DS - calcul

Question 1.

Calculer le spectre de la matrice A suivante. *Pour tester votre calcul, la somme des valeurs propres vaut la trace.*

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

– – – – – – – – – – – – –

Question 2.

Déterminer une base des sous-espaces propres de la matrice B suivante :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

On pourra s'aider du calcul python suivant :

Editeur

```
import numpy as np
B = np.array([[3, 0, -1],[2, 4, 2],[-1,0,3]])
r1=np.linalg.matrix_rank(B-2*np.eye(3))
r2=np.linalg.matrix_rank(B-4*np.eye(3))
print('r1=',r1,'r2=',r2)

# La commande np.eye(3) donne la matrice identité I3

r1= 2 r2= 1
```

– – – – – – – – – – – – –

Question 3. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ défini par

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[x], \qquad \varphi(\mathrm{P})(x) = (x^2+1)\mathrm{P}''(x) + 2x\mathrm{P}'(x).$$

Donner le spectre de φ. *On pourra regarder la matrice de φ dans la base canonique ...*

Question 4. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. On définit l'endomorphisme ψ sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\psi(P)(x) = (x+1)(x+3)P'(x) - nxP(x).$$

Pour $(k,\ell) \in [\![0,n]\!]^2$ tel que $k+\ell = n$, on pose $P_{k,\ell}(x) = (x+1)^k(x+3)^\ell$.
Calculer $\psi\left(P_{k,\ell}\right)$. Que peut-on en déduire sur le spectre de ψ et sur les espaces propres de ψ ?

— — — — — — — — — — — — —

Question 5. Les intégrales suivantes sont convergentes. Les calculer.

$$I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} t^{666} \sin(t)\,\mathrm{d}t, \qquad J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad (\text{poser } u = 1/t) \quad \text{et} \quad K_a = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t \quad (a \in \mathbb{R}_*^+).$$

— — — — — — — — — — — — —

Question 6. On reprend l'endomorphisme φ de la question 3 avec $n = 3$. Donner une base de chacun des espaces propres.

NOM : **NOTE :** /10.

DS - feuille réponse

Question 1.

Question 2.

Question 3.

Question 4.

Question 5.

Question 6.

DS calcul - réponses

1.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rg}\begin{bmatrix} -\lambda-2 & 2 & 2\\ 1 & -1-\lambda & -2\\ -2 & 2 & 3-\lambda\end{bmatrix}\\
&=\operatorname{rg}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3-\lambda\\ 1 & -1-\lambda & -2\\ -\lambda-2 & 2 & 2\end{bmatrix} \quad L_3\leftrightarrow L_1\\
&=\operatorname{rg}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3-\lambda\\ 0 & -2\lambda & -1-\lambda\\ 0 & 2\lambda & -\lambda^2+\lambda+2\end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2\leftarrow 2L_2+L_1\\ L_3\leftarrow(-2)L_3+(\lambda+2)L_1\end{array}\\
&=\operatorname{rg}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3-\lambda\\ 0 & -2\lambda & -1-\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda^2+1\end{bmatrix} \quad L_3\leftarrow L_3+L_2.
\end{aligned}$$

Le coefficient en position $(3,3)$ est $(\lambda-1)(\lambda+1)$. Comme λ est valeur propre si et seulement si

$$\operatorname{rg}(A-\lambda I_3)<3,$$

on peut dire que le spectre est

$$\operatorname{Sp}(A)=\{-1;0;1\}.$$

2. Soit $X=\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
(B-4I_3)X=0_{3,1} &\iff \begin{cases} -x-z=0\\ 2x+2z=0\\ -x-z=0\end{cases}\\
&\iff x=-z\\
&\iff X=\begin{bmatrix} x\\ y\\ -x\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Si on pose

$$X_1=\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X_2=\begin{bmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix},$$

on a

$$\operatorname{Ker}(B-4I_3)=\operatorname{Vect}(X_1,X_2).$$

(X_1,X_2) sont non colinéaires, ils forment une base du noyau de $B-4I_3$. Ce dernier est donc de dimension 2. Ce qui bien en accord avec le programme python.

Soit $X=\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
(B-2I_3)X=0_{3,1} &\iff \begin{cases} x-z=0\\ 2x+2y+2z=0\\ -x+z=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x=y\\ y=-x-z=-2x.\end{cases}\\
&\iff X=\begin{bmatrix} x\\ -2x\\ x\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix} 1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Une base de noyau de $B-2I_3$ est donnée par

$$X_2=\begin{bmatrix} 1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}.$$

3. Pour tout $k\in[\![2;n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\varphi\left(x^k\right)(x) &= \left(x^2+1\right)k(k-1)x^{k-2}+2xkx^{k-1}\\
&=(k(k-1)+2k)x^k+k(k-1)x^{k-2}\\
&=k(k+1)x^k+k(k-1)x^{k-2},
\end{aligned}$$

de plus

$$\varphi(1)(x)=0 \quad \text{et} \quad \varphi(x)(x)=2x.$$

On constate que pour tout $k\in[\![0;n]\!]$

$$\varphi\left(x^k\right)(x)=k(k+1)x^k+k(k-1)x^{k-2}.$$

Ainsi la matrice de φ dans la base canonique est triangulaire supérieure avec une diagonale composée de

$$k(k+1),\quad k\in[\![0;n]\!].$$

Ce sont les valeurs propres de φ.
En particulier, tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.

4. On a

$$\begin{aligned}
&\psi\left(P_{k,\ell}\right)(x)\\
&=(x+1)(x+3)\left(k(x+1)^{k-1}(x+3)^\ell+(x+1)^k\ell(x+3)^{\ell-1}\right)\\
&\qquad -nx(x+1)^k(x+3)^\ell\\
&=(x+1)^k(x+3)^\ell(k(x+3)+\ell(x+1)-nx)\\
&=(x+1)^k(x+3)^\ell(3k+\ell)=(3k+\ell)P_{k,\ell}(x).
\end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$\psi(\mathrm{P}_{k,\ell}) = (2k+n)\mathrm{P}_{k,\ell}.$$

Comme $\mathrm{P}_{k,\ell}$ est différent du polynôme nul, $\lambda_k := 2k+n$ est valeur propre de ψ. Comme

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$$

on dénombre au moins $n+1$ valeurs propres. Comme $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1$, on sait qu'il ne peut y avoir d'autre valeur propre et les espaces propres sont des droites vectorielles :

$$\forall\, k \in [\![0;n]\!], \quad \mathrm{E}_{\lambda_k}(\psi) = \mathrm{Vect}(\mathrm{P}_{k,\ell}).$$

5. • L'intégrale est convergente et l'intégrande est une fonction impaire, donc

$$\mathrm{I} = 0.$$

• On a à l'aide du changement de variable $u = 1/t$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= -\int_0^{+\infty} \frac{-\ln u}{1+\frac{1}{u^2}}\,\frac{-1}{u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= -\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{J} = 0.$

• À l'aide du changement de variable affine $t = au$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln au}{a^2+a^2u^2}\,a\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln a}{a\left(1+u^2\right)}\,\mathrm{d}u + \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{a\left(1+u^2\right)}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi \ln a}{2a}.$$

6. On a :

$$\begin{aligned}&\varphi(1) = 0\\ &\varphi(\mathrm{X}) = 2x\\ &\varphi\left(x^2\right) = 6x^2+2\\ &\varphi\left(x^3\right) = 12x^3+6x.\end{aligned}$$

La matrice de φ dans la base canonique est :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

Le spectre est l'ensemble des coefficients diagonaux puisque la matrice est triangulaire.
On a :

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= 0\\ \varphi(x) &= 2x.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{E}_0 = \mathrm{Vect}(1) \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_2 = \mathrm{Vect}(x).$$

Pour déterminer E_6, on résout l'équation $\mathrm{AY} = 6\mathrm{Y}$ avec $\mathrm{Y} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On trouve

$$\mathrm{Y} \in \mathrm{Vect}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Donc $\mathrm{E}_6 = \mathrm{Vect}\left(3x^2+1\right)$.
De même, on montre que

$$\mathrm{E}_{12} = \mathrm{Vect}\left(5x^3+3x\right).$$