1

ANALYSE

Exercice 1.01.

1. Montrer la convergence des intégrales suivantes et les calculer :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt, \quad I_3 = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

(Pour I_1 et I_3, on pourra utiliser le changement de variable $t = \sin u$.)

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer l'existence des intégrales suivantes :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,\ g(x) = \int_0^1 \frac{-t\sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \text{ et } h(x) = \int_0^1 \frac{-t^2\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Dans toute la suite on admet que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que $f' = g$ et $f'' = h$.

3. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0$.

4. Soit z la fonction définie sur $I = [1, +\infty[$ par $z(x) = f(x)\sqrt{x}$.

a) Montrer que z est de classe $\mathcal{C}^2$ et trouver une fonction q telle que :

$$\forall\, x \in I, z''(x) + q(x)z(x) = 0$$

b) En étudiant la fonction $x \mapsto \varphi(x) = q(x)z^2(x) + (z'(x))^2$, montrer qu'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que : $\forall\, x \in I, |f(x)| \leqslant \dfrac{M}{\sqrt{x}}$.

Solution :

1. Les fonctions à intégrer sont continues sur $[0, 1[$; il y a un problème de convergence des intégrales en 1.
Pour tout $x \in]0, 1[$, on effectue le changement de variable $t = \sin u$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$; on a : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ de même nature et de même valeur en cas de convergence que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos u}{|\cos u|}du$ qui existe et vaut $\frac{\pi}{2}$. Donc $I_1 = \frac{\pi}{2}$.

Pour tout $x \in]-1,1[$, on a : $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \big[-\sqrt{1-t^2}\big]_0^x = 1-\sqrt{1-x^2}$, qui a pour limite 1 quand x tend vers 1 donc $I_2 = 1$.

Par le même argument que pour I_1, I_3 est de même nature (et a même valeur en cas de convergence) que l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 u}{|\cos u|}\cos u\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos(2u))\,du,$$

Cette dernière intégrale est faussement impropre en 1, donc convergente, et :

$$I_3 = \Big[\frac{1}{2}(u - \frac{1}{2}\sin(2u))\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

2. Comme $\dfrac{|\cos(xt)|}{\sqrt{1-t^2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, et que I_1 converge, par théorème de comparaison, on en déduit que l'intégrale qui définit f est absolument convergente, donc convergente. Idem pour g et h avec I_2 et I_3.

3. Soit $a \in]0,1[$. Intégrons par parties sur $[0,a]$, avec $u(t) = \sqrt{1-t^2}$, $u'(t) = \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$, $v(t) = \sin(xt)$, $v'(t) = x\cos(xt)$ (u, v sont de classe $\mathcal{C}^1$) :

$$\int_0^a \frac{-t\sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \big[\sqrt{1-t^2}\sin(xt)\big]_0^a - \int_0^a \sqrt{1-t^2}\times x\cos(xt)\,dt$$

d'où : $\displaystyle\int_0^a \frac{-t\sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sqrt{1-a^2}\sin(xa) - x\int_0^a \frac{(1-t^2)\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$

En faisant tendre a vers 1 on obtient :

$$f'(x) = -x(f(x) + f''(x))$$

4. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I. Ainsi la fonction z est de classe $\mathcal{C}^2$ comme produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. En dérivant deux fois on obtient :

$$z''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}f(x) + x^{-\frac{1}{2}}f'(x) + x^{\frac{1}{2}}f''(x).$$

D'après le résultat de la question 3, on en déduit :

$$z''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}f(x) - x^{\frac{1}{2}}f(x) = -\big(1 + \frac{1}{4x^2}\big)\sqrt{x}f(x),$$

soit $z''(x) + q(x)z(x) = 0$, avec $q(x) = 1 + \dfrac{1}{4x^2}$.

5. On a : $\varphi'(x) = q'(x)z^2(x) + 2z'(x)(q(x)z(x) + z''(x)) = q'(x)z^2(x) \leqslant 0$ donc φ est décroissante sur I.

Donc, pour tout $x \in I$, on a : $q(x)z^2(x) + \underbrace{(z'(x))^2}_{\geq 0} = \varphi(x) \leqslant \varphi(1)$, donc : $q(x)z^2(x) \leqslant \varphi(1)$;

puisque $q(x) \geqslant 1 > 0$ on déduit $z^2(x) \leqslant \varphi(1)$, donc $|z(x)| \leqslant \sqrt{\varphi(1)} = M$ soit z est bornée sur I.

Donc $\forall\, x \in I, |f(x)| \leqslant \dfrac{M}{\sqrt{x}}$

Exercice 1.02.

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$.

1. Montrer que la fonction f est définie sur $]-1, +\infty[$.

2. Vérifier que pour tout $x > -1$, on a : $f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x+1}$.

3. a) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|$$

b) En déduire que f est continue sur son domaine de définition.

4. a) Montrer que l'application f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) En déduire que $f(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{2x}$. Donner de même un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de -1.

Solution :

1. L'application $t \mapsto \dfrac{t^x}{1+t}$ est continue et positive sur $]0, 1]$.

$\dfrac{t^x}{1+t} \underset{(t\to 0)}{\sim} \dfrac{1}{t^{-x}}$, donc par critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$ converge si et seulement si $-x < 1$, *i.e.* $x > -1$.

2. Pour tout $x > -1, f(x) + f(x+1) = \displaystyle\int_0^1 t^x\,dt = \frac{1}{x+1}$ (linéarité pour les intégrales convergentes)

3. a) Soit $g : x \to t^x = \mathrm{e}^{x \ln t}$. L'inégalité des accroissements finis donne :

$$|t^x - t^y| \leqslant \sup_{u\in[x,y]} |(\ln t)\mathrm{e}^{u \ln t}|\times|x - y|$$

Or pour $0 < t1$, on a $\ln t0$ et pour x et y positifs ou nuls $u \ln t0$ sur le segment $[x, y]$, donc $|t^x - t^y| \ln t|\times|x - y|$, et on peut écrire :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y| \int_0^1 \frac{|\ln t|}{1+t}dt = C|x - y|$$

car l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln t|}{1+t}dt$ est convergente.

b) $\to$ Par la question précédente, la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ car lipchitzienne.
$\to$ De plus $x > -1 \implies f(x) = \dfrac{1}{x+1} - f(x+1)$ et $x+10$, donc f est continue sur $]-1, +\infty[$, par composition.

4. a) Soient a et b deux réels tels que $-1 < a < b$. En multipliant par $\ln t$ négatif sur $]0, 1]$ $a \ln t b \ln t$, puis $t^a t^b$, puis $\dfrac{t^a}{1+t}\dfrac{t^b}{1+t}$ et en intégrant $f(a)f(b)$.

La fonction f est décroissante.

b) Par décroissance de f, pour $x > 0$:

$\dfrac{1}{x+1} = f(x) + f(x+1) \leqslant 2f(x)$ et $\dfrac{1}{x} = f(x) + f(x-1) \geqslant 2f(x)$,

donc $\dfrac{x}{x+1} \leqslant 2xf(x) \leqslant 1$, et par encadrement $\lim\limits_{x\to+\infty} 2xf(x) = 1$, d'où $f(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.

Enfin $f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x+1}$ donne $f(x) \underset{(-1^+)}{\sim} \dfrac{1}{x+1}$.

Exercice 1.03.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ diverge. On notera (S_n) la suite des sommes partielles, *i.e.* la suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

1. Exemples.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \dfrac{1}{n}$. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{a_n}{1+na_n}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe un entier } m \text{ tel que } n = 2^m - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Déterminer la nature de $\sum \dfrac{a_n}{1+na_n}$.

2. On suppose dans cette question que la suite (a_n) est à valeurs strictement positives.

Montrer que la série $\sum \dfrac{a_n}{1+n^2a_n}$ converge.

3. a) Montrer que si $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$ converge, alors la suite (a_n) converge vers 0.

b) Montrer que si la suite (a_n) converge vers 0, alors $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$ diverge.

c) En déduire que $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$ diverge.

4. a) Soit (u_n) une suite de réels positifs et (T_n) la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n. Montrer que si la suite (T_n) converge, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, et tout $p \geqslant 0$, $|T_{n+p} - T_n| \leqslant \varepsilon$.

b) Soient $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que $\sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{a_{n+j}}{S_{n+j}} \geqslant 1 - \dfrac{S_n}{S_{n+k}}$.

c) En déduire que la série $\sum \dfrac{a_n}{S_n}$ diverge.

Solution :

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $a_n = \dfrac{1}{n}$, alors $\dfrac{a_n}{1+na_n} = \dfrac{1}{n+n}$ et $\sum \dfrac{a_n}{1+na_n}$ diverge.

b) Pour tout entier naturel n, notons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{1+ka_k}$.

Comme la suite (a_k) est à valeurs positives, alors $(S_n)_n$ est croissante.

De plus, $S_{2^m-1} = \sum_{k=0}^{2^m-1} \frac{a_n}{1+na_n} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{1+(2^k-1)} = \sum_{k=1}^{m} 2^{-k}$..

Ainsi, $\sum \frac{a_n}{1+na_n}$ converge.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $1+n^2a_n \geqslant n^2a_n$ et $a_n > 0$, alors $0 \leqslant \frac{a_n}{1+n^2a_n} \leqslant \frac{1}{n^2}$.

Ainsi, $\sum \frac{a_n}{1+n^2a_n}$ est une série dont le terme général est positif et majoré par le terme d'une série convergente, donc $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ converge.

2. a) Supposons que $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ converge. Alors, $r_n = \frac{a_n}{1+a_n}$ converge vers 0, donc ($r_n \neq 1$) !) $a_n = \frac{r_n}{1-r_n}$ converge également vers 0, soit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Supposons que $(a_n)_n$ converge vers 0. Alors, $\frac{a_n}{1+a_n} \sim a_n$. Or, ces suites sont positives, donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ converge.

c) Finalement, $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ est une série à termes positifs, donc soit elle converge, soit ses sommes partielles tendent vers $+\infty$.

Supposons par l'absurde que $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ converge. D'après les questions précédentes, (a_n) tend vers 0 et la série diverge. On obtient ainsi une contradiction, et $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ diverge.

3. a) Supposons que la suite $(T_n)_n$ converge vers un réel ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la définition de la limite, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|T_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Soient $n \geqslant n_0$ et $p \geqslant 0$. Alors, $n+p \geqslant n_0$ et

$$|T_{n+p} - T_n| \leqslant |T_{n+p} - \ell| + |T_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ainsi,$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant n_0, p \geqslant 0, |T_{n+p} - T_n| \leqslant \varepsilon$.

b) Comme la série $\sum a_n$ est à termes positifs, la suite (S_n) est croissante.

Ainsi,

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{a_{n+j}}{S_{n+j}} \geqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{a_{n+j}}{S_{n+k}} \geqslant \frac{1}{S_{n+k}} \sum_{j=n+1}^{n+k} a_j \geqslant \frac{S_{n+k}-S_n}{S_{n+k}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+k}}.$$

Finalement, $\forall\, (n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\sum_{j=1}^{k} \frac{a_{n+j}}{S_{n+j}} \geqslant 1 - \frac{S_n}{S_{n+k}}$.

c) Pour tout entier naturel n non nul, notons $T_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{S_j}$. D'après la question précédente, pour tout $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$T_{n+k} - T_n = \sum_{j=1}^{n+k} \frac{a_j}{S_j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{S_j} = \sum_{j=1}^{n+k} \frac{a_{n+j}}{S_{n+j}} \geqslant 1 - \frac{S_n}{S_{n+k}}.$$

Or, comme $\sum a_n$ diverge, alors $\lim_{k\to\infty} 1 - \frac{S_n}{S_{n+k}} = 1$..

Ainsi, (T_n) ne satisfait pas le critère de convergence de la question 3. a), et $\sum \frac{a_n}{S_n}$ diverge.

Exercice 1.04.

1. Déterminer les valeurs de x réel pour lesquelles $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$ converge. On note D l'ensemble de ces valeurs.

On pose alors pour tout $x \in D$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$.

2. Montrer que pour tout $x \in D$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ $(\star)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. a) Montrer que $\ln(\Gamma(x))$ existe pour $x \in D$.

b) On admet que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D et que pour tout $x \in D$

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt \quad \text{et} \quad \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$$

i) Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs réelles, telles que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f(t)]^2\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} [g(t)]^2\,dt$ convergent. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f(t) + \lambda g(t)]^2\,dt$ est convergente et que sa valeur, notée $\varphi(\lambda)$, est toujours positive ou nulle.

En déduire une inégalité liant $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f(t)]^2\,dt$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} [g(t)]^2\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,dt$

ii) Montrer que la fonction $\ln\circ\Gamma$ est convexe sur D.

4. a) En utilisant la relation $(\star)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n2$:

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = \Gamma'(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

b) Montrer qu'il existe $a_n \in [n, n+1]$ tel que $\ln n = \dfrac{\Gamma'(a_n)}{\Gamma(a_n)}$.

c) En utilisant la convexité de la fonction $\ln\circ\Gamma$, montrer que $\Gamma'(1) = -\gamma$, où γ est la constante d'Euler définie par $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \big(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n\big)$.

Solution :

1. Ce sont des questions vues en cours. La fonction Γ est définie sur $D = \mathbb{R}^{+*}$

2. Une intégration par parties donne $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et par récurrence $\Gamma(1) = 1$, puis $\Gamma(n) = (n-1)!$

3. $(\ln\circ\Gamma)(x)$ existe pour $x > 0$, car pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) > 0$, puisque $t \to t^{x-1}e^{-t}$ est continue et strictement positive. On admet que l'on peut dériver et

$$\ln(\Gamma)'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \text{ et } \ln(\Gamma)''(x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma''(x) - \Gamma'^2(x)}{\Gamma^2(x)}$$

Cette dernière expression est positive, car le dénominateur l'est, tout comme le numérateur par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

4. On dérive $(\star)$. Il vient : $\Gamma'(x+1) = x\Gamma'(x) + \Gamma(x)$ et donc

$$\Gamma'(2) = \Gamma'(1) + \Gamma(1) \implies \frac{\Gamma'(2)}{\Gamma(2)} = \Gamma'(1) + 1$$

Supposons que $\dfrac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = \Gamma'(1) + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. On a :

$$\Gamma'(n+1) = n\Gamma'(n) + \Gamma(n) \implies \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{n\Gamma'(n)}{n\Gamma(n)} + \frac{1}{n}$$

ce qui termine la récurrence.

5. a) La formule des accroissements finis appliquée à la fonction $\ln\Gamma$ sur l'intervalle $[n, n+1]$ donne l'existence de $a_n \in [n, n+1]$ tel que

$$\ln n = \frac{\ln\Gamma(n+1) - \ln\Gamma(x)}{(n+1) - n} = \frac{\Gamma'(a_n)}{\Gamma(a_n)}$$

b) La croissance de la fonction $\dfrac{\Gamma'}{\Gamma}$ (convexité de $\ln\Gamma$) permet d'écrire

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} \leqslant \frac{\Gamma'(a_n)}{\Gamma(a_n)} = \ln n \leqslant \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}$$

et par la question 4. a) :

$$\Gamma'(1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln n \leqslant \Gamma'(1) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

Il reste à montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} (\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n)$ existe (on la note alors sa limite γ).

Pour cela il suffit de remarquer que $\dfrac{1}{k+1} \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \frac{1}{k}$, ce qui permet de montrer que la suite précédente est monotone et bornée.

Exercice 1.05.

1. Soit f la fonction définie par $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{1-t}$.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ converge.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in]0, 1[$,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k \ln t + \frac{t^{n+1} \ln t}{1-t}$$

c) Montrer que la fonction $g : t \mapsto \dfrac{t \ln t}{1-t}$ définie sur $]0, 1[$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0, 1]$.

d) En déduire une expression de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt$ sous la forme d'une série de Riemann.

2. Pour tout $x \in \,]-\infty, 1]$, on pose : $L(x) = -\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$.

a) Montrer que la fonction L est bien définie sur $]-\infty, 1]$.

b) Exprimer $L(1)$ à l'aide d'un résultat précédent.

3. a) Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $L(x) = -\ln(1-x)\ln(x) + L(1) - L(1-x)$.

b) Déterminer la valeur de $L\Big(\dfrac{1}{2}\Big)$.

4. Montrer que pour tout $x \in \,]0, 1[$, $L(x) + L(-x) = \dfrac{1}{2}L(x^2)$.

Solution :

1. a) La fonction f est définie, continue et négative sur $]0, 1[$. Au voisinage de 0, $f(t) \sim \ln t$ et on sait que $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ converge. Au voisinage de 1, $f(t) \sim -1$: f est ainsi prolongeable par continuité en $t = 1$ et l'intégrale est faussement impropre.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \,]0, 1[$,

$$\sum_{k=0}^{n} t^k \ln t + \frac{t^{n+1}\ln t}{1-t} = \ln(t)\Big(\sum_{k=0}^{n} t^k + \frac{t^{n+1}}{1-t}\Big) = \ln(t)\Big(\frac{1-t^{n+1}}{1-t} + \frac{t^{n+1}}{1-t}\Big) = f(t)$$

c) La fonction g est définie et continue sur $]0, 1[$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = 0$ et, au voisinage de 1, $g(t) \sim -1$: donc g est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$. On confond par la suite g et son prolongement.

d) Par linéarité de l'intégrale et convergence de chacune des intégrales,

$$\int_0^1 f(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 t^k \ln t dt + \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{1-t}dt = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 t^k \ln t dt + \int_0^1 t^n g(t)dt$$

Par intégration par parties (à faire sur $]\varepsilon, 1]$, ...), on trouve $\displaystyle\int_0^1 t^k \ln t dt = \frac{-1}{(k+1)^2}$. De plus, g (ou du moins son prolongement) est continue sur $[0, 1]$ donc bornée (en valeur absolue) par un réel M. D'où,

$$\Big|\int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{1-t}dt\Big| \leqslant M\int_0^1 t^n dt = \frac{M}{n+1}$$

Finalement, en faisant tendre n vers $+\infty$, on trouve

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-1}{(k+1)^2} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \quad (= \frac{-\pi^2}{6})$$

2. a) Posons $\ell : t \mapsto \dfrac{\ln(1-t)}{t}$. La fonction ℓ est définie et continue sur $]-\infty, 0[\, \cup \,]0, 1[$. Au voisinage de 0, $\ell(t) \sim -1$: ainsi, ℓ est prolongeable par continuité en $t = 0$. Au voisinage de 1, $\ell(t) \sim \ln(1-t)$. Or $\displaystyle\int_{1/2}^{1-\varepsilon} \ln(1-t)dt = \int_{\varepsilon}^{1/2} \ln(u)du$ a une limite finie lorsque ε tend vers 0 (voir ci-dessus).

On conclut que la fonction L est bien définie sur $]-\infty, 1]$.
b) Le changement de variable affine $u = 1 - t$ donne :

$$L(1) = -\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt = -\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u} du = -\int_0^1 f(u) du \quad (= \frac{\pi^2}{6})$$

3. a) Soit $x \in]0, 1[$. Le même changement de variable donne $L(x) = \displaystyle\int_1^{1-x} \frac{\ln u}{1-u} du$. Soit α tel que $0 < 1 - x < 1 - \alpha < 1$.
Une intégration par parties donne :

$$\int_{1-\alpha}^{1-x} \frac{\ln u}{1-u} du = \big[-\ln(u)\ln(1-u)\big]_{1-\alpha}^{1-x} - \int_{1-\alpha}^{1-x} \frac{\ln(1-u)}{u} du$$

On fait alors tendre α vers 0 sachant que $\ln(1-\alpha)\ln(\alpha) \sim -\alpha\ln(\alpha) \longrightarrow 0$.
On trouve donc :
$L(x) = -\ln(1-x)\ln(x) - \displaystyle\int_1^{1-x} \frac{\ln(1-u)}{u} du = -\ln(1-x)\ln(x) + L(1) - L(1-x)$

c) En prenant $x = 1/2$ dans la formule précédente, on obtient $L\big(1/2\big) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\ln 2)^2$.

4. Soit $x \in]0, 1[$. On a

$$\begin{aligned} -L(x) - L(-x) &= \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt + \int_0^{-x} \frac{\ln(1-t)}{t} dt \\ &= \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt + \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt \\ &= \int_0^x \frac{\ln(1-t^2)}{t} dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{\ln(1-u)}{u} du = -\frac{L(x^2)}{2} \end{aligned}$$

On a ainsi $L(x) + L(-x) = \dfrac{L(x^2)}{2}$.

Exercice 1.06.

Soit f une fonction définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de classe C^∞ sur $[0, 1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x) dx$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge, puis déterminer sa limite.

2. On suppose que $f(1) \neq 0$. Trouver un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

3. On suppose que $f(1) = 0$. Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

4. Soit h une fonction continue sur $[0, 1]$.

   a) En utilisant la continuité de h au point 1, montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left[n \int_0^1 x^n \big(h(x) - h(1)\big) dx \right] = 0.$$

b) En déduire que la suite $\big(n\displaystyle\int_0^1 x^n h(x)\,dx\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et exprimer sa limite à l'aide de la fonction h.

Solution :

1. La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$, donc bornée et on peut poser $M = \sup\limits_{x\in[\![0,1]\!]} |f(x)| \in \mathbb{R}$.

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant |u_n| = \big|\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx\big| \leqslant \int_0^1 x^n M dx = \frac{M}{n+1}$.

Par encadrement : $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Une intégration par parties donne
$$u_n = \big[\frac{x^{n+1}}{n+1}f(x)\big]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx$$
Comme f' est continue sur $[0,1]$, on pose $N = \sup_{x\in[\![0,1]\!]} |f'(x)| \in \mathbb{R}$. Ainsi
$$\frac{1}{n+1}\big|\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx\big| \leqslant \frac{N}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}dx = \frac{N}{(n+1)(n+2)}$$
On en déduit que $\displaystyle\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx$ est négligeable devant $\displaystyle\frac{f(1)}{n+1}$. Par conséquent $u_n \sim \displaystyle\frac{f(1)}{n}$.
Ainsi, par critère d'équivalence des séries à termes de signe fixe, la série $\sum u_n$ diverge.

3. Si $f(1)=0$, l'intégration précédente montre que $|u_n|$ est majoré par une expression en $1/n^2$.
Ainsi, par critère de majoration des séries à termes positifs, la série $\sum |u_n|$ converge, il en est donc de même de la sŽrie $\sum u_n$.

4. a) Soit $\varepsilon>0$ un réel fixé.

Par continuité de h au point $x=1$, $\exists\,\delta>0, |1-x|<\delta \implies |h(x)-h(1)|<\varepsilon$.

Par la relation de Chasles,
$$n\int_0^1 x^n(h(x)-h(1))dx = n\int_0^{1-\delta} x^n(h(x)-h(1))dx + n\int_{1-\delta}^1 x^n(h(x)-h(1))dx$$
On pose : $I_{1,n} = n\displaystyle\int_0^{1-\delta} x^n(h(x)-h(1))dx ; I_{2,n} = n\int_{1-\delta}^1 x^n(h(x)-h(1))dx$.

- D'une part, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $|I_{2,n}|\leqslant n\varepsilon\displaystyle\int_{1-\delta}^1 x^n dx \leqslant n\varepsilon\int_0^1 x^n dx = \frac{n\varepsilon}{n+1} < \varepsilon$.
- D'autre part, en posant $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |h(x)| \in\mathbb{R}$, on trouve :

$$|I_{1,n}| \leqslant 2Mn\int_0^{1-\delta} x^n dx = \frac{2Mn}{n+1}(1-\delta)^{n+1},$$

quantité qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Il existe donc un rang n_1 tel que pour tout entier $n \geqslant n_1$, on a $|I_{1,n}| < \varepsilon$.

Ainsi, il existe un rang n_1 tel que pour tout entier $n \geqslant n_1$ on a :

$$\left|n\int_0^1 x^n(h(x)-h(1))dx\right| < |I_{1,n}| + |I_{2,n}| < 2\varepsilon.$$

Ceci signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n\int_0^1 x^n(h(x)-h(1))dx\right] = 0.$

b) On déduit de la question précédente que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left[n\int_0^1 x^n h(x)dx\right] &= \lim_{n\to+\infty}\left[n\int_0^1 x^n h(1)dx\right]\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)h(1) = h(1)\end{aligned}$$

On conclut que $\lambda = h(1)$.

Exercice 1.07.

Soit λ un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n(\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^{nx}\,dx$$

1. a) Montrer que $1 - P_n(\lambda) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^{\lambda} x^n \mathrm{e}^{-x}\,dx.$

b) Déterminer une relation entre $P_n(n)$ et I_n.

2. Pour tout $x \in]0,1[$, on pose $\psi(x) = -\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}$.

Montrer que ψ admet un prolongement de classe C^1 sur $[0,1[$, prolongement que l'on note encore ψ.

Montrer que ψ réalise une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle à préciser.

3. Pour $\sigma \in]0,1[$, on pose $\delta = \psi^{-1}\left(\dfrac{1}{2\sigma^2}\right)$.

a) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $\left((1-x)\mathrm{e}^x\right)^n = e^{-nx^2\psi(x)}$.

b) Montrer que : $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_0^{\delta\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

c) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers l'infini.

d) Montrer que $1 - P_n(n)$ est équivalent à $\dfrac{n^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ lorsque n tend vers l'infini.

4. En utilisant le théorème limite central, déterminer un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. a) On prouve la formule par récurrence sur n.

• Pour $n=0$, la formule donne $1-P_0(\lambda)=1-\mathrm{e}^{-\lambda}=\displaystyle\int_0^\lambda \mathrm{e}^{-x}dx$

• Hérédité. Une intégration par parties donne :

$$\frac{1}{(n+1)!}\int_0^\lambda x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}dx=\frac{-\lambda^{n+1}\mathrm{e}^{-\lambda}}{(n+1)!}+\frac{1}{n!}\int_0^\lambda x^n\mathrm{e}^{-x}dx$$
$$=\frac{-\lambda^{n+1}\mathrm{e}^{-\lambda}}{(n+1)!}+1-P_n(\lambda)=1-P_{n+1}(\lambda)$$

On conclut.

b) Les changements de variable successifs $u=1-x$, puis $v=nu$ de classe C^1 donnent

$$I_n=\int_0^1 u^n\mathrm{e}^{n(1-u)}du=\frac{\mathrm{e}^n}{n^{n+1}}\int_0^n v^n\mathrm{e}^{-v}dv$$

Donc : $I_n=\dfrac{e^n}{n^{n+1}}\times n!(1-P_n(n))$, d'après la question 1.

2. On prolonge ψ par continuité en 0 en posant $\psi(0)=1/2$. La fonction ψ est dérivable sur $]0,1[$ avec

$$\psi'(x)=\frac{1}{x^3}\big(x+2\ln(1-x)+\frac{x}{1-x}\big)=\frac{1}{x^3}\times h(x)$$

On a alors $h'(x)=\dfrac{x^2}{(1-x)^2}$ et comme $h(0)=0$, h qui est strictement croissante, est strictement positive sur $]0,1[$. Il en est de même de ψ' et ψ réalisé une bijection strictement croissante de $[0,1[$ sur $[1/2,+\infty[$.

3. a) On commence par remarquer que pour tout $x\in]0,1[$, $((1-x)\mathrm{e}^x)^n=\mathrm{e}^{-nx^2\psi(x)}$.

b) Ainsi $I_n=\displaystyle\int_0^1\mathrm{e}^{-nx^2\psi(x)}dx\leqslant\int_0^1\mathrm{e}^{-nx^2/2}dx=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}}\mathrm{e}^{-u^2/2}du\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Puis $I_n=\displaystyle\int_0^1\mathrm{e}^{-nx^2\psi(x)}dx\geqslant\int_0^\delta\mathrm{e}^{-nx^2\psi(x)}dx\geqslant\int_0^\delta\mathrm{e}^{-nx^2\psi(\delta)}dx.$

Le changement de variable linéaire $x=\sqrt{2n\psi(\delta)}u$ donne :

$$I_n\geqslant\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\int_0^{\delta\sqrt{n}}e^{-x^2/2}dx$$

À δ fixé, lorsque n tend vers $+\infty$, il vient $\sigma\displaystyle\int_0^{\delta\sqrt{n}}\mathrm{e}^{-x^2/2}dx\longrightarrow\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, puis, on fait tendre σ vers 1, ce qui donne $I_n\sim\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

En regroupant les questions, il vient $1-P_n(n)\sim\dfrac{n^n}{n!}e^{-n}\sqrt{\dfrac{\pi n}{2}}$.

4. On sait que $P_n(n)$ représente la probabilité que la variable aléatoire S_n somme de n varaibles aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre 1. Le théorème limite central nous assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(n) = \frac{1}{2}$.

Ainsi, on démontre la formule de Stirling, soit :

$$n! \underset{(\infty)}{\sim} \sqrt{2\pi n}\times n^n \mathrm{e}^{-n}$$

Exercice 1.08.

Partie A

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante convergente de limite ℓ. On pose pour tout entier n non nul :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

1. Prouver que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante majorée, donc convergente.

2. Démontrer que pour tout entier n non nul : $v_{2n} \geqslant \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

3. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ.

Partie B

On admet que, si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le réel ℓ, alors on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j = \ell \qquad (*).$$

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in [0,1[$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2}$.

1. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

2. Pour tout entier naturel n, on pose, $v_n = 1 - u_n$.

a) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{v_{n+1}} - \dfrac{1}{v_n}\right)$.

b) Etudier la convergence de la suite $(nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) En déduire que $u_n = 1 - \dfrac{2}{n} + o(n)$ lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

Partie A

1. Pour tout entier non nul n, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{n(n+1)}\Big(\sum_{k=1}^{n+1} nu_k + nu_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}(n+1)u_k\Big) \\ &= \frac{1}{n(n+1)}\Big(-\sum_{k=1}^{n} u_k + nu_{n+1}\Big) = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}(u_{n+1} - u_k) \end{aligned}$$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$, $u_{n+1} \geqslant u_k$, d'où $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. La suite $(u_n)_n$ est majorée par ℓ. Il en est donc de même de la suite $(v_n)_n$ et cette suite converge de limite ℓ' telle que $\ell'\ell$.

2. Pour tout entier non nul n, on a :

$$2v_{2n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} u_k = v_n + \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \qquad (1)$$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, $\forall\, k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $u_n \leqslant u_k$ d'où $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k \geqslant nu_n$ et de (1) on tire

$$2v_{2n} \geqslant v_n + \frac{nu_n}{n} \implies v_{2n} \geqslant \frac{u_n + v_n}{2}. \qquad (2)$$

3. Le passage à la limite dans (2) donne : $\ell' \geqslant \dfrac{\ell + \ell'}{2}$, soit $\ell'\ell$, d'où $\ell = \ell'$.
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite ℓ.

Partie B

1. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \,]0; 1[$ (récurrence immédiate) et $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)^2}{2} > 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante majorée par 1, donc convergente vers $\ell \in \,]0, 1]$.

• $x \mapsto \dfrac{x^2 + 1}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(x) = x \iff x = 1$ et d'autre part $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f(u_n)$. On a donc $\ell = 1$.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} &= \frac{v_n - v_{n+1}}{v_{n+1}v_n} = \frac{u_{n+1} - u_n}{(1 - u_{n+1})(1 - u_n)} = \frac{(u_n - 1)^2}{2(1 - \frac{u_n^2+1}{2})(1 - u_n)}\\ &= \frac{(u_n - 1)^2}{(1 - u_n^2)(1 - u_n)} = \frac{1}{1 + u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\end{aligned}$$

b) On déduit de ce qui précède : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \big(\dfrac{1}{v_k} - \dfrac{1}{v_{k-1}}\big) = \dfrac{1}{2}$, ce qui donne après réduction : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\big(\dfrac{1}{v_n} - \dfrac{1}{v_0}\big) = \dfrac{1}{2}$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} nv_n = 2$.

c) Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} n(1 - u_n) = 2$, d'où $u_n = 1 - \dfrac{2}{n} + o\big(\dfrac{1}{n}\big)$.

Exercice 1.09.

Dans tout l'exercice, K est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ donnée par :

$$K(x) = P(x)\mathrm{e}^{-x/2},$$

où P est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

L'objet de l'exercice est la recherche de fonctions continues f de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel positif x :

$$f(x) = K(x) + \int_0^{+\infty} K(x + t)f(t)\, dt \qquad (1)$$

1. On considère pour tout entier naturel n l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$.
Démontrer que cette intégrale converge et préciser sa valeur J_n en fonction de n.

2. Dans cette question, on suppose que P est la fonction polynôme constante égale à 1.

a) Soit f une solution de (1). Montrer qu'il existe un réel C tel que $f = CK$.

b) On considère réciproquement une fonction $f = CK$, où C est un nombre réel donné. À quelle condition sur C cette fonction est-elle solution de (1) ? En déduire que (1) n'a pas de solution.

3. Dans cette question, on désigne par λ un nombre réel et l'on suppose que P est la fonction polynôme $P : x \mapsto \lambda + x$.

a) Soit E l'espace vectoriel engendré par les 2 applications de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$:

$$\Phi_0 : x \mapsto e^{-x/2}; \qquad \Phi_1 : x \mapsto x\, e^{-x/2}$$

i) Montrer que (Φ_0, Φ_1) est une base de E.

ii) Soit Φ un élément de E et Ψ la fonction définie pour $x \geqslant 0$ par :

$$\Psi(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t)\Phi(t)\, dt$$

Prouver que Ψ est ainsi bien définie et montrer que Ψ est un élément de E.

iii) Montrer que l'application $u \ : \Phi \in E \mapsto u(\Phi) = \Psi \in E$ est un endomorphisme de E. Déterminer la matrice M de u dans la base (Φ_0, Φ_1). L'endomorphisme u est-il un automorphisme de E ?

b) Soit f une solution de (1). Montrer qu'elle appartient à E.

c) On considère réciproquement une fonction $f = \alpha_0\Phi_0 + \alpha_1\Phi_1$ de E, où α_0 et α_1 sont des nombres réels.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur (α_0, α_1) pour que cette fonction f soit solution de (1). À quelle condition (1) admet-elle une seule solution ?

Solution :

1. On reconnaît dans l'intégrale demandée $\Gamma(n+1) = n!$.

2. a) Soit f une solution de (1). La convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t/2} f(t)dt$ est acquise et un calcul immédiat donne pour tout $x \geqslant 0$ $f(x) = e^{-x/2}\big(1 + \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t/2}dt\big) = CK$, avec $C = 1 + \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t/2}dt$.

b) Réciproquement, soit $C \in \mathbb{R}$ et $f = CK$; la fonction f est solution de (1) si et seulement si pour tout$x \geqslant 0$: $Ce^{-x/2} = e^{-x/2} + \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(x+t)/2} C e^{-t/2}dt$.

Soit après simplification : $C = 1 + C\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1 + C$. Il n'y a donc pas de solution.

3. a) i) Les deux fonctions Φ_0 et Φ_1 ne peuvent être liées vu leur allure au voisinage de $+\infty$ par exemple. Ainsi (Φ_0, Φ_1) est une famille libre de E et génératrice de E par définition : c'est une base de E.

ii) Posons, pour tout réel x positif

$$\Psi_0(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t)\Phi_0(t)dt \text{ et } \Psi_1(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t)\Phi_1(t)dt$$

Un calcul élémentaire donne :

$\Psi_0(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\lambda + x + t)\mathrm{e}^{-\frac{x+t}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}dt = (\lambda+1)\Phi_0(x) + \Phi_1(x)$.

De même : $\Psi_1(x) = (\lambda+2)\Phi_0(x) + \Phi_1(x)$.

Enfin, pour toute fonction Φ un élément de E, il existe un couple unique (α_0, α_1) tel que $\Phi = \alpha_0\Phi_0 + \alpha_1\Phi_1$. Par linéarité de l'intégration, $\Psi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} K(x+t)\Phi(t)dt$ est convergente pour tout réel positif x et $\Psi = \alpha_0\Psi_0 + \alpha_1\Psi_1 \in E$.

iii) D'après ce qui précède l'application $u\ : \Phi \in E \mapsto u(\Phi) = \Psi \in E$ est un endomorphisme de E, dont la matrice dans la base (Φ_0, Φ_1) est : $M = \begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda+2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi u est un automorphisme car M est clairement inversible.

b) Soit f une solution de (1), l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\lambda a + x + t)\mathrm{e}^{-\frac{x+t}{2}} f(t)dt$ est donc convergente pour tout x positif et on a $f(x) = (\lambda + x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \displaystyle\int_0^{+\infty} (\lambda + x + t)\mathrm{e}^{-\frac{x+t}{2}} f(t)dt$.

D'où $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\Big(\lambda + \displaystyle\int_0^{+\infty} (\lambda+t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} f(t)dt + x\Big[1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} f(t)dt\Big]\Big)$.

Que l'on écrit : $f(x) = \alpha\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \beta x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \alpha\Phi_0(x) + \beta a\Phi_1(x)$, avec α et β bien choisis, donc $f \in E$.

c) Soit $f = \alpha_0\Phi_0 + \alpha_1\Phi_1$ un élément de E. f est une solution de (1) si et seulement si :

$$f(x) = (\lambda + x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \alpha_0\Psi_0(x) + \alpha_1\Psi_1(x) \quad (*)$$

$$(*) \iff \alpha_0\Phi_0 + \alpha_1\Phi_1 = \lambda\Phi_0 + \Phi_1 + \alpha_0\big((\lambda+1)\Phi_0 + \Phi_1\big) + \alpha_1\big((\lambda+2)\Phi_0 + \Phi_1\big)$$

Comme (Φ_0, Φ_1) est une base de E, on déduit par identification des coefficients que f est une solution de (1) si et seulement si : $\begin{cases} ((\lambda+1)-1)\alpha_0 & + & (\lambda+2)\alpha_1 & = & -\lambda \\ \alpha_0 & + & & = & -1 \end{cases}$

f est définie de façon unique si et seulement si ce système admet une solution unique, c'est-à-dire si la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda+2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

On conclut que (1) admet une seule solution si et seulement si $\lambda \neq -2$.

Exercice 1.10.

Dans tout l'exercice, a est un réel fixé supérieur ou égal à 1. On note, sous réserve d'existence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} t^n \, dt \text{ et } I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\, \frac{\sin t}{t} dt$$

1. a) Prouver que pour tout entier n, l'intégrale définissant I_n converge.

b) Établir, pour tout $n \geqslant 1$, une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}. En déduire I_n en fonction de n et de a.

2. Démontrer que l'intégrale définissant I est absolument convergente.

3. a) Soit x un réel positif. Montrer que pour tout entier naturel n

$$\left|\sin x \;-\; \left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

b) En déduire qu'il existe un réel K_n dépendant de n tel que :

$$\left|I - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{I_{2k}}{(2k+1)!}\right| \leqslant K_n I_{2n+1}$$

c) En déduire que la série $\sum\limits_{k \geq 0} (-1)^k \dfrac{1}{(2k+1)a^{2k+1}}$ est convergente de somme I.

4. a) Prouver que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $t \in [0,1]$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

b) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in [0,1], \left|\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{2n+3}$.

c) En déduire une expression de I en fonction de a.

Solution :

1. a) Pour tout entier naturel n, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}t^n$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, négligeable au voisinage de $+\infty$ devant t^{-1525}, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}t^n dt$ converge.

b) En intégrant par parties, d'abord sur un segment, puis en passant à la limite , on obtient $I_n = \dfrac{n}{a} I_{n-1}$.

Par récurrence, il vient pour tout entier naturel n, $I_n = \dfrac{n!}{a^{n+1}}$.

2. a) On a $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$, ce qui règle le problème en 0 et $\mathrm{e}^{-at} \dfrac{|\sin t|}{t}$ est négligeable devant t^{-1515} au voisinage de $+\infty$, ce qui prouve la convergence absolue de l'intégrale définissant I.

3. a) Le résultat demandé est banal par toute formule de Taylor.

b) Donc pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|\dfrac{\sin t}{t} - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k}\right| \leqslant \dfrac{t^{2n+1}}{(2n+2)!}$.

En multipliant par $\mathrm{e}^{-at} > 0$ et en intégrant (toutes les intégrales convergent) :

$\left|I - \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k \dfrac{I_{2k}}{(2k+1)!}\right| \leqslant \dfrac{1}{(2n+2)!} I_{2n+1}$ et on peut prendre $K_n = \dfrac{1}{(2n+2)!}$.

c) On a : $\dfrac{1}{(2n+2)!} I_{2n+1} = \dfrac{1}{(2n+2)a^{2n+2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

En passant à la limite dans l'expression précédente, il vient :

$$I = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{I_{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)a^{2k+1}}$$

4. a) Il s'agit simplement de l'identité géométrique.

b) En intégrant sur le segment $[0, x]$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

Or : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leqslant \int_0^x t^{2n+2} dt \leqslant \int_0^1 t^{2n+2} dt = \frac{1}{2n+3}$.

D'où le résultat demandé.

c) Par passage à la limite (légitime) : pour tout $x \in [0, 1]$: $\arctan x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$

Donc $I = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(1/a)^{2k+1}}{(2k+1)} = \arctan\left(\frac{1}{a}\right)$.

On peut aussi écrire : $I = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(a)$.

Exercice 1.11.

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers $a \in \mathbb{R}$.

a) Justifier que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{a_n}{n!} x^n$ converge pour tout réel x. On note alors sa somme $\varphi(x)$.

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[e^{-x} \varphi(x) - a\right] = 0$.

(On pourra écrire e^x sous la forme d'une série et «couper la somme en deux».)

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge. On note :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \text{ et } U = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

a) Justifier que les séries $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{u_n}{n!} x^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{U_n}{n!} x^n$ convergent pour tout x réel. On note leurs sommes respectives :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n \text{ et } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{U_n}{n!} x^n.$$

On admet que f et g sont dérivables et qu'on peut dériver terme à terme les séries ci-dessus pour tout x réel.

b) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, g'(x) = f'(x) + g(x)$.

c) En déduire que $\forall\, x \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt = \mathrm{e}^{-x}\,[g(x) - f(x)]$.

d) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$.

3. Dans cette question, on prend : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$.
Calculer $f(x)$ et $g(x)$ et déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,[g(x) - f(x)]$.

Que dire de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$?

Solution :

1. a) On écrit $\dfrac{a_n}{n!}\,x^n = O\Big(\dfrac{|x|^n}{n!}\Big)$ qui est le terme général d'une série exponentielle convergente.
b) On a $\forall\varepsilon > 0\,, \exists N \in \mathbb{N}\,, \forall n \geq N\,,\ |a_n - a| < \varepsilon$
d'où, pour $x > 0$,

$$|\mathrm{e}^{-x}\,\varphi(x) - a| \leqslant \mathrm{e}^{-x}\sum_{k=0}^{N}|a_k - a|\frac{x^k}{k!} + \mathrm{e}^{-x}\,\varepsilon\sum_{k=N+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!} \leqslant \mathrm{e}^{-x}\sum_{k=0}^{N}|a_k - a|\frac{x^k}{k!} + \varepsilon$$
$$\leqslant 2\varepsilon$$

pour tout x assez grand par croissances comparées.

2. a) On utilise la question 1.a, puisque $u_n \to 0$ et $U_n \to U$.

b) Par dérivation terme à terme et séparation en deux séries convergentes on a, pour tout x,

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\big[u_n + U_{n-1}\big]\,\frac{n\,x^{n-1}}{n!} = f'(x) + g(x)$$

c) Immédiat par dérivation et égalité en $t = 0$ car $g(0) = U_0 = u_0 = f(0)$.
On peut également multiplier par e^{-x}, puis utiliser une intégration.
d) D'après la question 1. b

$$\int_0^{+\infty}\Big[f(t)\,\mathrm{e}^{-t}\Big]dt = \lim_{x\to+\infty}\big[\mathrm{e}^{-x}\,\big[g(x) - f(x)\big]\big] = \lim_{n\to+\infty} U_n - \lim_{n\to+\infty} u_n = U$$

3. On remarque que les résultats précédents ne s'appliquent pas car la série $\sum u_n$ diverge.
Cependant,

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \mathrm{e}^{-x} \text{ et } g(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} U_{2p}\,\frac{x^{2p}}{(2p)!} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{2p}}{(2p)!} = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

(partie paire de la fonction exponentielle), puis

$$\mathrm{e}^{-x}\,\big[g(x) - f(x)\big] = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{2} \to \frac{1}{2}$$

et

$$\int_0^{+\infty}\Big[f(t)\,\mathrm{e}^{-t}\Big]dt = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2t}dt = \frac{1}{2}$$

Exercice 1.12.

Soit α un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$$

0. Justifier la convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^{\alpha+1}}$. On notera $f(\alpha) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}}$

1. Montrer que pour tout réel x, la série de terme général $u_n(x)$ est convergente. On note alors :

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

2. a) Montrer que la fonction S est impaire.

b) Pour n entier supérieur ou égal à 1, étudier les variations de u_n sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire les variations de S sur $[1, +\infty[$ puis sur $]-\infty, -1]$

3. a) Montrer que pour $x \geqslant 1$, et $n \geqslant 1$:

$$\frac{x}{(1+x)^2} f(\alpha) \leqslant S(x) \leqslant \frac{1}{x} f(\alpha)$$

(On pourra utiliser l'encadrement : $nx^2 < 1 + nx^2 < n(1+x)^2$.)

b) En déduire un équivalent de $S(x)$ et sa limite en $+\infty$.

4. On suppose $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

a) En minorant pour $x \geqslant 0$, après justification, la somme $S(x)$ par $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k(x)$, montrer que :

$$S\Big(\frac{1}{\sqrt{2n}}\Big) \geqslant \frac{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}{2^{\alpha+\frac{3}{2}}}$$

b) En déduire que S n'est pas continue en 0.

c) Déterminer la limite de S en 0.

Solution :

0. Si $x \neq 0$, $u_n(x) \sim \frac{1}{n^{\alpha+1}x}$ et il suffit d'appliquer le critère de Riemann, puisque $\alpha + 1 > 1$. Si $x = 0$, le résultat demandé est banal.

1. Pour $x = 0$, le terme général $u_n(0) = 0$ et la série converge vers 0. Pour $x > 0$, $u_n(x) \sim \frac{1}{x}\frac{1}{n^{\alpha+1}}$

Ce dernier est le terme général d'une série de Riemann convergente, car $\alpha+1 > 1$. Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $u_n(x)$ est convergente pour $x > 0$.

On remarque que les fonctions u_n sont impaires, il suffit de tout multiplier par -1 et ainsi on a aussi la convergence pour $x < 0$.

On a établi ainsi la convergence pour tout x réel de la série de terme général
$$u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)} \text{ pour } n > 0$$

2. a) Les fonctions u_n étant impaires, les sommes partielles le sont aussi et en passant à la limite, S est aussi impaire.

b) La fonction u_n est de type fraction rationnelle à dénominateur strictement positif pour $x \in \mathbb{R}$.

Cette fonction est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$u_n'(x) = \frac{1}{n^\alpha}\frac{(1+nx^2) - x(2nx)}{(1+nx^2)^2} = \frac{(1-nx^2)}{n^\alpha(1+nx^2)^2}$$

Ainsi, u_n est strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, et strictement décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et $\left[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$, car
$$u_n'(x) > 0 \iff -\frac{1}{\sqrt{n}} < x < \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ et } u_n'(x) < 0 \iff x > \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ ou } x < -\frac{1}{\sqrt{n}}$$

c) Comme $\left[-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \subset [-1,1]$, u_n est strictement décroissante sur $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$

Par somme finie, les S_n sont aussi décroissantes sur $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$

d) Les sommes partielles S_n sont strictement décroissantes sur $[1,+\infty[$. En passant à la limite, lorsque n tend vers l'infini, il vient :

$\forall x, y, 1 \leqslant x \leqslant y \implies S(x) \leqslant S(y)$. La fonction S est aussi décroissante sur $[1,+\infty[$. Par symétrie, S étant impaire, elle est aussi décroissante sur $]-\infty,-1]$.

3. a) Pour $x \geqslant 1$, et $n \geqslant 1$, en utilisant la majoration $1 + nx^2 \leqslant n(1+x)^2$ équivalente à $1 + nx^2 \leqslant n + 2nx + nx^2$ ou encore à $1 \leqslant n + 2nx$ qui est vraie,

on obtient finalement :
$$\forall n > 0,\ \forall x \geqslant 1,\ \frac{x}{(1+x)^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}} \leqslant S(x) \leqslant \frac{x}{x^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}$$
$$\frac{x}{(1+x)^2}f(\alpha+1) \leqslant S(x) \leqslant \frac{1}{x}f(\alpha+1)$$

b) Ainsi, $\frac{x^2}{(1+x)^2} \leqslant \frac{S(x)}{\frac{1}{x}f(\alpha+1)} \leqslant 1$. Comme $\frac{x^2}{(1+x)^2}$ tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$, on a par le théorème d'encadrement que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}f(\alpha+1) = \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha+1}}$

Et la limite de $S(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est 0.

c) Par imparité, on obtient le même résultat en $-\infty$

4. a) Pour $x \geqslant 0$, la série étant à termes positifs, et $\alpha > 0$, on minore sa somme par la somme des termes d'indices compris entre $n+1$ et $2n$, et le terme général dans cette somme par $\frac{x}{(2n)^\alpha(1+2nx^2)}$. On obtient :

$$S(\frac{1}{\sqrt{2n}}) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n}}}{(2n)^\alpha(1+2n\frac{1}{2n})} \geqslant \frac{n}{2^{\alpha+\frac{3}{2}} \times n^{\alpha+\frac{1}{2}}} = \frac{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}{2^{\alpha+\frac{3}{2}}}$$

b) Le minorant obtenu tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Si S était continue en 0^+, la limite de la suite $S(\frac{1}{\sqrt{2n}})$ devrait être $S(0) = 0$, or par minoration cette limite est $+\infty$ Donc on a bien prouvé que S n'est pas continue en 0^+.

c) D'après la question précédente, la seule limite possible pour $S(x)$ en 0^+ est $+\infty$.

Par imparité, on obtient comme seule limite possible pour $S(x)$ en 0^- la limite $-\infty$.

Exercice 1.13.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout x réel :

$$g_n(x) = x(1+x)\big(1+\frac{x}{2}\big)\dots\big(1+\frac{x}{n}\big)n^{-x}$$

et

$$\forall\, n \geqslant 2, \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, \dots, -(n-1)\}, f_n(x) = \frac{g_n(x)}{g_{n-1}(x)}$$

1. Soit $x \in E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$.

a) Montrer que la série de terme général $v_n(x) = x \ln\big(1-\frac{1}{n}\big) + \ln\big(1+\frac{x}{n}\big)$ est convergente. On note $L(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} v_n(x)$.

b) En déduire que la suite $(\ln(p_N(x))_N$ définie par $p_N(x) = \prod\limits_{n=2}^{N} f_n(x)$ converge et préciser sa limite en fonction de $L(x)$.

c) Déterminer la limite de la suite $N \mapsto w_N(x) = \prod\limits_{n=2}^{N} \dfrac{g_n(x)}{g_{n-1}(x)}$, en fonction de $L(x)$.

d) En déduire que $\forall\, x \in E, \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g_1(x)\mathrm{e}^{L(x)}$.

Dans la suite, nous noterons pour tout x de E : $g(x) = g_1(x)\mathrm{e}^{L(x)}$.

2. Montrer que $\forall\, x \in E, g(x) = xg(x+1)$.

On pose $\forall x \in E, \Gamma(x) = \dfrac{1}{g(x)}$.

3. Justifier que la fonction Γ est bien définie sur E.

4. a) Montrer que : $\forall\, x \in E, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

b) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$.

Solution :

1. a) La série de terme général $v_n(x) = x \ln\big(1-\dfrac{1}{n}\big) + \ln\big(1+\dfrac{x}{n}\big)$ est convergente. En effet, un développement limité à l'ordre 2 donne :

$$v_n(x) = x\big(\frac{-1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big)\big) + \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o\big(\frac{x^2}{n^2}\big) \sim -\frac{x^2+x}{2n^2}$$

(car $x(x+1)$ est non nul par hypothèse). On conclut grâce au critère de comparaison avec une série de Riemann,

On a bien la convergence simple (à x fixé dans E) de la série de terme général $v_n(x)$ sur E.

On note $L(x)$ la somme de cette série : $L(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} v_n(x)$

b) On a :

$$\ln(p_N(x)) = \sum_{n=2}^{N} \ln(f_n(x)) = \sum_{n=2}^{N} \Big(x \ln\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) + \ln\Big(1 + \frac{x}{n}\Big)\Big) = \sum_{n=2}^{N} v_n(x).$$

En effet, On a :

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in \mathbb{R}, g_n(x) &= x(1+x)\big(1+\frac{x}{2}\big)\dots\big(1+\frac{x}{n}\big)n^{-x} \\ &= \frac{x(x+1)\dots(x+n)}{n!}n^{-x} \end{aligned}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, \dots -(n-1)\}, \quad f_n(x) = \frac{g_n(x)}{g_{n-1}(x)} = \big(1+\frac{x}{n}\big)\big(1-\frac{1}{n}\big)^x$$

c) Par continuité de l'exponentielle, on a donc :

$$\forall\, x \in E, \lim_{N\to+\infty} \ln\big(\prod_{n=2}^{N} f_n(x)\big) = L(x), \text{ d'où :}$$

$$\lim_{N\to+\infty} w_N = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=2}^{N} \frac{g_n(x)}{g_{n-1}(x)} = \mathrm{e}^{L(x)}$$

d) On en déduit que $\forall\, x \in E, g_n(x) = g_1(x)f_2(x)\dots f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g_1(x)\mathrm{e}^{L(x)}$.

Dans la suite, nous noterons pour x dans E, $g(x) = g_1(x)\mathrm{e}^{L(x)}$

2. On remarque que pour x non entier négatif :

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{g(x+1)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{g_n(x)}{g_n(x+1)} = \frac{x(x+1)\dots(x+n)}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)}\frac{n^{-x}}{n^{-x-1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n+x+1} = x \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que $\forall\, x \in E, g(x) = xg(x+1), \quad \forall\, x \in -\mathbb{N}, \quad g(x) = 0.$

En effet, dans le cas où $x = -p$ avec $p \in \mathbb{N}$, on a pour tout $n \geqslant p$, $g_n(x) = 0$

3. La fonction Γ est bien définie sur E, car $g(x) = x(x+1)\mathrm{e}^{L(x)}$ sur E et n'est pas nulle sur E, tandis que g s'annule sur les opposés des entiers, d'après ce qu'on vient de voir :

$$\forall\, x \in E, \Gamma(x) = \frac{1}{g(x)}$$

4. a) On a $\forall\, x \in E, \Gamma(x+1) = \dfrac{1}{g(x+1)} = \dfrac{x}{g(x)} = x\Gamma(x)$. Soit :

$\forall x \in E, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$

b) $\Gamma(1) = \dfrac{1}{g(1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{g_n(1)} = 1$

En effet, $g_n(1) = \dfrac{(n+1)!}{n!} n^{-1} = \dfrac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Par récurrence, on en déduit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

Exercice 1.14.

Pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on note $(\Delta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\Delta^2 u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \Delta u_n = u_n - u_{n+1}, \Delta^2 u_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n.$$

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *convexe* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^2 u_n \geqslant 0$.

1. a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^2 u_n$ en fonction de Δu_n et de Δu_{n+1}.

b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur la suite réelle $(\Delta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convexe.

On suppose pour toute la suite de l'exercice que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convexe et bornée.

2. a) Démontrer que la suite réelle $(\Delta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Déterminer sa limite (on pourra raisonner par l'absurde).

b) Démontrer que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On notera ℓ sa limite, que l'on ne cherchera pas à determiner.

c) Soit n et p deux entiers naturels tels que $n \geqslant 2p$. Démontrer que l'on a : $0 \leqslant n\Delta u_n \leqslant 2(u_p - u_n)$.

En déduire les limites des suites $(n\Delta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n\Delta u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k\Delta^2 u_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta u_k - n\Delta u_{n+1}$.

e) En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\Delta^2 u_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \Delta u_k$.

Solution :

1. a) D'après la définition de $\Delta^2 u_n$ et de Δu_n, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\Delta^2 u_n &= u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = (u_{n+2} - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n)\\ &= \Delta u_n - \Delta u_{n+1}\end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^2 u_n = \Delta u_n - \Delta u_{n+1}$.

b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convexe si et seulement si $\Delta^2 u_n \geqslant 0$, par définition. Or on a vu, en *a.*, que $\Delta^2 u_n = \Delta u_n - \Delta u_{n+1}$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convexe si et seulement si la suite $(\Delta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2. Dans tout le reste de l'exercice, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est supposée convexe et bornée.

a) On sait que $(\Delta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convexe. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par inégalité triangulaire,

$$|\Delta u_n| \leqslant |u_n - u_{n+1}| \leqslant |u_n| + |u_{n+1}| \leqslant 2M.$$

La suite $(\Delta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée et monotone. On a ainsi, montré que $(\Delta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite.

Montrons par l'absurde que $\ell = 0$. On suppose tout d'abord que $\ell > 0$. Il existe alors N_0 tel que $\Delta u_n \geqslant \dfrac{\ell}{2}$ pour tout $n \geqslant N_0$.

Ainsi, pour tout $n \geqslant N_0$, $u_{N_0} - u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=N_0}^{n} \Delta u_k \geqslant \dfrac{\ell(n-N_0+1)}{2}$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$, ce qui est absurde puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On aboutirait de même à $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$, en supposant $\ell < 0$. Donc on a montré par l'absurde que la limite de $(\Delta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle.

b) Comme la suite $(\Delta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît vers 0, elle est positive. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et bornée. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

c) Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geqslant 2p$. En utilisant la décroissance de $(\Delta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient,

$$u_p - u_n = \sum_{k=p}^{n-1}(u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=p}^{n-1} \Delta u_k \geqslant (n-p)\Delta u_n$$

Comme $n - p \geqslant \dfrac{n}{2}$, on en déduit que $0 \leqslant n\Delta u_n \leqslant 2(u_p - u_n)$.

En particulier, pour $p = \lfloor n/2 \rfloor$, $0 \leqslant n\Delta u_n \leqslant 2\left(u_{\lfloor n/2\rfloor} - u_n\right)$.

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \lfloor n/2 \rfloor = \infty$, on en déduit que $(u_{\lfloor n/2\rfloor})_{n\in\mathbb{N}}$ est de même limite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par composition des limites. Ainsi, par encadrement $\lim\limits_{n\to\infty} n\Delta u_n = 0$.

Comme $n\Delta u_{n+1} = (n+1)\Delta u_{n+1} - \Delta u_{n+1}$, on obtient $\lim_{n\to\infty} n\Delta u_{n+1} = 0$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\Delta^2 u_k &= \sum_{k=1}^{n} k(\Delta u_k - \Delta u_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} k\Delta u_k - \sum_{k=1}^{n} k\Delta u_{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\Delta u_k - \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)\Delta u_k = \Delta_1 + \sum_{k=2}^{n} \Delta u_k - n\Delta u_{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Delta u_k - n\Delta u_{n+1}
\end{aligned}$$

e) De la relation : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Delta u_k = u_1 - u_{n+1}$, et de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que les deux sommes infinies de l'énoncé existent et sont égales :

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\Delta^2 u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta u_k.$$

Exercice 1.15.

Soit λ un réel fixé *strictement négatif.*

On note E l'ensemble des fonctions de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation $f''+\lambda f=0$.

On note φ l'application de E dans $\mathbb{R}^2$ qui à toute fonction $f\in E$ associe $(f(0),f'(0))$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrer que l'application φ est linéaire.

2. On note f_λ et g_λ les deux applications définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_\lambda(x)=\mathrm{e}^{x\sqrt{-\lambda}},g_\lambda(x)=\mathrm{e}^{-x\sqrt{-\lambda}}$$

a) Montrer que (f_λ,g_λ) est une famille libre de E.

b) Soit f un élément de E non nul et non multiple de f_λ. Soit

$$h:x\to f'(x)f_\lambda(x)-f(x)f'_\lambda(x)$$

Montrer que h est constante. En déduire que φ est injective, puis donner la dimension de E.

3. On se propose dans cette question de déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout x réel :

$$1+f(x)=\int_0^x (x-t)f(t)\,dt \qquad (\star)$$

a) Soit f une solution de l'équation précédente. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire toutes les solutions de l'équation $(\star)$.

Solution :

1.Il suffit de revenir aux définitions d'espace vectoriel et de linéarité.

2. a) On vérifie facilement que f_λ et g_λ sont deux éléments de E.

Supposons que pour tout réel x, $af_\lambda(x)+bg_\lambda(x)=0$. En évaluant en 0, il vient $a+b=0$.

En dérivant puis en évaluant en 0, il vient $a-b=0$; ceci entraîne que $a=b=0$, donc que la famille (f_λ,g_λ) est libre.

Ainsi $\dim E\geqslant 2$.

b) La fonction h est de classe C^1. En dérivant, il vient

$$h'=f''f_\lambda-ff''_\lambda=-\lambda ff_\lambda+\lambda ff_\lambda=0$$

Ainsi la fonction h est-elle constante sur $\mathbb{R}$, soit pour tout x réel :

$$f'(x)f_\lambda(x)-f(x)f'_\lambda(x)=K$$

Si $f\in\operatorname{Ker}\varphi$, alors $f(0)=f'(0)=0$ et en remplaçant dans l'équation précédente, on obtient $K=0$. Donc

$$0=f'(x)f_\lambda(x)-f(x)f'_\lambda(x)=\mathrm{e}^{x\sqrt{-\lambda}}(f'(x)-\sqrt{-\lambda}f(x))\Rightarrow f'(x)-\sqrt{-\lambda}f(x)=0$$

Ainsi

$0=(f'(x)-\sqrt{-\lambda}f(x))\mathrm{e}^{-x\sqrt{-\lambda}}\Rightarrow(f(x)\mathrm{e}^{-x\sqrt{-\lambda}})'=0\Rightarrow f(x)\mathrm{e}^{-x\sqrt{-\lambda}}=C$ et

$$f(x) = Ce^{x\sqrt{-\lambda}} = Cf_\lambda(x)$$

Ceci est en contradiction avec l'énoncé, donc $C = 0$, et $f = 0$ ce qui montre que φ est injective.

Ainsi $\dim E = \dim \operatorname{Im} \varphi \leqslant 2$.

Finalement E est de dimension 2.

3. a) L'équation $(\star)$ se réécrit

$$f(x) = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt - 1$$

Ceci montre que f est de classe C^1. En dérivant, il vient $f'(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$, ce qui montre que f est de classe C^2, puis $f''(x) = f(x)$.
On est ainsi ramené à la question précédente avec $\lambda = -1$.

Ainsi si f est solution, il existe a et b tels que : $f(x) = ae^x + be^{-x}$.

Il reste à regarder la réciproque. En réintroduisant f dans l'équation $(\star)$, on obtient

$$1 + ae^x + be^{-x} = -x(a-b) + ae^x + be^{-x} - (a+b)$$

Ainsi f est solution si et seulement si $\begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = -1 \end{cases}$, soit $a = b = -1/2$.

Exercice 1.16.

Pour tout entier naturel n et tout réel x, on pose :

$$h_n(x) = x^n e^{-x} \text{ et } L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x).$$

1. Calculer explicitement $L_0(x)$, $L_1(x)$ et $L_2(x)$ pour tout réel x.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, L_n est une fonction polynomiale.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $h_n^{(n)}(x)$ et $h_n^{(n+1)}(x)$ en fonction de $L_n(x)$, $L'_n(x)$ et e^{-x}.
   b) En partant d'une relation entre h_n et h_{n+1}, établir que :
   $$\forall\, x \in \mathbb{R}, L_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1}L'_n(x) + \big(1 - \frac{x}{n+1}\big)L_n(x)$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $L'_{n+1} = L'_n - L_n$ en partant de la relation $\big(h_{n+1}^{(n+1)}\big)' = (h'_{n+1})^{(n+1)}$.

5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et x réel. Établir que $xL''_n(x) + (1-x)L'_n(x) + nL_n(x) = 0$.

6. Démontrer que :
$$\forall\, (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}, (n+1)L_{n+1}(x) + (x - 2n - 1)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$$

Solution :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On clairement $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1 - x$, $L_2(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 1$.

2. La fonction h_n est de classe C^∞ en tant que produit de fonctions de classe C^∞, et, par la formule de Leibniz, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$h_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}(-1)^{n-k} e^{-x}$$

Ainsi $L_n(x) = \dfrac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}(-1)^{n-k}$ et L_n est polynomiale.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $h_n^{(n)}(x) = n! e^{-x} L_n(x)$ et $h_n^{(n+1)}(x) = n! e^{-x}(L_n'(x) - L_n(x))$.

b) Pour tout réel x, $h_{n+1}(x) = x h_n(x)$.

En appliquant la formule de Leibniz à ce produit de fonctions de classe C^∞, on obtient

$$\begin{aligned} h_{n+1}^{(n+1)}(x) &= \binom{n+1}{0} x h_n^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{1} h_n^{(n)}(x) \\ &= x h_n^{(n+1)}(x) + (n+1) h_n^{(n)}(x) \\ &= n! e^{-x}(x L_n'(x) - x L_n(x) + (n+1) L_n(x)) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} L_{n+1}(x) &= \frac{e^x h_{n+1}^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} = \frac{x L_n'(x) - x L_n(x) + (n+1) L_n(x)}{n+1} \\ &= \frac{x L_n'(x)}{n+1} + \left(1 - \frac{x}{n+1}\right) L_n(x). \end{aligned}$$

4. Soit $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. On a :

$h_{n+1}'(x) = e^{-x}\left((n+1)x^n - x^{n+1}\right) = (n+1) h_n(x) - h_{n+1}(x)$. Ainsi,

$h_{n+1}^{(n+2)} = (h_{n+1}')^{(n+1)}(x) = (n+1) h_n^{(n+1)}(x) - h_{n+1}^{(n+1)}(x)$.

Comme $h_{n+1}^{(n+2)}(x) = \left(h_{n+1}^{(n+1)}\right)'$ et $h_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)! e^{-x} L_{n+1}(x)$, on en déduit que :

$$(n+1) h_n^{(n+1)}(x) - h_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)! e^{-x}\left(L_{n+1}'(x) - L_{n+1}(x)\right).$$

D'où

$$(n+1) n! e^{-x}(L_n'(x) - L_n(x)) - (n+1)! e^{-x} L_{n+1}(x) = (n+1)! e^{-x}(L_{n+1}'(x) - L_{n+1}(x)).$$

Ainsi, $L_{n+1}' = L_n' - L_n$.

5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que

$$L_{n+1}'(x) = \frac{x}{n+1}(L_n''(x) - L_n'(x)) + \frac{L_n'(x) - L_n(x)}{n+1} + L_n'(x)$$

puis que :

$$L_n'(x) - L_n(x) = \frac{x}{n+1}(L_n''(x) - L_n'(x)) + \frac{L_n'(x) - L_n(x)}{n+1} + L_n'(x).$$

Ainsi, $x L_n''(x) + (1-x) L_n'(x) + n L_n(x) = 0$.

6. Soient $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$ et $\delta(x) = (n+1)L_{n+1}(x) + (x-2n-1)L_n(x) + nL_{n-1}(x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\delta(x) &= xL'_n(x) + (n+1-x)L_n(x) + (x-2n-1)L_n(x) + nL_{n-1}(x)\\ &= xL'_n(x) - nL_n(x) + nL_{n-1}(x)\\ &= x(L'_{n-1}(x) - L_{n-1}(x)) - nL_n(x) + nL_{n-1}(x) = nL_{n-1}(x) - nL_{n-1}(x).\end{aligned}$$

Ainsi :

$$(n+1)L_{n+1}(x) + (x-2n-1)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$$

Exercice 1.17.

Si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \dfrac{1}{k^x}$, où $k^x = \exp(x \ln(k))$.

1. On s'intéresse à la convergence des suites $(S_n(x))_{n \geq 1}$.

a) Soit $x > 0$. Etablir pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ les inégalités

$$S_{2n+1}(x) \leqslant S_{2n+3}(x) \leqslant S_{2n+2}(x) \leqslant S_{2n}(x).$$

b) En déduire que les suites $(S_{2n+1}(x))_{n\geq 0}$ et $(S_{2n}(x))_{n\geq 1}$ convergent pour tout réel strictement positif x et admettent la même limite.

c) Montrer que la série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{1}{k^x}$ converge pour $x > 0$. On notera désormais $f(x)$ la somme de cette série.

2. On va maintenant s'intéresser à une autre expression de la fonction f.

a) Montrer que pour $x > 0$, $f(x)$ est la somme de la série de terme général $\Big(\dfrac{1}{(2p)^x} - \dfrac{1}{(2p-1)^x}\Big)_{p\geq 1}$, c'est-à-dire que l'on a $f(x) = \sum\limits_{p=1}^{\infty} \Big(\dfrac{1}{(2p)^x} - \dfrac{1}{(2p-1)^x}\Big)$.

b) Soient $p \geqslant 1$ et $x > 0$. Prouver que l'on a : $\Big|\dfrac{1}{(2p)^x} - \dfrac{1}{(2p-1)^x}\Big| \leqslant \dfrac{x}{(2p-1)^{x+1}}$.

3. On considère une série convergente de terme général r_p, $(p \geqslant 1)$, positif ou nul et une suite $(u_p)_{p\geq 1}$ de fonctions continues sur un intervalle $I =]a,b[\subset \mathbb{R}_+^*$ qui vérifient $|u_p(x)| \leqslant r_p$ pour tout $p \geqslant 1$ et tout $x \in I$.

a) Pour tout $x \in I$, justifier la convergence de la série $\sum\limits_{p\geq 1} u_p(x)$. On notera $g(x)$ la somme de cette série.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un plus petit entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum\limits_{p=N+1}^{\infty} r_p < \dfrac{\varepsilon}{4}$.

On notera $N(\varepsilon)$ cet entier.
Pour tout couple $(t,x) \in I^2$, prouver que l'on a :

$$|g(t) - g(x)| \leqslant \Big|\sum_{p=1}^{N(\varepsilon)} u_p(t) - \sum_{p=1}^{N(\varepsilon)} u_p(x)\Big| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

c) En déduire que la fonction g est continue sur I.

4. Prouver que la fonction f définie dans la première question est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution :

1. a) Soit $x > 0$, on a $S_{2n+3}(x) - S_{2n+1}(x) = \frac{1}{(2n+2)^x} - \frac{1}{(2n+3)^x} \geqslant 0$.

De la même manière, on vérifie que

$S_{2n}(x) - S_{2n+2}(x) \geqslant 0$ et que $S_{2n+2}(x) - S_{2n+3}(x) \geqslant 0$.

b) D'après 1) a), les deux suites $(S_{2n+1}(x))_{n\geq 0}$ et $(S_{2n}(x))_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

La suite $(S_{2n+1}(x))_{n\geq 0}$ est croissante et majorée par $S_2(x)$, elle converge donc vers une limite l_1. La suite $(S_{2n}(x))_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée par $S_1(x)$, elle converge donc vers une limite l_2. Comme $S_{2n+1}(x) - S_{2n}(x) = -1/(2n+1)^x \longrightarrow 0$, lorsque n tend vers $+\infty$, on voit que $l_1 = l_2 = f(x)$.

c) Les suites $(S_{2n+1}(x))_{n\geq 0}$ et $(S_{2n}(x))_{n\geq 1}$ convergent toutes les deux vers $f(x)$.

Donc, dès que l'on se donne un intervalle ouvert I contenant $f(x)$, il n'y a qu'un nombre fini de termes de la suite $(S_{2n+1}(x))_{n\geq 0}$ en dehors de I et un nombre fini de termes de la suite $(S_{2n}(x))_{n\geq 1}$ en dehors de I.

Il n'y a donc qu'un nombre fini de termes de la suite $(S_n(x))_{n\geq 1}$ qui ne sont pas dans I, ce qui prouve bien que la série converge vers $f(x)$.

2. a) Il suffit de remarquer que $\sum\limits_{p=1}^{m} \big(\dfrac{1}{(2p)^x} - \dfrac{1}{(2p-1)^x}\big) = S_{2m}(x)$ et de dire que $S_{2m}(x)$ converge vers $f(x)$ d'après 2) b).

b) Soient $p \geqslant 1$ et $x > 0$, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$|\frac{1}{(2p)^x} - \frac{1}{(2p-1)^x}| \leqslant \sup\Big\{|-\frac{x}{t^{x+1}}|; t \in [2p-1, 2p]\Big\} \leqslant \frac{x}{(2p-1)^{x+1}}.$$

3. a) Si $x \in I$, le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs et l'inégalité $|u_p(x)| \leqslant r_p$ nous assurent que la série $\sum\limits_{p\geq 1} u_p(x)$ est absolument convergente, donc convergente.

b) Comme la série à termes positifs $\sum\limits_{p\geq 1} r_p$ est convergente, ses restes décroissent vers 0. Il n'y a qu'un nombre fini M de restes $\sum\limits_{p=m+1}^{+\infty} r_p$ qui sont en dehors de l'intervalle $[0, \varepsilon/4[$,

il existe donc un plus petit entier $N(\varepsilon) = M + 1$ tel que $\sum\limits_{p=N(\varepsilon)+1}^{+\infty} r_p < \dfrac{\varepsilon}{4}$.

Pour tout couple $(t, x) \in I^2$, on a

$$|g(t) - g(x)| \leqslant |\sum_{p=1}^{N(\varepsilon)} u_p(t) - \sum_{p=1}^{N(\varepsilon)} u_p(x)| + 2\sum_{p=N(\varepsilon)+1}^{+\infty} r_p < |\sum_{p=1}^{N(\varepsilon)} u_p(t) - \sum_{p=1}^{N(\varepsilon)} u_p(x)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

c) Une somme finie de fonctions continues sur I est encore continue, si $x \in I$ il existe un intervalle ouvert J contenant x tel que $|\sum\limits_{p=1}^{N(\varepsilon)} u_p(t) - \sum\limits_{p=1}^{N(\varepsilon)} u_p(x)| < \varepsilon/2$ pour tout $t \in J$.

Par suite, si $x \in J$ on a $|g(t) - g(x)| < \varepsilon$. Comme ε est arbitraire, la fonction g est bien continue au point x.

4. Si $x \in I$, on pose $a = x/2$, $b = 3x/2$ et $u_p(x) = \dfrac{1}{(2p)^x} - \dfrac{1}{(2p-1)^x}$. La question 2. b) nous assure que

$$|u_p(t)| \leqslant \frac{t}{(2p-1)^{t+1}} \leqslant \frac{3x}{2} \times \frac{1}{(2p-1)^{\frac{x}{2}+1}} = r_p$$

Le critère de Riemann et le théorème sur les équivalents donnent facilement la convergence de la série de terme général r_p.

Les hypothèses de la question 3) sont vérifiées et par suite f est continue sur $]a, b[$, donc au point x.

Exercice 1.18.

Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2}\, du$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note sous réserve d'existence :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n x^n \text{ et } F(x) = \int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)(1-xu)^2}\, du$$

1. a) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel a_n existe et vérifie :

$$\frac{1}{2}\frac{1}{n+1} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

b) En déduire que la fonction S est définie sur l'intervalle $]-1, 1[$.

2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction F.

3. Soit x un réel de $[0, 1[$, on note : $\forall\, u \in [0,1], \forall\, p \in \mathbb{N}, A(u,p) = \dfrac{u^p x^p [p - pux + 1]}{(1+u^2)(1-xu)^2}$.

a) Montrer que : $\forall\, p \in \mathbb{N}, \forall\, u \in [0,1], A(u,p) \leqslant (p+1)\dfrac{x^p}{(1-x)^2}$.

En déduire que : $\displaystyle\lim_{p\to\infty} \int_0^1 A(u,p)\, du = 0$.

4. Montrer que : $\forall\, v \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \displaystyle\sum_{n=0}^{p-1} (n+1) v^n = \frac{1}{(1-v)^2} - \frac{v^p}{(1-v)^2}[p - pv + 1]$.

5. En déduire que : $\forall\, x \in [0, 1[,\ F(x) = S(x)$.

Solution :

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}$; l'intégrale a_n existe car $\varphi : u \longrightarrow \dfrac{u^n}{1+u^2}$ est définie continue sur $[0, 1]$. De plus,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u \leqslant 1 \implies \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+u^2} \leqslant 1 \implies \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

b) On a $0 \leqslant |(n+1)a_n x^n| \leqslant |x^n|$. Donc si $|x| < 1$ la série converge absolument et S est bien définie sur $]-1,1[$.

2. Soit la fonction $f_x(u) = \dfrac{1}{(1+u^2)(1-xu)^2}$.

• Si $x < 1$: la fonction f_x est définie (le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]$) et continue sur le segment $[0,1]$, l'intégrale $F(x)$ est bien définie.

• Si $x \geqslant 1$: on a : $0 < \dfrac{1}{x} \leqslant 1$, branche infinie au voisinage de $\dfrac{1}{x}$. Or au voisinage de $\dfrac{1}{x}$: $f_x(u) \sim \dfrac{1}{x^2+1} \dfrac{1}{(u-\frac{1}{x})^2}$. La fonction n'est pas intégrable (critère de comparaison aux intégrales de Riemann). Ainsi la fonction F est définie sur $]-\infty, 1[$

a) $u \in [0,1] \Longrightarrow u^p \leqslant 1$; $u \in [0,1] \Longrightarrow 1+u^2 \geqslant 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{1+u^2} \leqslant 1$;
$u \in [0,1] \Longrightarrow 1-x \leqslant 1-ux \Longrightarrow \dfrac{1}{1-ux} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$; $u \in [0,1] \Longrightarrow p - pux + 1 \leqslant p+1$.
Ce qui donne la majoration souhaitée.

b) Par positivité de l'intégrale, on obtient : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 A(u,p)du \leqslant (p+1)\frac{x^p}{(1-x)^2}$.

Comme $0 \leqslant x < 1$, on a $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} (p+1)\frac{x^p}{(1-x)^2} = 0$, et le théorème d'encadrement entraîne que :

$$\lim_{p\to+\infty} \int_0^1 A(u,p)du = 0$$

4. On reconnaît la somme des premiers termes d'une suite géométrique :

$$\forall\, v \neq 1, \sum_{n=0}^{p-1} v^{n+1} = v\, \frac{v^p - 1}{v-1}.$$

On obtient le résultat souhaité en dérivant par rapport à la variable v :

$$\forall\, v \neq 1,\quad \sum_{n=0}^{p-1}(n+1)v^n = \frac{1}{(1-v)^2} - \frac{v^p}{(1-v)^2}[p - pv + 1]$$

5. On a

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=0}^{p-1}(n+1)a_n x^n = \sum_{n=0}^{p-1}(n+1)\Big[\int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2}du\Big].x^n \\
&= \int_0^1 \Big[\sum_{n=0}^{p-1}(n+1)(ux)^n\Big]\frac{du}{1+u^2} \\
&= \int_0^1 \Big[\frac{1}{(1-xu)^2} + \frac{u^{p+1}x^{p+1}}{(1-xu)^2} - (p+1)\frac{u^p x^p}{(1-xu)^2}\Big]\frac{du}{1+u^2} \\
&= F(x) - \int_0^1 A(u,p)du
\end{aligned}$$

d'où en passant à la limite quand $p \to +\infty$: $\forall\, x \in [0,1[,\ F(x) = S(x)$.