x\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^a + \frac{1}{n}\int_0^a \mathrm{e}^{-nx}dx$
$$= -\frac{1}{n}a\mathrm{e}^{-na} + \frac{1}{n^2}(1-\mathrm{e}^{-na}),$$
et, par passage à la limite :
$$\int_0^{+\infty} x.\mathrm{e}^{-nx}dx = \frac{1}{n^2}$$

4. Pour tout entier naturel n non nul et $x > 0$, on a $0 \leqslant \dfrac{x.\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x-1} \leqslant \mathrm{e}^{-nx}$ et la fonction à intégrer se prolonge par continuité en 0, l'existence de l'intégrale s'en déduit et de plus :
$$0 \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{x.\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x-1}dx \leqslant \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx}\,dx = \frac{1}{n}, \text{ donc : } \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x.\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x-1}\,dx = 0.$$

5. f est continue sur $\mathbb{R}_+$, positive et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.
Pour tout entier n non nul, on tire de 2. :
$$\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x-1}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\,dx - \sum_{k=1}^{n}\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-kx}dx$$
d'où :
$$\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x-1}dx = \int_0^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}dx - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$
puis par passage à la limite :
$$\int_0^{+\infty}f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

6. $\star$ Pour tout réel x et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\sum_{k=1}^{n} x(-\mathrm{e}^{-x})^k = -x\mathrm{e}^{-x}\sum_{k=1}^{n}(-\mathrm{e}^{-x})^{k-1} = -x\mathrm{e}^{-x}\sum_{j=0}^{n-1}(-\mathrm{e}^{-x})^j$$
$$= -x\mathrm{e}^{-x}\frac{1-(-1)^n\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = -\frac{x}{\mathrm{e}^x+1} - (-1)^n\frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x+1}$$

Par intégration et passage à la limite quand n tend vers l'infini, on a :
$0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x+1}dx + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k^2}$

On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i)^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)^2}$.

on en déduit, par passage à la limite : $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\times\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$.

D'autre part : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i)^2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)^2}$, d'où
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{1}{4}\times\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}$.

D'où : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}dx = -\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$

Exercice 1.19.

1. **a)** Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t-x}}$ converge et calculer alors sa valeur notée $I(x)$.

b) Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}dt$ converge pour tout $x \in [0,1[$ et déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}dt$.

On note alors $T(f)$ la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$T(f)(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}dt, \text{ si } 0 \leqslant x < 1 \text{ et } T(f) \text{ continue en } 1$$

2. **a)** Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a

$$T(f)(x) = \sqrt{1-x}\int_0^1 \frac{f\big(x+(1-x)u\big)}{\sqrt{u}}du.$$

b) On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, montrer que la fonction $T(f)$ est continue sur $[0,1]$.

3. On suppose dans cette question que $f(1) \neq 0$.

a) Donner un équivalent de $T(f)$ au voisinage de 1.

b) Montrer que $T(f)$ n'est pas dérivable en $x = 1$.

4. **a)** Déterminer une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction f continue sur $[0,1]$, on a :

$$\sup_{x\in[0,1]} |T(f)(x)| \leqslant C \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

b) Déterminer la plus petite constante C vérifiant l'inégalité précédente.

Solution

1. a) Pour $x \in [0,1[$, la fonction $t \to \dfrac{1}{\sqrt{t-x}}$ est continue sur $]x,1]$, et la règle de Riemann donne la convergence de l'intégrale pour la borne inférieure x. De plus par intégration immédiate :

$$I(x) = 2\sqrt{1-x}, \text{ en particulier } I(0) = 2$$

b) La fonction f est bornée sur $[0,1]$. Donc, il existe $C \geqslant 0$ tel que pour tout $t \in \,]x,1]$, on a $\left|\dfrac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\right| \leqslant \dfrac{C}{\sqrt{t-x}}$, ce qui montre que l'intégrale définissant $T(f)(x)$ converge absolument, donc converge : $T(f)(x)$ est bien défini pour tout $x \in [0,1[$. Enfin :

$$|T(f)(x)| \leqslant 2C\sqrt{1-x} \implies \lim_{x\to 1^-} T(f)(x) = 0$$

On pose donc $T(f)(1) = 0$ pour assurer la continuité (à gauche) en 1.

2. a) Le changement de variable affine $t = x + (1-x)u$ donne la réponse.

b) Il suffit de montrer la continuité de

$$g : x \mapsto \int_0^1 \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}}\,du = \int_0^1 \frac{f(u+x(1-u))}{\sqrt{u}}\,du.$$

On a pour $x \in [0,1]$ et h tel que $x+h \in [0,1]$:

$$g(x+h) - g(x) = \int_0^1 \frac{f(u+(x+h)(1-u)) - f(u+x(1-u))}{\sqrt{u}}\,du$$

Or $|f(u+(x+h)(1-u)) - f(u+x(1-u))| \leqslant |h|(1-u)\max(|f'|) \leqslant |h| \max\limits_{[0,1]}(|f'|)$

Ainsi : $|g(x+h) - g(x)| \leqslant |h|\max(|f'|)\displaystyle\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}} = 2|h|\max(|f'|)$.

On en déduit la continuité de g donc de $T(f)$.

3. a) Pour intégrer localement un équivalent, il nous faut revenir aux définitions « epsilonesques » :

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x-1| \leqslant \delta$ entraîne $|f(t) - f(1)| \leqslant \varepsilon$. Ainsi pour $x \geqslant 1-\delta$:

$$\begin{aligned}\left|T(f)(x) - 2f(1)\sqrt{1-x}\right| &= \int_x^1 \frac{f(t)-f(1)}{\sqrt{t-x}}\,dt \leqslant \int_x^1 \left|\frac{f(t)-f(1)}{\sqrt{t-x}}\right| dt \\ &\leqslant 2\varepsilon\sqrt{1-x}\end{aligned}$$

Ainsi $x \geqslant 1-\delta \implies \left|\dfrac{T(f)(x)}{2f(1)\sqrt{1-x}} - 1\right| \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{|f(1)|}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{T(f)(x)}{2f(1)\sqrt{1-x}} = 1$

$$T(f)(x) \underset{(1^-)}{\sim} 2f(1)\sqrt{1-x}$$

b) La question précédente montre que $\dfrac{T(f)(x)-T(f)(1)}{x-1} \underset{(1^-)}{\sim} -\dfrac{2f(1)}{\sqrt{1-x}}$ qui n'est pas de limite finie en 1, donc $T(f)$ n'est pas dérivable en 1(la représentation graphique admet une tangente verticale)

4. a) La question 1 montre que $|T(f)(x)| \leqslant (\max\limits_{[0,1]} |f|)2\sqrt{1-x} \leqslant 2 \max\limits_{[0,1]} |f|$.

b) En prenant $f = 1$, il vient $T(f)(x) = 2\sqrt{1-x} \leqslant 2$. Cela montre que 2 est la meilleure constante possible.