DM 3

THÈME : RÉVISIONS EN PROBABILITÉ

Une caractérisation de la loi géométrique

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes et de même loi, toutes deux définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On pose

$$\mathrm{I} = \min(\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \quad \mathrm{M} = \max(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \quad \text{et} \quad \mathrm{D} = \mathrm{M} - \mathrm{I}.$$

1. Dans cette question, on suppose que la loi commune de X et Y est géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ (on pose $q = 1 - p$).

- **a)** Reconnaître la loi de la variable I.
- **b)** Calculer $\mathbf{P}\big([\mathrm{I} = i] \cap [\mathrm{D} = d]\big)$ pour tout $(i, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. *On séparera les cas $d = 0$ et $d > 0$.*
- **c)** Déterminer la loi de la variable D.
- **d)** Vérifier que les variables I et D sont indépendantes.

2. Dans cette question, la loi commune de X et Y est inconnue et on suppose que les variables I et D sont indépendantes.
On note $b = \mathbf{P}(\mathrm{D} = 0)$ et, pour tout entier naturel k non nul, $p_k = \mathbf{P}(\mathrm{X} = k)$. On suppose $p_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

- **a)** Exprimer le réel b à l'aide de la famille $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.
- **b)** Exprimer, pour tout entier naturel k, la probabilité $\mathbf{P}(\mathrm{I} > k)$ à l'aide de la famille $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.
- **c)** Soit $k \in \mathbb{N}$. En calculant la probabilité $\mathbf{P}\big([\mathrm{I} > k] \cap [\mathrm{D} = 0]\big)$ établir l'égalité

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} {p_i}^2 = b\left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)^2.$$

- **d)** i) En déduire, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $(1 - b)p_k = 2b\mathbf{P}(\mathrm{X} > k)$.
  - ii) Calculer p_1 en fonction de b
  - iii) Établir, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $p_{k+1} = \frac{1-b}{1+b} p_k$.
- **e)** En déduire que la loi commune des variables X et Y est une loi géométrique.

Python

Les questions sont indépendantes. N'oubliez pas de tester les fonctions écrites avec des exemples et d'envoyer les réponses via Slack avec des captures d'écran.

3. Écrire une fonction python qui prend en argument une matrice ligne $x \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et un entier p et renvoie

$$\mathrm{S}_p(x) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}.$$

Tirer au hasard une matrice $x \in \mathscr{M}_{1,4}(\mathbb{R})$ et tracer $\big(\mathrm{S}_p(x)\big)_{p \in [\![1;20]\!]}$. Que constatez-vous ?
On pourra aussi regarder $\mathrm{N}(x) = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$.

4. On dit qu'une matrice carrée $\mathrm{A} = \big[a_{i,j}\big] \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est à diagonale dominante si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\big|a_{i,i}\big| \geqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \big|a_{i,j}\big|.$$

Écrire une fonction python `DiagoD` qui prend en argument une matrice A et retourne "vrai" si A est à diagonale dominante et "faux" sinon.

DM 3 - éléments de solution

1.a) Les variables étant X, Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, I est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathrm{I} \geqslant k) &= \mathbf{P}\big([\mathrm{X} \geqslant k] \cap [\mathrm{Y} \geqslant k]\big) \\ &= \mathbf{P}(\mathrm{X} \geqslant k)\mathbf{P}(\mathrm{Y} \geqslant k) \qquad \text{(indépendance)} \\ &= \mathbf{P}(\mathrm{X} \geqslant k)^2 \qquad \text{(X, Y même loi)} \\ \mathbf{P}(\mathrm{I} \geqslant k) &= \left(q^{k-1}\right)^2 \qquad \text{(loi géométrique)}\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathrm{I} = k) =& \mathbf{P}\big([\mathrm{I} \geqslant k] \setminus [\mathrm{I} \geqslant k+1]\big) \\ =& \mathbf{P}(\mathrm{I} \geqslant k) - \mathbf{P}(\mathrm{I} \geqslant k+1) \\ & \text{car} \quad [\mathrm{I} \geqslant k+1] \subset [\mathrm{I} \geqslant k] \\ =& q^{2k-2} - q^{2k} \\ =& q^{2k-2}\left(1-q^2\right).\end{aligned}$$

On constate que I suit une loi géométrique de paramètre

$$p' = 1 - (1-q)^2.$$

1.b) Soit $i \in \mathbb{N}$. L'événement $[\mathrm{D} = 0]$ est réalisé si et seulement si $\max(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \min(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est réalisé. C'est-à-dire, si et seulement, l'événement $[\mathrm{X} = \mathrm{Y}]$ est réalisé. D'où

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big([\mathrm{I} = i] \cap [\mathrm{D} = 0]\big) &= \mathbf{P}([\mathrm{X} = i] \cap [\mathrm{X} = \mathrm{Y}]) \\ &= \mathbf{P}([\mathrm{X} = i] \cap [\mathrm{Y} = i]) \\ &= \mathbf{P}(\mathrm{X} = i) \cdot \mathbf{P}(\mathrm{Y} = i).\end{aligned}$$

On trouve

$$\mathbf{P}([\mathrm{I} = i] \cap [\mathrm{D} = 0]) = \left(pq^{i-1}\right)^2.$$

Soit $d \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}& \mathbf{P}\big([\mathrm{I} = i] \cap [\mathrm{D} = d]\big) \\ =& \mathbf{P}\big([\min(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = i] \cap [\max(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = d+i]\big) \\ =& \mathbf{P}\Big(\big([\mathrm{X} = i] \cap [\mathrm{Y} = d+i]\big) \sqcup \big([\mathrm{X} = d+i] \cap [\mathrm{Y} = i]\big)\Big) \\ =& \mathbf{P}\big([\mathrm{X} = i] \cap [\mathrm{Y} = d+i]\big) + \mathbf{P}\big([\mathrm{X} = d+i] \cap [\mathrm{Y} = i]\big) \\ =& 2\mathbf{P}([\mathrm{X} = i] \cap [\mathrm{Y} = d+i]) \qquad \text{(même loi)} \\ =& 2\mathbf{P}(\mathrm{X} = i)\mathbf{P}(\mathrm{Y} = d+i) \qquad \text{(indépendance)} \\ =& 2p \cdot q^{i-1} \cdot p \cdot q^{d+i-1} \\ =& 2p^2 q^{d+2i-2}.\end{aligned}$$

1.c) La variable D est à valeurs dans $\mathbb{N}$. On a vu que $[\mathrm{D} = 0]$ est réalisé si et seulement si $[\mathrm{X} = \mathrm{Y}]$. En reprenant le calcul de l'exercice **??**, on trouve

$$\mathbf{P}(\mathrm{D} = 0) = \frac{p}{2-p}.$$

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Les événements $\big([\mathrm{X} = i]\big)_{i \in \mathbb{N}^*}$ forment un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathrm{D} = d) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}\big([\mathrm{D} = d] \cap [\mathrm{I} = i]\big) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} 2p^2 q^{d+2i-2} \\ &= 2p^2 q^{d-2} \sum_{i=1}^{+\infty} q^{2i} \\ &= 2p^2 q^{d-2} \cdot \frac{q^2}{1-q^2}.\end{aligned}$$

Comme $1 - q^2 = (1-q)(1+q) = p(1+q)$, on trouve

$$\mathbf{P}(\mathrm{D} = d) = 2\frac{pq^d}{1+q}.$$

1.d) Soit $(i, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Si $d \neq 0$, alors d'après les calculs précédents

$$\begin{aligned}& \mathbf{P}(\mathrm{I} = i)\mathbf{P}(\mathrm{D} = d) \\ &= q^{2i-2}\left(1-q^2\right) \times \frac{2pq^d}{1+q} \\ &= q^{2i-2+d} \times 2p(1-q) \\ &= 2p^2 q^{d+2i-2} \\ &= \mathbf{P}\big([\mathrm{I} = i] \cap [\mathrm{D} = d]\big).\end{aligned}$$

On vérifie que cette relation est aussi valable pour $d = 0$. C'est bien la définition de l'indépendance de D et I.

2.a) Comme $\big([\mathrm{X} = k]\big)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événement, on applique la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathrm{D} = 0) &= \mathbf{P}(\mathrm{M} = \mathrm{I}) \\ &= \mathbf{P}(\mathrm{X} = \mathrm{Y}) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}\big([\mathrm{X} = \mathrm{Y}] \cap [\mathrm{X} = k]\big) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}(\mathrm{Y} = k)\mathbf{P}(\mathrm{X} = k) \\ b &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} {p_k}^2.\end{aligned}$$

2.b) On a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathrm{I} > k) &= \mathbf{P}\big([\mathrm{X} > k] \cap [\mathrm{Y} > k]\big) \\ &= \mathbf{P}(\mathrm{X} > k)\mathbf{P}(\mathrm{Y} > k) \\ &= \mathbf{P}(\mathrm{X} > k)^2 \\ &= \left(\sum_{i > k} \mathbf{P}(\mathrm{X} = i)\right)^2 \\ \mathbf{P}(\mathrm{I} > k) &= \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)^2.\end{aligned}$$

2.c) D'une part, par indépendance de D et I, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathrm{I}>k]\cap[\mathrm{D}=0]) &=\mathbf{P}(\mathrm{I}>k)\mathbf{P}(\mathrm{D}=0)\\ &=\left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)^2\times b.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big([\mathrm{I}>k]\cap[\mathrm{D}=0]\big) &=\mathbf{P}\big([\mathrm{I}>k]\cap[\mathrm{X}=\mathrm{Y}]\big)\\ &=\mathbf{P}([\mathrm{X}>k]\cap[\mathrm{X}=\mathrm{Y}])\\ &=\mathbf{P}\left(\bigcup_{i>k}[\mathrm{X}=i]\cap[\mathrm{X}=\mathrm{Y}]\right)\\ &=\mathbf{P}\left(\bigcup_{i>k}[\mathrm{X}=i]\cap[\mathrm{Y}=i]\right)\\ &=\sum_{i>k}\mathbf{P}([\mathrm{X}=i])\mathbf{P}(\mathrm{Y}=i)\\ \mathbf{P}\big([\mathrm{I}>k]\cap[\mathrm{D}=0]\big) &=\sum_{i>k}{p_i}^2.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2.d)i) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{i=k}^{+\infty}{p_i}^2 &=\left(\sum_{i=k+1}^{+\infty}{p_i}^2\right)+{p_k}^2\\ &=b\left(\sum_{i=k+1}^{+\infty}p_i\right)^2+{p_k}^2\\ &=b\left(\sum_{i=k}^{+\infty}p_i-p_k\right)^2+{p_k}^2\\ &=b\left(\sum_{i=k}^{+\infty}p_i\right)^2-2bp_k\sum_{i=k}^{+\infty}p_i+(1+b){p_k}^2\\ &=\sum_{i=k}^{+\infty}{p_i}^2-2bp_k\sum_{i=k+1}^{+\infty}p_i+(1-b){p_k}^2.\end{aligned}$$

D'où

$$-2bp_k\sum_{i=k+1}^{+\infty}p_i+(1-b){p_k}^2=0.$$

La relation s'en déduit en remarquant que

$$\mathbf{P}(\mathrm{X}>k)=\sum_{i=k+1}^{+\infty}p_i.$$

2.d)ii) Pour $k=1$,

$$\begin{aligned}(1-b)p_1 &=2b\mathbf{P}(\mathrm{X}>1)\\ &=2b\big(1-\mathbf{P}(\mathrm{X}\leqslant 1)\big)\\ &=2b\big(1-\mathbf{P}(\mathrm{X}=1)\big)\quad \text{car } \mathrm{X}(\Omega)=\mathbb{N}^*\\ (1-b)p_1 &=2b\big(1-p_1\big).\end{aligned}$$

Dès lors $((1-b)+2b)p_1=2b$. Soit

$$p_1=\frac{2b}{1+b}.$$

2.d)iii) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. La relation obtenue à la question d)i) donne

$$\begin{aligned}(1-b)p_k&=2b\mathbf{P}(\mathrm{X}>k)\\ (1-b)p_{k+1}&=2b\mathbf{P}(\mathrm{X}>k+1).\end{aligned}$$

Par différence

$$\begin{aligned}(1-b)\left(p_k-p_{k+1}\right) &=2b(\mathbf{P}(\mathrm{X}>k)-\mathbf{P}(\mathrm{X}>k+1))\\ &=2b(\mathbf{P}([\mathrm{X}>k]\setminus[\mathrm{X}>k+1])\\ &=2b\mathbf{P}\left(\mathrm{X}=k+1\right)\\ &=2bp_{k+1}.\end{aligned}$$

Ainsi $\qquad (1-b)p_k=(1-b)p_{k+1}+2bp_{k+1}.$

Puis $\qquad \frac{(1-b)}{1+b}p_k=p_{k+1}.$

2.e) La suite $\left(p_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc une suite géométrique de raison

$$q=\frac{1-b}{1+b}.$$

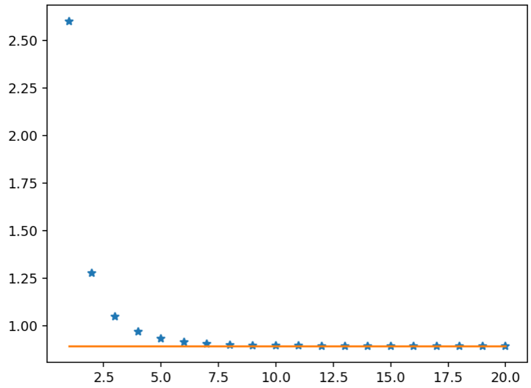
Nécessairement, la loi commune de X et Y est une loi géométrique.

3.

```
import numpy as np

# Pour rappel, pour avoir le coefficient
    en position (i+1,j+1) d'une matrice A,
     on écrit A[i,j]

def somme(x,p) :
    n=len(x) # si on veut récupérer la
        taille

    # pour calculer Sp, on peut faire une
        boucle for

    S=0
    for i in range(n):
        S+=x[i]**p

    return S**(1/p)
```

Pour l'affichage :

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.random as rd
import numpy as np
n=5
x=rd.random(n)
A=np.zeros(20)
for p in range(1,21):
    A[p-1]=somme(x,p)

absc=np.linspace(1,20,20)
B=np.max(abs(x))*np.ones(20)

plt.plot(absc,A,'*')
plt.plot(absc,B)
plt.show()
```



On conjecture que pour tout $x \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$

$$S_p(x) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} N(x).$$

4. O peut remplacer la condition par

$$2|a_{i,i}| < \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

```
def DiagoD(A):
    [m,n]=np.shape(A)
    if n!=m:
        return "la␣matrice␣n␣est␣pas␣carré
            e␣..."

    for i in range(n):
        if 2*np.abs(A[i,i])< np.sum(np.abs
            (A[i,:])):
            return "faux"
    return "vrai"

A=np.array([[3,4],[1,2]])
B=np.array([[5,2,2],[1,6,-3],[1,1,-5]])
print(DiagoD(A), DiagoD(B))

faux vrai
```