DS 1 - sujet A

Thèmes : Révisions en analyse, vecteurs propres

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Le sujet est composé de trois problèmes indépendants.

Problème 1 : Étude d'une suite d'intégrales généralisées

On pose, sous réserve de convergence, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+t^3\right)^n}\,\mathrm{d}t$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier l'existence de I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- *Étude de la suite* $(\mathrm{I}_n)_n$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n}\mathrm{I}_n$.

3. Vérifier que pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{2-t}{1-t+t^2}\right).$$

4. On pose $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t$. Vérifier que $\mathrm{J} = 4\pi/(3\sqrt{3})$ à l'aide d'un changement de variable affine.

5. **a)** Déterminer une primitive de $k : t \mapsto \dfrac{1}{1+t} - \dfrac{t-\frac{1}{2}}{1-t+t^2}$. Puis vérifier que

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{3}k(t) + \frac{\frac{1}{2}}{1-t+t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

b) En déduire que $\mathrm{I}_1 = 2\pi/(3\sqrt{3})$.

6. Donner une expression de I_n sous la forme d'un produit.

7. **a)** En utilisant la convexité de $x \mapsto (1+x)^n$ sur $\mathbb{R}^+$, justifier que pour tout réel $x \geqslant 0$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\mathrm{I}_1$. Puis en déduire la limite de $(\mathrm{I}_n)_n$.

- *Informatique*

8. Recopier et compléter la fonction python suivante qui prend en argument n et renvoie I_n.

Editeur

```python
def EasyPython( ... ):
    I= ...
    for k in ...
        ...
    return ...
```

9. Écrire une fonction `SommesPartielles` qui prend en argument n et renvoie la matrice ligne (ou liste)

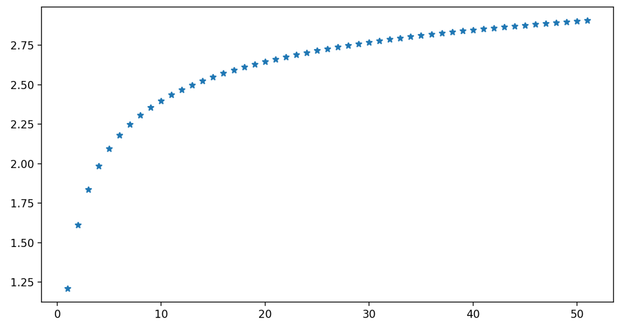
$$\begin{bmatrix} \mathrm{S}_1 & \mathrm{S}_2 & \ldots & \mathrm{S}_n \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{I}_k}{k}.$$

10. Expliquer le code suivant. Que peut-on conjecturer sur la série $\sum \mathrm{I}_k/k$? Prouver votre conjecture.

Console

```
import matplotlib.pyplot as
    plt

n=50
ab=np.arange(1,n+2)
S=SommesPartielles(n)
plt.plot(ab,S,'*')
plt.show()
```



Problème : Étude d'un endomorphisme avec des polynômes de Chebychev

Dans la suite du problème, p désigne un entier naturel fixé tel que $p \geqslant 2$, et on note E l'espace vectoriel réel des polynômes de $\mathbb{R}[x]$ de degré inférieur ou égal à p.

On note L l'application qui, à un polynôme P de E, associe le polynôme L(P) défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{L}(\mathrm{P})(x) = \left(x^2-1\right)\mathrm{P}''(x) + 3x\mathrm{P}'(x).$$

- *Étude de l'endomorphisme* L

11. Montrer que L est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

12. Donner la matrice de L dans la base canonique de $\mathbb{R}_p[x]$.

13. En déduire le spectre de L.

14. Est-ce que L est un isomorphisme ?

- *Étude d'une suite de polynômes*

On considère la suite $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[x]$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

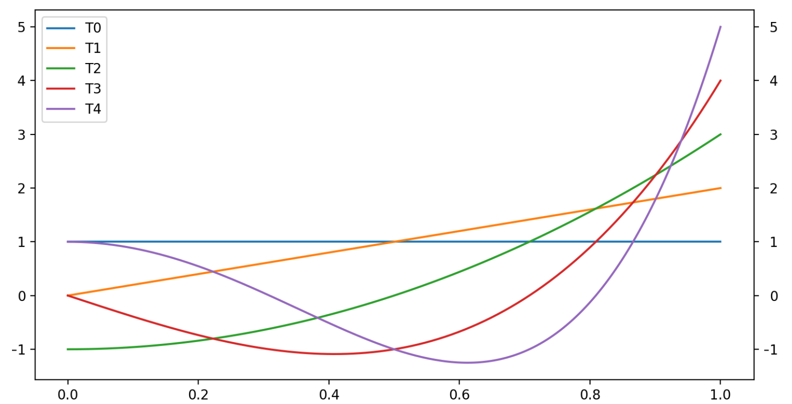
$$\mathrm{T}_0 = 1, \quad \mathrm{T}_1(x) = 2x \quad \text{et, pour tout entier } n \geqslant 2, \quad \mathrm{T}_n(x) = 2x\mathrm{T}_{n-1}(x) - \mathrm{T}_{n-2}(x).$$

- *Les premiers polynômes, représentations*

15. Calculer T_2 et T_3.

16. Écrire une fonction python `Cheby` qui prend en argument n et x et renvoie $\mathrm{T}_n(x)$.

17. Comment tracer les courbes représentatives de T_i pour $i \in [\![0;4]\!]$ sur $[0;1]$ à l'aide de Python ?
Voici le résultat.



- *Propriétés des polynômes* T_n

18. Démontrer que, pour tout entier naturel n, T_n est un polynôme de degré n, dont on déterminera le coefficient du terme de degré n.

19. Calculer, pour tout entier naturel $n, \mathrm{T}_n(1)$ en fonction de n. *On pourra regarder à nouveau les graphes ..*

20. Établir à l'aide d'une récurrence, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0;\pi[$:

$$\mathrm{T}_n(\cos\theta) = \frac{\sin\left((n+1)\theta\right)}{\sin\theta}.$$

21. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, T_n admet n racines réelles, toutes situées dans $]-1;1[$, que l'on explicitera.

22. **a)** Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0;\pi[$:

$$\sin(\theta)^2 T_n''(\cos\theta) - 3\cos(\theta) T_n'(\cos\theta) + \left(n^2+2n\right) T_n(\cos\theta) = 0.$$

Indication : On pourra dériver deux fois la fonction (nulle) :

$$\theta \longmapsto \sin\theta T_n(\cos\theta) - \sin(n+1)\theta.$$

b) En déduire, pour tout entier naturel n, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\left(x^2-1\right) T_n''(x) + 3x T_n'(x) - \left(n^2+2n\right) T_n(x) = 0.$$

- *Retour sur l'endomorphisme* L

23. Pour tout k de $[\![0,p]\!]$, exprimer $L\left(T_k\right)$ à l'aide de T_k, n et k.

24. Retrouver les valeurs propres de L et, pour chaque valeur propre de L, déterminer une base et la dimension du sous-espace propre associé.

- *L'application* φ

Dans la suite du problème, on note φ l'application qui, à un couple (P, Q) de polynômes de E, associe le réel $\varphi(P, Q)$ défini par :

$$\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} P(x) Q(x) \mathrm{d}x.$$

25. Démontrer, pour tous polynômes P, Q de E :

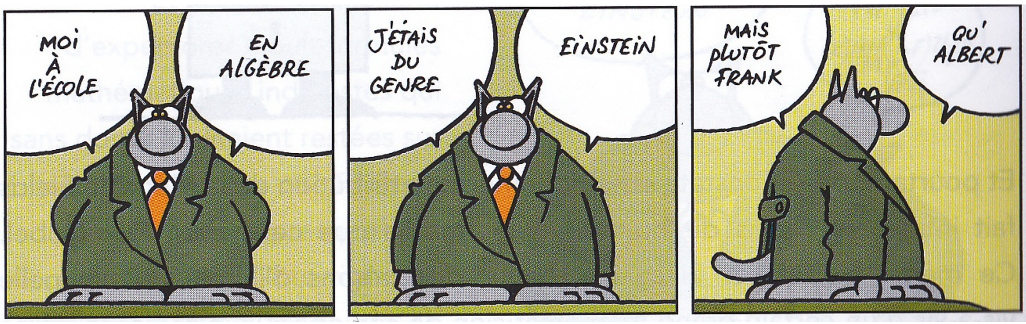
$$\varphi\big(L(P), Q\big) = \varphi\big(P, L(Q)\big).$$

Indication : On pourra, à l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\varphi\big(L(P), Q\big) = \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} P'(x) Q'(x) \mathrm{d}x.$$

26. En utilisant les questions 23 et 25, établir que pour tous $i, j \in [\![0;p]\!]$

$$\varphi(T_i, T_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Problème 3

Partie I : Étude du polynôme minimal

- *Préliminaires - propriété du polynôme minimal*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

27. En considérant la famille $(I_n, M, M^2, \dots, M^p)$ pour un entier p bien choisi, justifier l'existence d'un polynôme P non nul tel que $P(M) = 0_n$.

On appelle polynôme minimal de M un polynôme π de $\mathbb{R}[x]$ de coefficient dominant 1, tel que $\pi(M) = 0$ et pour tout P, $P \in \mathbb{R}[x]$, non nul, vérifiant $P(M) = 0_n$, on a π divise P. Grâce à la question précédente, on montre qu'un tel polynôme existe. De plus, on montre que le degré de π est le minimum des degrés des polynômes annulateurs de M non nuls.

28. Justifier l'unicité du polynôme minimal de M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans la suite, on le note π_M.

29. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que si λ est une racine de π_M, alors λ est une valeur propre de M.
On pourra commencer par écrire $\pi_M(x) = (x-\lambda)Q(x)$ *et raisonner par l'absurde.*

- *Exemple de polynôme minimal - informatique*

30. On considère la matrice
$$M = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
À l'aide du code Python suivant, donner le polynôme minimal pour M. Justifier.

Editeur
```python
import numpy as np

M=np.array
    ([[7,10,0],[-3,-4,0],[0,0,2]])

print(np.dot(M,M)-3*M)
```

Console
```
[[-2  0  0]
 [ 0 -2  0]
 [ 0  0 -2]]
```

- *Polynôme minimal d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec n valeurs propres*

On se place pour les trois prochaines questions dans le cas où M admet exactement n valeurs propres distinctes.

31. Soit φ l'endomorphisme canoniquement associé à M. Justifier qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$, notée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, constitué de vecteurs propres de φ.

32. À l'aide de la formule de changement de base, montrer que M est semblable à une matrice diagonale D.

33. **a)** Pour tout polynôme Q, justifier que Q(M) et Q(D) sont semblables.

b) En déduire que
$$\pi_M = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} (x - \lambda).$$

Partie II : application au crochet de Lie

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad f(M) = AM - MB.$$
On suppose de plus que A a exactement n valeurs propres distinctes.

- *On suppose dans cette question et la suivante que* A *et* B *ont une valeur propre commune notée* λ.

34. Justifier l'existence de Y et Z, deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que
$$AY = \lambda Y \quad \text{et} \quad {}^tBZ = \lambda Z.$$

35. **a)** Prouver que $Y{}^tZ$ est un élément non nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Simplifier $f\left(Y{}^tZ\right)$. En déduire que f n'est pas un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- *On suppose dans les trois prochaines questions que f n'est pas un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

36. **a)** Justifier qu'il existe $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que : $f(M_0) = 0_n$.

b) Pour $k \in \mathbb{N}$, prouver que : $A^kM_0 = M_0B^k$. En déduire que pour tout polynôme P, on a :
$$P(A)M_0 = M_0P(B).$$

37. Soit π_A le polynôme minimal de A. Que peut-on dire de $\pi_A(A)$? En déduire que $\pi_A(B)$ n'est pas inversible.

38. Dans cette question, on veut montrer que A et B ont une valeur propre commune. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant donc que A et B n'ont aucune valeur propre en commun. D'après la question 33, le polynôme π_A peut se factoriser sous la forme
$$\pi_A(x) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (x - \lambda).$$

a) Que dire de l'inversibilité des matrices $(B - \lambda I_n)$?

b) Conclure.

39. Démontrer que f est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si A et B n'ont aucune valeur propre en commun.

40. **a)** Montrer que pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $(f - \mu\,\mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})(M) = (A - \mu I)M - MB$.

b) En déduire que μ est une valeur propre de f si et seulement si, il existe α valeur propre de A et β valeur propre de B telles que :
$$\mu = \alpha - \beta.$$

– FIN –

DS 1 - sujet *

THÈMES : RÉVISIONS EN ANALYSE, VECTEURS PROPRES

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Le sujet est composé d'un exercice et de deux problèmes indépendants.

Exercice 1 : Fonction êta de Dirichlet

On rappelle dans un premier temps que l'on peut définir la fonction Γ sur $\mathbb{R}_*^+$ par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
Soit x un réel positif. On définit, sous réserve de convergence :

$$\mathrm{I}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}.$$

1. **a)** Justifier l'existence de $\mathrm{I}(x)$ pour tout réel $x > 0$.
b) Justifier l'existence de $\eta(x)$ pour tout réel $x > 1$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{J}_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$. Vérifier la convergence pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$ et l'égalité $\mathrm{J}_n(x) = \frac{1}{n^x}\Gamma(x)$.

3. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$ et $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{I}(x) - \Gamma(x)\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = (-1)^{\mathrm{N}} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{N}t}\,\mathrm{d}t.$$

4. En conclure que $\eta(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$ et vérifie : $\eta(x) = \dfrac{\mathrm{I}(x)}{\Gamma(x)}$.

- *Un peu de Python...*

5. Recopier et compléter la fonction Python suivante qui prend en argument N et x renvoie $\eta_{\mathrm{N}}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

Editeur

```
def etaN( ... ):
    s=0
    for n in ... :
        ...
    return s
```

6. Comment modifier la fonction précédente pour créer une nouvelle fonction `etaN2` qui prend en arguments x, N et renvoie maintenant la matrice ligne (ou liste) :

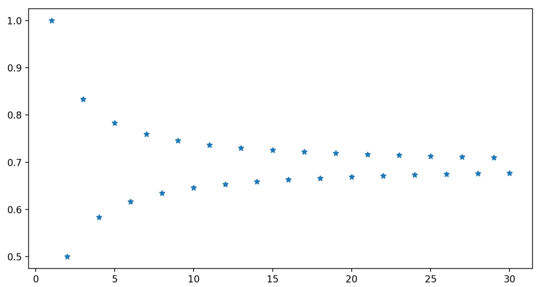
$$\begin{bmatrix}\eta_1(x) & \eta_2(x) & \dots & \eta_{\mathrm{N}}(x)\end{bmatrix}.$$

7. Voici un test pour $x = 1$. Que peut-on conjecturer sur les suites $(\eta_{2n}(1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\eta_{2n+1}(1))_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Console

```
import matplotlib.pyplot as
   plt

ab=np.linspace(1,30,30)
plt.plot(ab,etaN2(1,30),'*')
plt.show()
```



Problème : Réduction d'une matrice tridiagonale

Dans tout le problème, on désigne par n un nombre entier supérieur ou égal à 2.
On convient d'identifier un vecteur X de $\mathbb{R}^n$ à la matrice-colonne de ses coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et l'on pose

$$\mathrm{N(X)} = \max\left(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\right).$$

Pour tout nombre réel θ appartenant à $[0, \pi[$, on considère la matrice réelle A_θ de taille $n \times n$ définie par :

$$\mathrm{A}_\theta = \begin{bmatrix} 2\cos\theta & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2\cos\theta & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2\cos\theta & -1 \\ 0 & \vdots & 0 & -1 & 2\cos\theta \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

La diagonale de A_θ est donc composée d'éléments égaux à $2\cos\theta$, la sous-diagonale et la surdiagonale de -1 et tous les autres éléments de la matrice sont nuls.
Enfin, on convient de noter A la matrice A_0 et I_n la matrice-identité d'ordre n.
Dans la partie I, on étudie les solutions de l'équation matricielle $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$, où B est un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$, et on majore N(X) en fonction de N(B).
Dans la partie II, on met en œuvre les résultats obtenus pour approcher une fonction définie comme solution d'une équation.

Partie I

- *Python.*

8. Écrire un programme Python qui prend en arguments trois réels a, b, θ, un entier naturel n et renvoie u_n où la suite u est définie par la récurrence double :

$$u_0 = a, \quad u_1 = b \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+2} = 2u_{k+1}\cos(\theta) - u_k.$$

- *Étude de sous-espace vectoriel de suites récurrentes linéaires*

On note E_θ l'espace vectoriel des suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}$ la relation :

$$u_{k+2} - 2u_{k+1}\cos(\theta) + u_k = 0,$$

et l'on désigne par F_θ le sous-ensemble constitué des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de E_θ telles que $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0$.

9. Justifier que E_θ est un espace vectoriel de dimension 2.

10. **a)** Vérifier que si $\theta \in]0; \pi[$, une base de E_θ est donnée par les deux suites $c(\theta)$ et $s(\theta)$ définies sur $\mathbb{N}$ par

$$c_k(\theta) = \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad s_k(\theta) = \sin(k\theta).$$

b) Vérifier que si $\theta = 0$, une base de E_θ est maintenant donnée par

$$(1)_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (k)_{k\in\mathbb{N}}.$$

11. Montrer que F_θ est un sous-espace vectoriel de E_θ, puis déterminer F_θ pour $\theta = 0$.

12. On suppose $\theta \in]0; \pi[$.
Montrer que F_θ se réduit à la suite nulle si θ n'appartient pas à l'ensemble des réels de la forme $\frac{p\pi}{n+1}$, où p est un entier tel que $1 \leqslant p \leqslant n$.

13. On suppose dans cette question que $\theta = \frac{p\pi}{n+1}$, où p est un entier tel que $1 \leqslant p \leqslant n$.
Vérifier que la suite $s(\theta) = \left(s_k(\theta)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à F_θ. En déduire la dimension de F_θ.

- *Noyau de la matrice* A_θ.

14. Soit X un vecteur de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
a) À quelle condition sur x_1, x_2, …, x_n, le vecteur X appartient au noyau de A_θ ?
b) En déduire que X appartient au noyau de A_θ si, et seulement si, il existe une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartenant à F_θ telle que

$$u_1 = x_1, \quad u_2 = x_2, \quad \ldots, \quad u_n = x_n.$$

15. **a)** En déduire le noyau de A_θ en fonction des valeurs prises par θ dans $[0, \pi[$.
b) Pour quelles valeurs de θ dans $[0, \pi[$ la matrice A_θ est-elle inversible ?

- *Valeurs propres de la matrice* $A = A_0$.

16. Soit λ, une valeur propre de la matrice A, et X un vecteur propre non nul associé.

a) Expliciter le système d'équations $(A - \lambda I_n)X = 0$, puis, en considérant la $i^{\text{ième}}$ équation de ce système, où i est un entier tel que $|x_i| = \text{Max}\left(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\right)$, montrer que $|\lambda - 2| \leqslant 2$.

b) En déduire que, pour toute valeur propre λ, de A, existe un nombre réel θ appartenant à $[0, \pi]$ tel que $\lambda = 2(1 - \cos\theta)$.

17. En déduire que A admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ telles que $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$ et pour tout $p \in [\![1; n]\!]$

$$\lambda_p = 2\left(1 - \cos\theta_p\right) \quad \text{avec} \quad \theta_p = \frac{p\pi}{n+1}.$$

- *Vecteurs propres de la matrice* A.

18. Que dire de la dimension de chacun des sous-espace propres de A ?

19. Soit $p \in [\![1; n]\!]$. Expliciter le vecteur propre X_p associé à la valeur propre λ_p dont la première coordonnée dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est égale à $\sin\left(\frac{p\pi}{n+1}\right)$.

20. On considère deux entiers p et q tels que $1 \leqslant p < q \leqslant n$. Montrer que ${}^t X_p A X_q = {}^t X_q A X_p$ (où ${}^t X$ désigne la transposée de la matrice-colonne X), puis, en évaluant les deux membres de cette égalité, prouver que ${}^t X_p X_q = 0$.

- *Étude de l'équation* $AX = B$.

On donne un vecteur B de coordonnées $b_1, b_2, \ldots, b_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

21. Établir que l'équation $AX = B$ admet une solution X et une seule.

22. Soient dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ les vecteurs V de coordonnées $1, 1, \ldots, 1$ et W de coordonnées $w_1, w_2, \ldots, w_n$, où W vérifie l'équation $AW = V$.

a) Montrer que les coordonnées de W sont données par $w_k = k(n+1-k)/2$, où $1 \leqslant k \leqslant n$.

b) En déterminant le maximum sur $[0, a]$ de la fonction $x \mapsto x(a - x)$ (où a est un nombre réel strictement positif donné), établir que $N(W) \leqslant (n+1)^2/8$.

23. On suppose dans cette question (et dans cette question seulement) que les réels $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont positifs et l'on note X la solution unique de l'équation $AX = B$.

a) Soit i le plus grand indice tel que $x_i = \min(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
En raisonnant par l'absurde, montrer, par considération de la j-ième ligne du système d'équations $AX = B$, que $i = 1$ ou n.

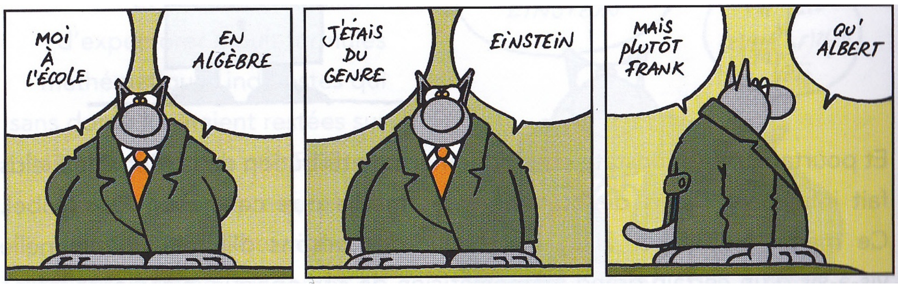
b) Montrer que les composantes de X sont toutes positives.

24. On pose $Y = N(B)V - B$ et $Z = N(B)V + B$.

a) Déterminer le signe des composantes de Y et Z, puis en déduire que, si $AX = B$, on a

$$\forall k \in [\![1; n]\!], \qquad |x_k| \leqslant N(B)\, w_k.$$

b) En déduire une majoration de N(X) en fonction de N(B) et de n.



PARTIE II

Étant donnés deux nombres réels a et b et une fonction g à valeurs réelles continue sur le segment $[0, 1]$, on considère la fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, 1]$ et vérifiant les trois conditions suivantes :

$$f(0) = a,\ f(1) = b \text{ et, pour tout élément } x \text{ de } [0, 1],\ f''(x) = g(x).$$

On se propose ici de déterminer des valeurs numériques approchées de $f(x)$ où x désigne un nombre réel appartenant au segment $[0, 1]$.

- *Existence et unicité de la solution* f.

25. Expliciter la dérivée seconde de la fonction L définie sur [0, 1] par :

$$L(x) = x\int_x^1 (t-1)\cdot g(t)\,\mathrm{d}t + (x-1)\int_0^x t\cdot g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On rappelle que pour une fonction continue h sur un intervalle I, $x \in I \mapsto \int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$ *est la primitive de h qui s'annule en a.*

26. En déduire l'existence et l'unicité d'une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ et vérifiant les trois conditions suivantes :

$$f(0)=a, f(1)=b \text{ et, pour tout réel } x \text{ appartenant à } [0,1], f''(x)=g(x).$$

Vérifier que pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) = \mathrm{L}(x) + (b-a)x + a$.

- *Approximation de f'' par différences finies.*
  Dans toute la suite du problème, on suppose la fonction g de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$.

27. **a)** Établir que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^4$ sur $[0,1]$.

b) On donne un nombre réel x dans $]0,1[$ et un nombre réel strictement positif h tel que $0 \leqslant x-h < x+h \leqslant 1$. Établir à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à partir du point x sur les segments $[x, x+h]$ et $[x-h, x]$ que :

$$\left|\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} - f''(x)\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}_2 h^2}{12}$$

où M_2 désigne le maximum (dont on justifiera l'existence) de $|g''|$ sur $[0,1]$.

Dans la suite, on convient donc d'approcher $f''(x)$ par $\left[f(x+h)-2f(x)+f(x-h)\right]/h^2$.

- *Discrétisation de l'équation $f'' = \mathrm{Q}$ avec $f(0)=a$ et $f(1)=b$.*
  On pose désormais $h = 1/(n+1)$ et l'on note $x_k = kh$ pour $0 \leqslant k \leqslant n+1$.
  On se propose de calculer des approximations $y_1, y_2, \dots, y_n$ de $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$, en prenant bien entendu $y_0 = f(x_0) = a$ et $y_{n+1} = f(x_{n+1}) = b$. À cet effet, on remplace les n équations $f''(x_k) = g(x_k)$ où $1 \leqslant k \leqslant n$ par les n équations :

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = g(x_k).$$

28. Montrer que le vecteur Y de coordonnées $y_1, y_2, \dots, y_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est solution d'un système d'équations $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ où B est un vecteur dont on précisera les coordonnées.

Problème 3

Partie I : Étude du polynôme minimal

- *Préliminaires - propriété du polynôme minimal*
  Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

29. En considérant la famille $(\mathrm{I}_n, \mathrm{M}, \mathrm{M}^2, \dots, \mathrm{M}^p)$ pour un entier p bien choisi, justifier l'existence d'un polynôme P non nul tel que $\mathrm{P}(\mathrm{M}) = 0_n$.

On appelle polynôme minimal de M un polynôme π de $\mathbb{R}[x]$ de coefficient dominant 1, tel que $\pi(\mathrm{M}) = 0$ et pour tout P, $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$, non nul, vérifiant $\mathrm{P}(\mathrm{M}) = 0_n$, on a π divise P. Grâce à la question précédente, on montre qu'un tel polynôme existe. De plus, on montre que le degré de π est le minimum des degrés des polynômes annulateurs de M non nuls.

30. Justifier l'unicité du polynôme minimal de M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Dans la suite, on le note π_{M}.

31. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que si λ est une racine de π_{M}, alors λ est une valeur propre de M.
On pourra commencer par écrire $\pi_{\mathrm{M}}(x) = (x-\lambda)\mathrm{Q}(x)$ et raisonner par l'absurde.

- *Exemple de polynôme minimal - informatique*

32. On considère la matrice

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

À l'aide du code Python suivant, donner le polynôme minimal pour M. Justifier.

Editeur
```python
import numpy as np

M=np.array
    ([[7,10,0],[-3,-4,0],[0,0,2]])

print(np.dot(M,M)-3*M)
```

Console
```
[[-2  0  0]
 [ 0 -2  0]
 [ 0  0 -2]]
```

- *Polynôme minimal d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec n valeurs propres*
  On se place pour la prochaine question dans le cas où M admet exactement n valeurs propres distinctes.

33. **a)** À l'aide de la formule de changement de base, montrer que M est semblable à une matrice diagonale D.

b) En déduire que

$$\pi_M = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} (x - \lambda).$$

Partie II : application au crochet de Lie

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad f(M) = AM - MB.$$

On suppose de plus que A a exactement n valeurs propres distinctes.

- *On suppose dans cette question et la suivante que* A *et* B *ont une valeur propre commune notée* λ.

34. Justifier l'existence de Y et Z, deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que

$$AY = \lambda Y \quad \text{et} \quad {}^tBZ = \lambda Z.$$

35. **a)** Prouver que $Y{}^tZ$ est un élément non nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Simplifier $f\left(Y{}^tZ\right)$. En déduire que f n'est pas un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- *On suppose dans les trois prochaines questions (36., 37, 38.) que f n'est pas un isomorphisme de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

36. **a)** Justifier qu'il existe $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que : $f(M_0) = 0_n$.

b) Pour $k \in \mathbb{N}$, prouver que : $A^kM_0 = M_0B^k$. En déduire que pour tout polynôme P, on a :

$$P(A)M_0 = M_0P(B).$$

37. Soit π_A le polynôme minimal de A. Que peut-on dire de $\pi_A(A)$? En déduire que $\pi_A(B)$ n'est pas inversible.

38. Dans cette question, on veut montrer que A et B ont une valeur propre commune. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant donc que A et B n'ont aucune valeur propre en commun. D'après la question 33, le polynôme π_A peut se factoriser sous la forme

$$\pi_A(x) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (x - \lambda).$$

a) Que dire de l'inversibilité des matrices $(B - \lambda I_n)$?

b) Conclure.

39. Démontrer que f est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si A et B n'ont aucune valeur propre en commun.

40. **a)** Montrer que pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $(f - \mu\,\mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})(M) = (A - \mu I)M - MB$.

b) En déduire que μ est une valeur propre de f si et seulement si, il existe α valeur propre de A et β valeur propre de B telles que :

$$\mu = \alpha - \beta.$$

– FIN –

DS 1 A - solution

Problème 1

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{(1+t^3)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. L'intégrale I_n est généralisée en $+\infty$. De plus

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3n}}.$$

Or $3n > 1$, l'intégrale de Riemann

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3n}}$$

est converge. D'après le critère d'équivalence d'intégrales de fonctions positives, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n}\,dt$$

est convergente. Dès lors, I_n aussi.

2. Soit $A > 0$. Intégrons par parties en posant pour tout $t \in [0,A]$,

$$u(t) = \frac{1}{(1+t^3)^n} \quad \text{et} \quad v(t) = t.$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0,A]$. Il vient

$$\begin{aligned}
&\int_0^A \frac{1}{(1+t^3)^n}\,dt\\
&= \int_0^A u(t)v'(t)\,dt\\
&= \left[\frac{1}{(1+t^3)^n}t\right]_0^A - \int_0^A u'(t)t\,dt\\
&= \frac{A}{(1+A^3)^n} - \int_0^A \frac{(-n)3t^2}{(1+t^3)^{n+1}}t\,dt\\
&= \frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\int_0^A \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\,dt.
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
&3n\int_0^A \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\,dt\\
&= 3n\int_0^A \frac{(1+t^3)-1}{(1+t^3)^{n+1}}\,dt\\
&= 3n\int_0^A \frac{1}{(1+t^3)^n}\,dt - 3n\int_0^A \frac{1}{(1+t^3)^{n+1}}\,dt\\
&= 3n\int_0^A \frac{1}{(1+t^3)^n}\,dt - 3n\int_0^A \frac{1}{(1+t^3)^{n+1}}\,dt.
\end{aligned}$$

Par passage à la limite $A \to +\infty$, on obtient

$$3nI_{n+1} = (3n-1)I_n.$$

D'où le résultat demandé.

3. Soit $t \in \mathbb{R}_*^+$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{2-t}{1-t+t^2}\right) &= \frac{1}{3}\left(\frac{1-t+t^2+(2-t)(1+t)}{(1+t)\left(1-t+t^2\right)}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{1+t^3}\right).
\end{aligned}$$

4. On exprime le dénominateur sous forme canonique

$$1-t+t^2 = \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

On effectue le changement de variable affine

$$x = t - \frac{1}{2}, \quad t = x + \frac{1}{2}.$$

La fonction $\varphi : x \mapsto x + \frac{1}{2}$ réalise une bijection $\mathscr{C}^1$ de $]-\frac{1}{2},+\infty[$ sur $]0,+\infty[$. D'où J et $\int_{-\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^2+\frac{3}{4}}\,dx$ sont de même nature et égales si elles convergent.
Or $x \mapsto \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+a^2}$. Ici, on peut prendre $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où

$$G : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)$$

est une primitive de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x^2+\frac{3}{4}}$ sur $]-\frac{1}{2},+\infty[$. G admet pour limite $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ en $+\infty$, ce qui montre la convergence de J avec

$$J = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - G\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

Finalement, $$J = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

5.a) Pour $t \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\frac{1}{1+t} - \frac{t-\frac{1}{2}}{1-t+t^2} = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{2}\left(\frac{2t-1}{1-t+t^2}\right),$$

d'où la fonction $K : t \mapsto \ln(1+t) - \frac{1}{2}\ln\left(1-t+t^2\right)$ est une primitive de la fonction $k : t \mapsto \frac{1}{1+t} - \frac{t-\frac{1}{2}}{1-t+t^2}$. Revenons à la décomposition de la question 3 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+t^3} &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{2-t}{1-t+t^2}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-t}{1-t+t^2}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(k(t) + \frac{\frac{3}{2}}{1-t+t^2}\right)\\
&= \frac{1}{3}k(t) + \frac{\frac{1}{2}}{1-t+t^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi $I_1 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{3}k(t) + \frac{\frac{1}{2}}{1-t+t^2}\right) \mathrm{d}t.$

5.b) D'après la question précédente

$$\int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

De plus, montrons que K admet une limite finie en $+\infty$. En effet, pour $t \in \mathbb{R}_*^+$

$$\begin{aligned} K(t) &= \ln(1+t) - \frac{1}{2}\ln\left(1-t+t^2\right) \\ &= \ln(t) + \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(t^2\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right) \\ &= \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{t\to+\infty} K(t) = 0.$

D'où $\int_0^{+\infty} k(t)\,\mathrm{d}t = 0 - \underbrace{K(0)}_{=0} = 0$ et finalement

$$I_1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

6. *Rédaction 1*

Montrer par récurrence que la propriété

$$I_n = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k-1}{3k}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation. $\mathscr{P}(1)$ est vérifiée au rang $n=1$ d'après la question 5.b).

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors d'après la question 2.,

$$I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n.$$

Puis par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{3n-1}{3n}\left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k-1}{3k}\right) \\ &= \left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \prod_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{3k}\right). \end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

- *Rédaction 2.*

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, I_k ne s'annule pas. On peut donc écrire par télescopage

$$\frac{I_n}{I_1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{I_{k+1}}{I_k} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k-1}{3k}.$$

D'où le résultat.

7.a) La fonction $\psi : x \mapsto (1+x)^n$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$ car sa dérivée seconde est positive. D'après le cours, sa courbe représentative est au-dessus de sa tangente en 0. Soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \psi(x) \geqslant \psi(0) + \psi'(0)x$$

C'est-à-dire $(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$

7.b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \in \mathbb{R}_*^+$, d'après ce qui précède

$$0 \leqslant \frac{1}{(1+t^3)^n} \leqslant \frac{1}{1+nt^3}.$$

Par croissance de l'intégrale (avec les bornes dans le bon sens) :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+nt^3}\,\mathrm{d}t.$$

Pour calculer l'intégrale de droite (notée J_n), on réalise le changement de variable affine $x = \sqrt[3]{n}\cdot t$, soit

$$t = \frac{x}{\sqrt[3]{n}}.$$

Il vient que les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+nt^3}\,\mathrm{d}t$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\,\mathrm{d}x = \frac{I_1}{\sqrt[3]{n}}$$

sont de même nature. Donc, J_n converge et $J_n = \frac{I_1}{\sqrt[3]{n}}$ et on obtient bien l'encadrement :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{I_1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Par encadrement, il vient

$$I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

8.

```
import numpy as np

def EasyPython(n):
    I= 2*np.pi/(3*3**(1/2))
    for k in range(1,n):
        I=I*(3*k-1)/(3*k)
    return I
```

9.

```
def SommesPartielles(n):
    S=np.zeros(n+1)
    I=2*np.pi/(3*3**(1/2))
    S[0]=I/1
    for k in range(1,n+1):
        I=I*(3*k-1)/(3*k)
        S[k]=S[k-1]+ I/(k+1)
    return S
```

10. Le code suivant affiche les premières sommes partielles de la série $\sum I_k/k$. À l'aide du graphe, on conjecture que les sommes partielles convergent, c'est-à-dire que la série $\sum I_k/k$ converge.

C'est effectivement le cas puisque d'après la question 7, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leqslant \frac{I_k}{k} \leqslant \frac{I_1}{k^{4/3}}.$$

La série de Riemann $\sum 1/k^{4/3}$ est convergente $(4/3 > 1)$ donc d'après le critère de majoration de séries à termes positifs, la série $\sum I_k/k$ converge.

Problème 2

11. • Soient $P, Q \in \mathbb{R}_p[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité de la dérivation, on a

$$\begin{aligned}
&L(\lambda P+Q)(x)\\
&=\left(x^2-1\right)(\lambda P+Q)''(x)+3x(\lambda P+Q)'(x)\\
&=\left(x^2-1\right)\left(\lambda P''(x)+Q''(x)\right)+3x\left(\lambda P'(x)+Q'(x)\right)\\
&=\lambda\left(\left(x^2-1\right)P''(x)+3xP'(x)\right)+\left(x^2-1\right)Q''(x)+3xQ'(x)\\
&=\lambda L(P)(x)+L(Q)(x).
\end{aligned}$$

Ainsi L est une application linéaire.

• De plus pour $P \in \mathbb{R}_p[x]$,

$$\deg(P') \leqslant \deg(P)-1 \leqslant p-1, \quad \deg(P'') \leqslant \deg(P)-2 \leqslant p-2,$$

d'où

$$\deg\left((x^2-1)P''(x)\right) \leqslant p \quad \text{et} \quad \deg\left(3xP'(x)\right) \leqslant p.$$

On en déduit que $L(P) \in \mathbb{R}_p[x]$.

Finalement, L est un endomorphisme.

12. Pour tout $k \in [\![0;p]\!]$, posons $P_k = x^k$. Soit $k \in [\![2;p]\!]$

$$\begin{aligned}
L\left(P_k\right)(x) &= \left(x^2-1\right)k(k-1)x^{k-2}+3xkx^{k-1}\\
&=(k(k-1)+3k)x^k-k(k-1)x^{k-2}\\
&=(k(k+2))x^k-k(k-1)x^{k-2}
\end{aligned}$$

De plus

$$L(P_0)=0 \quad \text{et} \quad L(P_1)=3x.$$

On en déduit que la matrice de L est triangulaire.

$$A_\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & \cdots & 0\\ 0 & 3 & 0 & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -p(p-1)\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \vdots & 0 & 0 & p(p+2)\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}).$$

La diagonale est constituée par

$$0, \quad 3, \quad \ldots, \quad k(k+2), \quad \ldots, \quad p(p+2)$$

et la "diagonale" située deux rang au-dessus est donnée par

$$-2, \quad \ldots, \quad -k(k-1), \quad \ldots, \quad -p(p-1).$$

Le reste est constitué de 0.

13. Dans le cas d'une matrice triangulaire, le spectre est donné par les coefficients diagonaux

$$\mathrm{Sp}(L)=\left\{k(k+2) \quad | \; k \in [\![0;p]\!]\right\}.$$

14. Comme $0 \in \mathrm{Sp}(L)$, L n'est pas un isomorphisme.

15. On a

$$\begin{aligned}
T_2 &= 2xT_1-T_0 = 2x(2x)-1\\
&=4x^2-1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_3 &= 2xT_2-T_1 = 2x\left(4x^2-1\right)-2x\\
&=8x^3-4x.
\end{aligned}$$

16.

```
def Cheby(x,n):
    Told=1
    if n==0 :
        return Told

    Tnew=x

    for k in range(1,n):
        Tinter=Told
        Told=Tnew
        Tnew=2*x*Tnew-Tinter
    return Tnew
```

17.

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.clf()
for iter in range(5):
    x=np.linspace(-1,1,200)
    y=[]
    for i in range(len(x)):
        y.append(Cheby(x[i],iter))
    plt.plot(x,y,label='T'+str(iter))
plt.legend()
plt.show()
```

18. Notons d_n le degré de T_n et α_n son coefficient dominant. Procéder par une récurrence double sur la propriété

$$\mathcal{P}(n): \quad d_n = n \quad \text{et} \quad \alpha_n = 2^n.$$

19. *Rédaction 1.* L'étude des graphes permet de conjecturer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n(1) = n+1.$$

On procède ensuite à une récurrence double à partir de la relation de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$T_{n+2}(1) = 2T_{n+1}(1)-T_n(1).$$

Rédaction 2.
Pour $n \geqslant 2$

$$T_n(1) = 2T_{n-1}(1)-T_{n-2}(1)$$

puis

$$T_n(1)-T_{n-1}(1) = T_{n-1}(1)-T_{n-2}(1).$$

On en déduit que $\left(T_n(1)-T_{n-1}(1)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite constante. La constante est donnée par $T_1(1)-T_0(1)=1$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$,

$$T_n(1) = 1+T_{n-1}(1).$$

La suite $\left(T_n(1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 1 et de premier terme $T_0(1)=1$. Par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_n(1) = n+1.$$

20. Soit $\theta \in]0,\pi[$. On a bien $\sin\theta \neq 0$ et l'expression est bien définie.
Prouvons par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(n): \; T_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

→ *Initialisation.* On a

$$\mathrm{T}_0(\cos\theta) = 1 = \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin((0+1)\theta)}{\sin\theta}.$$

De plus

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_1(\cos\theta) = 2\cos\theta &= \frac{2\cos\theta\sin\theta}{\sin\theta}\\ &= \frac{\sin(2\theta)}{\sin\theta}\\ &= \frac{\sin((1+1)\theta)}{\sin\theta}.\end{aligned}$$

Les propriétés $\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.

→ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\}$. Supposons $\mathscr{P}(n-1)$, $\mathscr{P}(n-2)$ vraies. Il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_n(\cos\theta) &= 2\cos\theta\mathrm{T}_{n-1}(\cos\theta) - \mathrm{T}_{n-2}(\cos\theta)\\ &= 2\cos\theta\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} - \frac{\sin((n-1)\theta)}{\sin\theta}.\end{aligned}$$

Or les formules trigonométriques impliquent

$$\begin{aligned}2\cos\theta\sin(n\theta) &= 2\sin(n\theta)\cos\theta\\ &= \sin(n\theta+\theta) + \sin(n\theta-\theta)\\ &= \sin((n+1)\theta) + \sin((n-1)\theta).\end{aligned}$$

Il vient

$$\mathrm{T}_n(\cos\theta) = \frac{2\cos\theta\sin(n\theta) - \sin((n-1)\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}.$$

Dès lors $\mathscr{P}(n)$ est vraie si $\mathscr{P}(n-1)$ et $\mathscr{P}(n-2)$ le sont.

→ *Conclusion.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $\theta \in]0,\pi[$,

$$\mathrm{T}_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}.$$

21. Raisonnons par équivalence

$$\begin{aligned}&\mathrm{T}_n(\cos\theta) = 0\\ \iff\ &\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta} = 0\\ \iff\ &\sin((n+1)\theta) = 0\\ \iff\ &\exists k \in \mathbb{Z}, (n+1)\theta = k\pi\\ \iff\ &\exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n+1}.\\ \iff\ &\exists k \in [\![1,n]\!],\ \ \theta = \frac{k\pi}{n+1} \quad \text{car } \ \theta \in]0;\pi[.\end{aligned}$$

Posons pour tout $k \in [[1;n]]$,

$$\theta_k = \frac{k\pi}{n+1} \quad \text{et} \quad x_k = \cos\theta_k.$$

Les réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des racines de T_n.
Or $0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n < \pi$ et la fonction cosinus est strictement décroissante sur $]0,\pi[$, donc

$$1 > x_1 > x_2 > \cdots > x_n > -1.$$

Alors $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont n racines réelles deux à deux distinctes de T_n, appartenant à $]-1,1[$. Comme T_n est de degré n, ce sont toutes les racines de T_n.

22.a) Pour tout $\theta \in]0,\pi[$,

$$\sin\theta\mathrm{T}_n(\cos\theta) - \sin((n+1)\theta) = 0.$$

En dérivant on obtient :

$$\cos\theta\mathrm{T}_n(\cos\theta) + \sin\theta(-\sin\theta)\mathrm{T}_n'(\cos\theta) - (n+1)\cos((n+1)\theta) = 0.$$

Ainsi

$$\cos\theta\mathrm{T}_n(\cos\theta) - \sin^2\theta\mathrm{T}_n'(\cos\theta) - (n+1)\cos((n+1)\theta) = 0.$$

En dérivant encore une fois

$$\begin{aligned}&-\sin\theta\mathrm{T}_n(\cos\theta) + \cos\theta(-\sin\theta)\mathrm{T}_n'(\cos\theta) - 2\cos\theta\sin\theta\mathrm{T}_n'(\cos\theta)\\ &\quad -\sin^2\theta(-\sin\theta)\mathrm{T}_n''(\cos\theta) + (n+1)^2\sin((n+1)\theta) = 0.\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}&-\sin\theta\mathrm{T}_n(\cos\theta) - 3\sin\theta\cos\theta\mathrm{T}_n'(\cos\theta) + \sin^3\theta\mathrm{T}_n''(\cos\theta)\\ &\qquad +(n+1)^2\sin((n+1)\theta) = 0\end{aligned}$$

Comme $\sin((n+1)\theta) = \sin\theta\mathrm{T}_n(\cos\theta)$, il vient

$$\begin{aligned}&-\sin\theta\mathrm{T}_n(\cos\theta) - 3\sin\theta\cos\theta\mathrm{T}_n'(\cos\theta)\\ &+\sin^3\theta\mathrm{T}_n''(\cos\theta) + (n+1)^2\sin\theta\mathrm{T}_n(\cos\theta) = 0.\end{aligned}$$

En divisant par $\sin\theta \neq 0$,

$$-\mathrm{T}_n(\cos\theta) - 3\cos\theta\mathrm{T}_n'(\cos\theta) + \sin^2\theta\mathrm{T}_n''(\cos\theta) + (n+1)^2\mathrm{T}_n(\cos\theta) = 0.$$

Ou encore :

$$\sin^2\theta\mathrm{T}_n''(\cos\theta) - 3\cos\theta\mathrm{T}_n'(\cos\theta) + \left((n+1)^2 - 1\right)\mathrm{T}_n(\cos\theta) = 0.$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta \in]0;\pi[$

$$\sin^2\theta\mathrm{T}_n''(\cos\theta) - 3\cos\theta\mathrm{T}_n'(\cos\theta) + \left(n^2 + 2n\right)\mathrm{T}_n(\cos\theta) = 0.$$

22.b) Soit $\theta \in]0;\pi[$, la relation précédente se réécrit :

$$\begin{aligned}&(1-\cos(\theta)^2\mathrm{T}_n''(\cos\theta) - 3\cos\theta\mathrm{T}_n'(\cos\theta)\\ &\qquad + \left(n^2 + 2n\right)\mathrm{T}_n(\cos\theta) = 0.\end{aligned}$$

En remarquant que pour tout réel x de $]0;1[$ peut s'exprimer sous la forme $\cos(\theta)$ (théorème des valeurs intermédiaires), on constate que le polynôme d'expression

$$\left(x^2 - 1\right)\mathrm{T}_n''(x) + 3x\mathrm{T}_n'(x) - \left(n^2 + 2n\right)\mathrm{T}_n(x)$$

s'annule pour tout $x \in]0;1[$. Ce polynôme a donc une infinité de racines, il est nul. Ce qui conclut.

23. Vérifier grâce à la question précédente que

$$\forall k \in [\![0,p]\!], \qquad \mathrm{L}\left(\mathrm{T}_k\right) = \left(k^2 + 2k\right)\mathrm{T}_k.$$

24. Soit $k \in [[0;p]]$. Comme T_k est non nul, on peut affirmer que $k^2 + k$ est valeur propre de L. On dénombre ainsi $p+1$ valeurs propres de L. Il ne peut y avoir d'autre puisque l'on sait que

$$\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(\mathrm{L})} \dim\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{L}) \leqslant p+1 = \dim\mathbb{R}_p[x].$$

Or, pas définition d'un espace propre $\dim\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{L}) \geqslant 1$. Nécessairement, tous les espaces propres sont de dimension

1. Il suffit d'un vecteur propre pour avoir une base de l'espace propre : pour tout $k \in [\![0;p]\!]$

$$E_{k^2+2k}(L) = \mathrm{Vect}(T_k).$$

25. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_p[x]$. Posons pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$u(x) = -\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} P'(x).$$

Comme $\frac{3}{2} \geqslant 1$, u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1, 1]$ par produit avec pour tout $x \in [-1;1]$,

$$\begin{aligned} u'(x) &= -\frac{3}{2}(-2x)\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} P'(x) - \left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} P''(x) \\ &= \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(3xP'(x) - \left(1-x^2\right)P''(x)\right) \\ &= \sqrt{1-x^2}\left(\left(x^2-1\right)P''(x) + 3xP'(x)\right) \\ &= \sqrt{1-x^2}L(P)(x). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\varphi(L(P), Q) = \int_{-1}^{1} u'(x)Q(x)\mathrm{d}x.$$

Intégrons par parties, les fonctions considérées sont $\mathscr{C}^1$:

$$\begin{aligned} \varphi(L(P), Q) &= \int_{-1}^{1} u'(x)Q(x)\mathrm{d}x \\ &= \left[u(x)Q(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} u(x)Q'(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Or $u(1) = u(-1) = 0$, le crochet est nul et

$$\varphi(L(P), Q) = -\int_{-1}^{1} u(x)Q'(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} P'(x)Q'(x)\mathrm{d}x.$$

Par symétrie des rôles de P et Q ,on a aussi

$$\varphi(L(Q), P) = \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} Q'(x)P'(x)\mathrm{d}x.$$

Ce qui permet d'établir l'égalité demandée.

26. Soient $i, j \in [\![0;p]\!]$ avec $i \neq j$. On a d'une part

$$L(T_i) = (i^2 + 2i)T_i$$

puis, par linéarité de l'intégrale

$$\varphi\left(L(T_i), T_j\right) = (i^2+i)\varphi(T_i, T_j).$$

D'autre part, on a aussi

$$\varphi\left(T_i, L(T_j)\right) = (j^2+j)\varphi(T_i, T_j).$$

Or avec la question précédente

$$\varphi\left(L(T_i), T_j\right) = \varphi\left(T_i, L(T_j)\right)$$

donc

$$(i^2+i)\varphi(T_i, T_j) = (j^2+j)\varphi(T_i, T_j).$$

Comme la fonction $x \longmapsto x^2 + x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, $i^2 + i \neq j^2 + j$. Nécessairement

$$\varphi(T_i, T_j) = 0.$$

Remarque. Nous verrons que ce calcul traduit le fait que la famille $(T_i)_{i\in[\![0;p]\!]}$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire représenté par φ.

Problème 3

27. Voir exercice du cours.

28. Soient π_1, π_2, deux polynômes minimaux de M. On a par définition

$$\pi_1 \mid \pi_2 \quad \text{et} \quad \pi_2 \mid \pi_1.$$

Il existe donc $Q, R \in \mathbb{R}[x]$ tels que

$$\pi_1 = Q\pi_2 \quad \text{et} \quad \pi_2 = R\pi_1.$$

En particulier

$$\deg(\pi_1) \leqslant \deg(\pi_2) \quad \text{et} \quad \deg(\pi_1) \geqslant \deg(\pi_2).$$

On retrouve l'égalité $\deg(\pi_1) = \deg(\pi_2)$. Mais pour des questions de degrés, Q (et R) sont nécessairement des polynômes constantes. Il existe donc $c \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\pi_1 = c\pi_2.$$

Or, en étudiant le coefficient dominant, on a directement $1 = 1 \times c$. D'où $c = 1$ et

$$\pi_1 = \pi_2.$$

Cela prouve l'unicité.

29. Raisonnons par l'absurde on supposant que π_M admet une racine réelle α qui ne soit pas une valeur propre de M. Soit $\tilde{Q} \in \mathbb{R}[x]$ tel que $\tilde{Q}(x)(x-\alpha) = \pi_M(x)$. On a donc

$$\tilde{Q}(M)\,(M - \alpha I_n) = \pi_M(M) = 0_n.$$

Comme $\alpha \notin \mathrm{Sp}(M)$, $M - \alpha I_n$ est une matrice inversible. $(M - \alpha I_n)^{-1}$ a un sens et

$$\tilde{Q}(M) = 0_n\,(M - \alpha I_n)^{-1} = 0_n.$$

On en déduit que $\tilde{Q}$ est annulateur de M. Absurde, car

$$\deg \tilde{Q} < \deg \pi_M$$

et π_M est, par hypothèse, un polynôme annulateur de degré minimal. En conclusion, toute racine de π_M est valeur propre de M.

30. D'après le code python le polynôme d'expression

$$P(x) = x^2 - 3x + 2$$

est annulateur de M et de coefficient dominant 1. Comme M n'est pas du type λM, on peut aussi affirmer qu'aucun polynôme de degré 1 est annulateur de M. Puisque le polynôme minimal est celui de plus petite degré parmi les polynômes annulateur, on a bien

$$\pi_M(x) = P(x) = x^2 - 3x + 2.$$

31. Comme M admet n valeurs propres distinctes, il en va de même pour φ. On considère une famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ constituée de vecteurs propres de φ associés à des valeurs propres différentes. D'après le cours, cette famille est libre.

Comme est contient autant de vecteurs que la dimension de $\mathbb{R}^n$, c'est une base de $\mathbb{R}^n$.

32. Notons $\mathscr{B}$, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Par définition de φ,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \mathrm{M}.$$

Or, la famille $\mathscr{C}$ étant constituée de vecteurs propre, la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi) = \mathrm{D}$$

est diagonale.
Ensuite par la formule de changement de base

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi) \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}{}^{-1}.$$

Ce qui conclut.

33.a) Posons $\mathrm{P} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on montre par récurrence que

$$\mathrm{M}^k = \mathrm{PD}^k\mathrm{P}^{-1}.$$

Autrement dit, pour tout monôme $\mathrm{Q}(x) = x^k$, on a

$$\mathrm{Q}(\mathrm{M}) = \mathrm{PQ}(\mathrm{D})\mathrm{P}^{-1}.$$

Cette relation s'étend à tout polynôme Q par linéarité. On en déduit que Q(M) et Q(D) sont semblables.
Ce calcul montre en particulier qu'un polynôme est annulateur de M si et seulement si il est annulateur de D.

33.b) Posons

$$\mathrm{Q}_0(x) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})} (x - \lambda).$$

Comme le spectre de M correspond aux coefficients diagonaux de D, on montre que $\mathrm{Q}_0(\mathrm{D}) = 0_n$. Puis $\mathrm{Q}_0(\mathrm{M}) = 0_n$. Or, le degré de π_M est au moins n car il doit contenir les n valeurs propres de M. Nécessairement,

$$\pi_\mathrm{M} = \mathrm{Q}.$$

34. Comme λ est valeur propre de A, il existe Y, vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Par définition Y est une matrice colonne non nulle et

$$\mathrm{AY} = \lambda\mathrm{Y}.$$

Par ailleurs, λ est aussi valeur propre de ${}^t\mathrm{B}$ puisque $\mathrm{B} - \lambda\mathrm{I}_n$ est non inversible, sa transposée ${}^t\mathrm{B} - \lambda\mathrm{I}_n$ est aussi non inversible. D'où l'existence de Z non nulle telle que :

$${}^t\mathrm{BZ} = \lambda\mathrm{Z}.$$

35.a) Si on note y_i les coefficients de Y et z_j ceux de Z, le produit $\mathrm{Y}^t\mathrm{Z}$ est la matrice carrée $\left(y_i z_j\right)_{i,j \in [\![1,n]\!]}$. De plus, Y et Z sont non nuls, on peut donc choisir deux indices i, j tels que $y_i \neq 0$ et $z_j \neq 0$. Ainsi $y_i z_j \neq 0$ et la matrice $\mathrm{Y}^t\mathrm{Z}$ est bien on nulle.

35.b) Enfin

$$\begin{aligned}
f\left(\mathrm{Y}^t\mathrm{Z}\right) &= \mathrm{AY}^t\mathrm{Z} - \mathrm{Y}^t\mathrm{ZB} \\
&= \lambda\mathrm{Y}^t\mathrm{Z} - \mathrm{Y}^t\left({}^t\mathrm{BZ}\right) \\
&= \lambda\mathrm{Y}^t\mathrm{Z} - \mathrm{Y}^t(\lambda\mathrm{Z}) \\
f\left(\mathrm{Y}^t\mathrm{Z}\right) &= 0_n.
\end{aligned}$$

Le noyau de f n'est pas réduit à l'espace nul, f n'est pas injective et donc ni un isomorphisme.

36.a) Pour un endomorphisme en dimension finie, on a l'équivalence entre l'injectivité et la bijectivité. Donc si f n'est pas un isomorphisme, f n'est pas injectif et sont noyau n'est pas réduit à l'espace nul. Il peut donc prendre $\mathrm{M}_0 \in \mathrm{Ker}(f)$ avec $\mathrm{M}_0 \neq 0_n$.

36.b) On prouve par récurrence (la faire) que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{A}^k\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}_0\mathrm{B}^k.$$

Puis, par combinaison linéaire des relations précédentes :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[x], \qquad \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}_0\mathrm{P}(\mathrm{B}).$$

37. On sait que $\pi_\mathrm{A}(\mathrm{A}) = 0_n$. En prenant $\mathrm{P} = \pi_\mathrm{A}$ dans la relation précédente, il vient $\mathrm{M}_0\pi_\mathrm{A}(\mathrm{B}) = 0_n$. Si $\pi_\mathrm{A}(\mathrm{B})$ étant inversible, il existerait une matrice C telle que $\pi_\mathrm{A}(\mathrm{B})\mathrm{C} = \mathrm{I}_n$. On aura alors

$$\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}_0 \cdot \mathrm{I}_n = \mathrm{M}_0\pi_\mathrm{A}(\mathrm{B})\mathrm{C} = 0_n \cdot \mathrm{C} = 0_n.$$

Absurde puisque $\mathrm{M}_0 \neq 0_n$. Finalement, $\pi_\mathrm{A}(\mathrm{B})$ n'est pas inversible.

38.a) Comme A et B n'ont aucune valeur propre en commun, si λ appartient au spectre de A alors λ ne peut appartenir au spectre de B et la matrice $\mathrm{B} - \lambda\mathrm{I}_n$ est alors inversible.

38.b) Par produit, la matrice

$$\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})} (\mathrm{B} - \lambda\mathrm{I}_n) = \pi_\mathrm{A}(\mathrm{B})$$

est inversible. C'est en contradiction directe avec le résultat de la question 37. On en déduit que A et B ont une valeur propre commune.

39. Notons :
- $\mathscr{P}$: f est un isomorphisme.
- $\mathscr{Q}$: A et B n'ont aucune valeur commune.

Aux questions 34, 35, on a prouvé

$$\text{NON } \mathscr{Q} \quad \Rightarrow \quad \text{NON } \mathscr{P}.$$

C'est-à-dire la contraposée de

$$\mathscr{P} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{Q}.$$

Aux questions 36, 37, 38, on a prouvé

$$\text{NON } \mathscr{P} \quad \Rightarrow \quad \text{NON } \mathscr{Q}.$$

D'où

$$\mathscr{Q} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{P}.$$

En résumé, on a bien l'équivalence

$$\mathscr{P} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathscr{Q}.$$

40.a) Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
(f - \mu\,\mathrm{id})(\mathrm{M}) &= \mathrm{AM} - \mathrm{MB} - \mu\mathrm{M} \\
&= \left(\mathrm{A} - \mu\mathrm{I}_n\right)\mathrm{M} - \mathrm{MB}.
\end{aligned}$$

40.b) Notons que

$$\operatorname{Sp}\left(A-\mu I_n\right)=\left\{\alpha-\mu \mid \alpha\in\operatorname{Sp}(A)\right\}.$$

En effet

$$\begin{aligned}
\alpha-\mu\in\operatorname{Sp}\left(A-\mu I_n\right) &\iff \operatorname{rg}\left(A-\mu I_n-(\alpha-\mu)I_n\right)<n\\
&\iff \operatorname{rg}(A-\alpha I_n)<n\\
&\iff \alpha\in\operatorname{Sp}(A).
\end{aligned}$$

Ainsi $\mu\in\operatorname{Sp}(f)$ ssi $f-\mu\,\mathrm{id}$ n'est pas un isomorphisme ssi $A-NI_n$ et B ont une valeur propre commune ssi il existe $\beta\in\operatorname{Sp}(B)$ et $\alpha\in\operatorname{Sp}(A)$ tels que

$$\beta=\alpha-\mu.$$

D'où le résultat.

DS 1 * - solution

Exercice 1

1.a) La fonction $f : t \to \frac{t^{x-1}}{e^t+1}$ est continue sur $]0,+\infty[$. L'intégrale $I(x)$ est généralisée en 0 et $+\infty$.

- *Étude en 0*
On a
$$e^t + 1 \sim_0 2, \quad \text{puis} \quad f(t) \sim_0 \frac{1}{2} t^{x-1}.$$
Or l'intégrale de Riemann
$$\int_0^1 t^{x-1}\,dt$$
converge car $x-1 > -1$. Par application du critère d'équivalence d'intégrales de fonctions positives $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{e^t+1}\,dt$ converge.

- *Étude en $+\infty$*
On a
$$e^t + 1 \sim_{+\infty} e^t, \quad \text{d'où} \quad f(t) \sim_{+\infty} t^{x-1}e^{-t}$$
et l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ converge, car $x > 0$, d'après les propriétés de la fonction Γ. Par application du critère d'équivalence d'intégrales de fonctions positives $\int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t+1}\,dt$ converge.

- Finalement, l'intégrale $I(x)$ est convergente pour tout réel $x > 0$.

1.b) On a
$$\forall n \geqslant 1, \quad \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right| = \frac{1}{n^x}$$
et puisque $x > 1$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^x}$ converge. On en déduit la convergence absolue de la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ et donc la convergence.

2. Utilisons le changement de variable $u = nt$, soit $t = \frac{u}{n}$. La fonction $\varphi : u \mapsto \frac{u}{n}$ réalise une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0,+\infty[$ sur lui-même. Les intégrales
$$J_n(x) \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{n}\right)^{x-1} e^{-u}\frac{1}{n}\,du$$
sont de même nature et égales si elles convergent.
Or, pour tout réel $u > 0$,
$$\left(\frac{u}{n}\right)^{x-1} e^{-u}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^x}u^{x-1}e^{-u}.$$
D'où, J_n converge car $\Gamma(x)$ converge et
$$J_n(x) = \frac{1}{n^x}\Gamma(x).$$

3. Par définition et d'après le résultat précédent,
$$\begin{aligned}
&I(x) - \Gamma(x)\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t+1}\,dt - \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-nt}\,dt\\
&= \int_0^{+\infty}\left(\frac{t^{x-1}}{e^t+1} - \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}t^{x-1}e^{-nt}\right)dt\\
&= \int_0^{+\infty} t^{x-1}\left(\frac{1}{e^t+1} - \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}e^{-nt}\right)dt\\
&= \int_0^{+\infty} t^{x-1}\left(\frac{1}{e^t+1} - e^{-t}\sum_{n=1}^{N}\left(-e^{-t}\right)^{n-1}\right)dt.
\end{aligned}$$
Pour $t \in \mathbb{R}_*^+$, on reconnaît une somme géométrique de raison $-e^{-t}$
$$\sum_{n=1}^{N}\left(-e^{-t}\right)^{n-1} = \frac{1-\left(-e^{-t}\right)^N}{1+e^{-t}}.$$
Ce qui amène à :
$$\begin{aligned}
&I(x) - \Gamma(x)\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\\
&= \int_0^{+\infty} t^{x-1}\left(\frac{1}{e^t+1} - e^{-t}\frac{1-(-1)^N e^{-Nt}}{1+e^{-t}}\right)dt\\
&= \int_0^{+\infty} t^{x-1}\left(\frac{1}{e^t+1} - \frac{1-(-1)^N e^{-Nt}}{e^t+1}\right)dt.
\end{aligned}$$
Finalement :
$$I(x) - \Gamma(x)\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\frac{(-1)^N e^{-Nt}}{e^t+1}\,dt.$$

4. Pour tout réel $t > 0$,
$$\left|t^{x-1}\frac{(-1)^N e^{-Nt}}{e^t+1}\right| \leqslant t^{x-1}e^{-Nt}.$$
Alors par croissance de l'intégrale avec les bornes dans le bon sens
$$\left|\int_0^{+\infty} t^{x-1}\frac{(-1)^N e^{-Nt}}{e^t+1}\,dt\right| \leqslant \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-Nt}\,dt = J_N(x).$$
Or, d'après la question 2., $J_N(x) = \frac{\Gamma(x)}{N^x}$, ce qui montre que
$$\lim_{N\to+\infty} J_N(x) = 0$$
puis, par encadrement,
$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} t^{x-1}\frac{(-1)^N e^{-Nt}}{e^t+1}\,dt = 0.$$

Et avec la question 3, il vient

$$\lim_{N\to+\infty}\left(\mathrm{I}(x)-\Gamma(x)\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)=0.$$

Précisons que $\Gamma(x)$ est à valeurs strictement positives comme intégrale d'une fonction continue positive non identiquement nulle. D'où

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}=\frac{\mathrm{I}(x)}{\Gamma(x)}.$$

Ainsi $\eta(x)$ est définie pour tout $x>0$ avec

$$\eta(x)=\frac{\mathrm{I}(x)}{\Gamma(x)}.$$

5.

```
def etaN(x,N):
    s=0
    for n in range(1,N+1):
        s+=(-1)**(n-1)/n**x
    return S
```

6.

```
import numpy as np
def etaN2(x,N):
    s=0
    S=np.zeros(N)

    for n in range(1,N+1):
        s+=(-1)**(n-1)/n**x
        S[n-1]=s
    return S
```

7. On conjecture que les deux suites sont adjacentes et donc convergente vers une limite commune qui est

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Remarque. On peut montrer que la somme vaut $\ln(2)$.

Problème 1

8.

```
import numpy as np

def SuiteU(a,b,theta,n):
    Uold=a
    if n==0 :
        return Uold

    Unew=b

    for k in range(1,n):
        Uinter=Uold
        Uold=Unew
        Unew=2*np.cos(theta)*Unew-Uinter
    return Unew
```

9. Il est admis dans l'énoncé que E_θ est un sous-espace vectoriel.
Comme il suffit des deux premiers termes u_0, u_1 pour définir la suite u de E_θ, vérifier que l'application

$$\Phi:\left\{\begin{array}{ccc}\mathrm{E}_\theta & \to & \mathbb{R}^2\\ u & \mapsto & (u_0;u_1)\end{array}\right.$$

définit un isomorphisme. En particulier,

$$\dim \mathrm{E}_\theta=\dim\mathbb{R}^2=2.$$

10.a) Soit $k\in\mathbb{N}$,

$$2c_{k+1}(\theta)\cos(\theta)=2\cos((k+1)\theta)\cos(\theta).$$

Or on a aussi

$$\begin{aligned}\cos\big((k+2)\theta\big)&=\cos\big((k+1)\theta+\theta\big)\\&=\cos\big((k+1)\theta\big)\cos(\theta)-\sin\big((k+1)\theta\big)\sin(\theta)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\cos(k\theta)&=\cos\big((k+1)\theta-\theta\big)\\&=\cos\big((k+1)\theta\big)\cos(\theta)+\sin\big((k+1)\theta\big)\sin(\theta).\end{aligned}$$

Par somme, on en déduit que

$$\cos(k\theta)+\cos\big((k+2)\theta\big)=2c_{k+1}(\theta)\cos(\theta).$$

Soit

$$c_{k+2}(\theta)-2c_{k+1}(\theta)\cos\theta+-_k(\theta)=0.$$

Ce qui permet d'avoir

$$c(\theta)\in\mathrm{E}_\theta.$$

On a de même $s(\theta)\in\mathrm{E}_\theta$.
Comme les deux suites $c(\theta)$ et $s(\theta)$ ne sont pas colinéaires et que E_θ est de dimension 2, on peut affirmer qu'elles forment une base de E_θ.

10.b) Dans ce cas, la relation de récurrence devient

$$u\in\mathrm{E}_0\quad\Longleftrightarrow\quad\forall k\in\mathbb{N}\quad u_{k+2}=2u_{k+1}-u_k.$$

Or pour tout $k\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}k+2&=2(k+1)-k\\1&=2\times1-1.\end{aligned}$$

Les suites $(k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(1)_{k\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E_0. Or ces suites sont non colinéaires et E_0 est de dimension 2, elles forment une base.

11. Soient u, $v\in\mathrm{F}_k$ et $\lambda,\mathrm{N}\in\mathbb{R}$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}(\lambda u+\mu v)_{k+2}&=\lambda u_{k+2}+\mu v_{k+2}\\&=\lambda\big(2u_{k+1}\cos(\theta)-u_k\big)+\mu\big(2v_{k+1}\cos(\theta)-v_k\big)\\&=2\cos(\theta)\big(\lambda u_{k+1}+\mu v_{k+1}\big)+\big(\lambda u_k+\mu v_k\big)\\&=2\cos(\theta)(\lambda u+\mu v)_{k+1}-(\lambda u+\mu v)_k.\end{aligned}$$

Ainsi $\lambda u+\mu v$ vérifie bien la relation.
Remarque. On pouvait éviter ce calcul en disant que l'énoncé admettait que E_0 *est un espace vectoriel.*
De plus

$$\begin{aligned}(\lambda u+\mu v)_0&=\lambda u_0+\mu v_0=\lambda0+\mu0=0\\(\lambda u+\mu v)_{n+1}&=\lambda u_{n+1}+\mu v_{n+1}=0.\end{aligned}$$

Enfin F_θ est non vide car il contient la suite nulle. Finalement F est un sous-espace vectoriel de E_0.

- Si $\theta = 0$. Soit $u \in F_\theta$. Alors $u \in E_\theta$ et d'après la question précédente, il existe deux réels λ, μ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad u_k = \lambda + \mu k.$$

Or les conditions aux bords $u_0 = u_{n+1} = 0$ imposent

$$\lambda = 0 \quad \text{et} \quad \lambda + \mu(n+1) = 0.$$

Nécessairement $\lambda = \mu = 0$ et u est la suite nulle. Comme F_0 contient la suite nulle, F ne contient que la suite nulle.

12. Soit $\theta \in]0,\pi[$. Soit $u \in F_\theta$. Alors $u \in E_\theta$ et d'après la question précédente, il existe deux réels λ, μ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = \lambda \cos k\theta + \mu \sin k\theta.$$

Les conditions $u_0 = u_{n+1} = 0$ imposent

$$\begin{cases} \lambda \cos(0\cdot\theta) + \mu \sin(0\theta) & = 0 \\ \lambda \cos\big((n+1)\theta\big) + \mu \sin\big((n+1)\theta\big) & = 0 \end{cases}$$

$$\iff$$

$$\begin{cases} \lambda & = 0 \\ \mu \sin\big((n+1)\theta\big) & = 0. \end{cases}$$

Si $\theta \neq \frac{p\pi}{n+1}$ pour un $p \in [\![1,n]\!]$ (puisque $(n+1)\theta \in]0,(n+1)\pi[$), alors $\sin\big((n+1)\theta\big)$ est non nul et on a $\mu = 0$.
Finalement $F_\theta = \{0\}$.

13. Lorsque θ est de la forme $\frac{p\pi}{n+1}$, d'après le système de la question précédente (avec $\sin\big((n+1)\theta\big) = 0$), on a maintenant $\lambda = 0$ et aucune condition sur μ. Une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc dans F_θ lorsque

$$(u_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\mu \sin k\theta)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Puisque $(s_k(\theta))_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas la suite nulle, $(s_1(\theta) = \sin\theta \neq 0)$, c'est une base de F_θ qui est donc de dimension 1.

14.a) Un élément $X = (x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dans le noyau de A_θ lorsque l'on a $A_\theta X = 0$. C'est équivalent au système linéaire à n inconnues et n équations

$$\begin{cases} 2\cos\theta x_1 - x_2 = 0 \\ \vdots \\ -x_{i-1} + 2\cos\theta x_i - x_{i+1} = 0 \quad i \in [[2; n-1]] \\ \vdots \\ -x_{n-1} + 2\cos\theta x_n = 0 \end{cases}$$

14.b) Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $X \in \operatorname{Ker} A_\theta$, soit la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, définie par récurrence à partir du rang $n+2$, vérifiant

$$\begin{cases} x_0 & = & 0 & \\ & \vdots & & \\ x_i & = & x_i & (\forall i \in [\![1,n]\!]) \\ & \vdots & & \\ x_{n+1} & = & 0 & \\ x_{i+1} & = & 2\cos\theta x_i - x_{i-1} & (\forall i > n) \end{cases}$$

cette suite $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien dans E_θ car

$$\begin{cases} -x_0 + 2\cos\theta x_1 - x_2 = 0 \\ -x_{i-1} + 2\cos\theta x_i - x_{i+1} = 0 \\ -x_{n-1} + 2\cos\theta x_n - x_{n+1} = 0 \\ -x_{i-1} + 2\cos\theta x_i - x_{i+1} = 0 \end{cases} \quad (\forall i \in [\![2, n-1]\!])$$

La suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est même dans F_θ puisque $x_0 = x_{n+1} = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in F_\theta$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad -u_{k-1} + 2\cos\theta u_k - u_{k+1} = 0$$

et $u_0 = u_{n+1} = 0$, donc, en particulier

$$\begin{cases} 2\cos\theta u_1 - u_2 & = 0 \\ \vdots & \\ -u_{i-1} + 2\cos\theta u_i - u_{i+1} & = 0 \quad (\forall i \in [\![2, n-1]\!]) \\ \vdots & \\ -u_{n-1} + 2\cos\theta u_n & = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $(u_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \in \operatorname{Ker} A_\theta$.

15.a,b) On a donc

$$(x_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \in \operatorname{Ker} A_\theta \iff (x_k)_{k\in\mathbf{N}} \in F_\theta$$

où $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est définie à partir de $(x_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ comme dans la question précédente.
On a donc

$$\operatorname{Ker} A_\theta = \operatorname{Vect}\left(\left(s_k\left(\frac{p\pi}{n+1}\right)\right)_{k\in[\![1,n]\!]}\right),$$

d'où :

- Si $\theta \in \left\{\frac{p\pi}{n+1} \mid p \in [\![1,n]\!]\right\}$ alors

$$\operatorname{Ker} A_\theta \neq \{0\} \quad \text{et } A_\theta \text{ est non inversible .}$$

- Sinon

$$\operatorname{Ker} A_\theta = \{0\} \text{ et } A_\theta \text{ est inversible.}$$

16.a) Soit X un vecteur propre associé à λ, on a $(A - \lambda I_n)X = 0$.
On en déduit le système linéaire

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 - x_2 = 0 \\ \vdots \\ -x_{i-1} + (2-\lambda)x_i - x_{i+1} = 0 \quad i \in [\![2, n-1]\!] \\ \vdots \\ -x_{n-1} + (2-\lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

Quitte à poser $x_0 = x_{n+1} = 0$, le système devient

$$\forall i \in [\![2, n-1]\!], \qquad x_{i-1} + (2-\lambda)x_i - x_{i+1} = 0.$$

Soit i_0 un indice de $[\![1,n]\!]$ tel que

$$|x_{i_0}| = \operatorname{Max}_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i|.$$

en regardant la i_0-ième équation du système ci-dessus

$$x_{i_0-1}+(2-\lambda)x_{i_0}-x_{i_0+1}=0.$$

Puis par l'inégalité triangulaire

$$|2-\lambda|\left|x_{i_0}\right|=\left|x_{i_0-1}+x_{i_0+1}\right|\leqslant\left|x_{i_0-1}\right|+\left|x_{i_0+1}\right|.$$

Or, X est un vecteur propre. Il est non nul et $\left|x_{i_0}\right|\neq 0$. Il vient

$$|2-\lambda|\leqslant\frac{\left|x_{i_0-1}\right|}{\left|x_{i_0}\right|}+\frac{\left|x_{i_0+1}\right|}{\left|x_{i_0}\right|}\leqslant 1+1=2.$$

16.b) On en déduit que

$$\frac{2-\lambda}{2}\in[-1;1].$$

Or la fonction cosinus est continue avec $\cos(0)=1$, $\cos(\pi)=-1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\theta\in[0,\pi]$ tel que

$$\frac{2-\lambda}{2}=\cos(\theta).$$

Ce qui permet d'obtenir le résultat.

17. En posant $\lambda=2(1-\cos\theta)$, $A-\lambda I_n=A-2(1-\cos\theta)I_n=A_\theta$, puis

$$\operatorname{Ker}(A-\lambda I_n)=\operatorname{Ker}\left(A_\theta\right),$$

l'espace propre $\operatorname{Ker}A_\theta$ est non réduit à $\{0\}$ lorsque θ est de la forme $\frac{p\pi}{n+1}$, c'est-à-dire pour

$$\lambda\in\left\{2\left(1-\cos\frac{p\pi}{n+1}\right)\mid p\in[\![1,n]\!]\right\}.$$

Ces valeurs propres sont distinctes car la fonction $p\mapsto 2\left(1-\cos\frac{p\pi}{n+1}\right)$ est strictement croissante sur $[0,\pi]$ avec

$$\lambda_1=2\left(1-\cos\frac{\pi}{n+1}\right)<\ldots<\lambda_n=2\left(1-\cos\frac{n\pi}{n+1}\right).$$

18. Rappelons que la dimension de chaque sous-espace propre est au moins 1 et

$$\sum_{\lambda\in\operatorname{Sp}(A)}\dim E_\lambda(A)\leqslant n.$$

Comme A a exactement n valeurs propres, nécessairement pour tout valeur propre de A

$$\dim E_\lambda(A)=1.$$

19. Un vecteur propre X_p associé à λ_p est dans

$$\operatorname{Ker}\left(A_{\frac{p\pi}{n+1}}\right)=\operatorname{Vect}\left(\left(s_k\left(\frac{p\pi}{n+1}\right)\right)_{k\in[\![1,n]\!]}\right),$$

si l'on impose la première composante $\sin\frac{p\pi}{n+1}$, X_p est précisément $\left(s_k\left(\frac{p\pi}{n+1}\right)\right)_{k\in[\![1,n]\!]}$, on a

$$X_p=\begin{bmatrix}\sin\left(\frac{p\pi}{n+1}\right)\\ \sin\left(\frac{2p\pi}{n+1}\right)\\ \vdots\\ \sin\left(\frac{np\pi}{n+1}\right)\end{bmatrix}.$$

20. On a ${}^tX_p\in\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X_q\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit ${}^tX_pAX_q$ est donc une matrice de taille 1. Toute matrice de taille 1 est symétrique, donc égale à sa transposée. Il vient en utilisant le fait que A est symétrique

$${}^t\left({}^tX_pAX_q\right)={}^tX_q{}^tA^t\left({}^tX_p\right)={}^tX_qAX_p,$$

De même

$${}^t\left({}^tX_pX_q\right)={}^tX_q{}^t\left({}^tX_p\right)={}^tX_qX_p.$$

$${}^tX_pAX_q={}^tX_p\lambda_qX_q=\lambda_q{}^tX_pX_q$$

et

$${}^tX_qAX_p={}^tX_q\lambda_pX_p=\lambda_p{}^tX_qX_p=\lambda_p{}^tX_pX_q.$$

On en déduit que

$$\lambda_q{}^tX_pX_q=\lambda_p{}^tX_pX_q.$$

Comme $\lambda_q\neq\lambda_p$, on obtient ${}^tX_pX_q=0$.

21. La matrice A est inversible. Il y a une unique solution donnée par

$$X=A^{-1}B.$$

22.a) Posons $w_0=w_{n+1}=\frac{0(n+1-0)}{2}=0$, la k-ième ligne du vecteur AW est

$$\begin{aligned}&-w_{k-1}+2w_k-w_{k+1}\\ &=\frac{(k-1)(n+1-k+1)}{2}+2\frac{k(n+1-k)}{2}-\frac{(k+1)(n+1-k-1)}{2}\\ &=\frac{(n+1-k)}{2}(-(k-1)+2k-(k+1))-\frac{k-1}{2}-\frac{(k+1)(-1)}{2}\\ &=\frac{k+1-(k-1)}{2}\\ &=1.\end{aligned}$$

On a donc bien l'égalité $AW=V$.

22.b) Par une étude de fonction, on montre que le maximum de la fonction polynomiale de degré 2 $x\mapsto x(a-x)$ sur $[0,a]$ est atteint pour $x=\frac{a}{2}$. On trouve $\frac{a^2}{4}$.

Il vient

$$\begin{aligned}N(W)&=\operatorname{Max}_{k\in[\![1,n]\!]}\left|w_k\right|\\ &=\frac{1}{2}\operatorname{Max}_{k\in[\![1,n]\!]}k(n+1-k)\\ N(W)&\leqslant\frac{1}{2}\frac{n+1}{4}=\frac{(n+1)}{8}.\end{aligned}$$

23.a) Soit i_0 le plus grand indice i tel que $x_i=\operatorname{Min}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Si $i_0\notin\{1,n\}$.

On a donc $x_{i_0-1}\geqslant x_{i_0}<x_{i_0+1}$ et la i_0-ème ligne du système $AX=B$ donne :

$$-x_{i_0-1}+2x_{i_0}-x_{i_0+1}=b_{i_0}.$$

Il vient

$$\begin{aligned}x_{i_0+1}&=2x_{i_0}-x_{i_0-1}-b_{i_0}\\ &=x_{i_0}+\left(x_{i_0}-x_{i_0-1}\right)-b_{i_0}\\ &\leqslant x_{i_0}-b_{i_0}\\ &\leqslant x_{i_0}\end{aligned}$$

Absurde par définition de i_0.

23.b) On a $i_0 \in \{1, n\}$.

→ Si $i_0 = 1$, alors la première ligne donne

$$0 \leqslant b_1 = 2x_1 - x_2 = (x_1 - x_2) + x_1 \leqslant x_1 = \mathrm{Min}_{i \in [\![1,n]\!]} x_i.$$

→ Si $i_0 = n$, la dernière ligne implique

$$0 \leqslant b_n = -x_{n-1} + 2x_n = (x_n - x_{n-1}) + x_n \leqslant x_n = \mathrm{Min}_{i \in [\![1,n]\!]} x_n$$

Dans tous les cas, la plus petites valeurs des x_i est positives. Tous les x_i sont positifs.

24.a) $\mathrm{N(B)V + B}$ est $\left(\mathrm{Max}_{j \in [\![1,n]\!]} |b_i|\right) 1 + b_i \geqslant 0$, les composantes de Y et Z sont positives.

→ Si $\mathrm{AX = B}$, $\mathrm{A(N(B)W - X) = N(B)AW - AX = N(B)V - B = Y}$, les composantes de Y étant positives, d'après la question précédente, les composantes de $\mathrm{N(B)W - X}$ sont positives.
De même, $\mathrm{A(N(B)W + X) = N(B)AW + AX = N(B)V + B = Z}$, les composantes de Z étant positives, d'après la question précédente, les composantes de $\mathrm{N(B)W + X}$ sont positives.
On a donc, $\forall k \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathrm{N(B)}w_k - x_k \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{N(B)}w_k + x_k \geqslant 0,$$

ce qui entraîne $-n(\mathrm{B})w_k \leqslant x_k \leqslant \mathrm{N(B)}w_k$, c'est-à-dire

$$|x_k| \leqslant \mathrm{N(B)}w_k.$$

24.b) On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{N(X)} &= \max_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k| \\
&\leqslant \max_{k \in [\![1,n]\!]} \mathrm{N(B)} |w_k| \\
&= \mathrm{N(B)} \max_{k \in [\![1,n]\!]} |w_k| \\
&= \mathrm{N(B)N(W)} \\
&\leqslant \mathrm{N(B)} \frac{(n+1)^2}{8} \\
\mathrm{N(X)} &\leqslant \frac{(n+1)^2}{8} \mathrm{N(B)}.
\end{aligned}$$

25. Si on note G et H deux primitives respectivement des fonctions continues $t \mapsto (t-1)g(t)$ et $t \mapsto tg(t)$, on a pour tout $x \in [0;1]$

$$\mathrm{L}(x) = x\big(\mathrm{G}(1) - \mathrm{G}(x)\big) + (x-1)\big(\mathrm{H}(x) - \mathrm{H}(0)\big).$$

Les fonctions G et H sont de classe $\mathscr{C}^1$. Par produit et somme, la fonction L est dérivable sur $[0;1]$ avec pour tout $x \in [0;1]$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{L}'(x) \\
&= \int_x^1 (t-1)g(t)\,\mathrm{d}t - x(x-1)g(x) + (x-1)xg(x) + \int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_x^1 (t-1)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On constate que L' est dérivable sur $[0,1]$ pour des raisons similaires et

$$\mathrm{L}''(x) = -(x-1)g(x) + xg(x) = g(x).$$

26. Si f vérifie les quatre conditions ci-dessus, on a $(f - \mathrm{L})'' = g - g = 0$, donc $f - \mathrm{L}$ est nécessairement un polynôme de degré 1 :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x) = \mathrm{L}(x) + \alpha x + \beta.$$

On doit avoir $f(0) = \mathrm{L}(0) + \alpha 0 + \beta = \beta = a$ et $f(1) = \mathrm{L}(1) + \alpha 1 + \beta = \alpha + \beta = b$, d'où $\beta = a$ et $\alpha = b - a$,

$$f(x) = \mathrm{L}(x) + (b-a)x + a.$$

On a montré l'unicité, puisque f est nécessairement de la forme ci-dessus.
L'existence découle du fait que $x \mapsto \mathrm{L}(x) + (b-a)x + a$ est $\mathscr{C}^2[0,1]$ car L l'est, de dérivée seconde g et vérifie bien $\mathrm{L}(0) = a$ et $\mathrm{L}(1) = b$.

27.a) Si g est de classe $\mathscr{C}^2$ alors L est de classe $\mathscr{C}^4$ puisque puisque $\mathrm{L}'' = g$. Comme tout polynôme est aussi de classe $\mathscr{C}^4$, on en déduit par somme que f est aussi de classe $\mathscr{C}^4$.

27.b) Comme g'' est continue sur un segment, le maximum M_2 est bien défini. La formule de Taylor Lagrange s'applique avec

$$\begin{aligned}
&\left| f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x) \right| \\
&\leqslant \frac{|h^4|}{4!} \mathrm{Max}_{t \in [x, x+h]} \left| f^{(4)}(t) \right| \\
&\leqslant \frac{|h^4|}{4!} \max_{t \in [0,1]} |g''(t)|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left| f(x-h) - f(x) + hf'(x) - \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) \right| \\
&\leqslant \frac{|h^4|}{4!} \mathrm{Max}_{t \in [x-h, h]} \left| f^{(4)}(t) \right| \\
| &\leqslant \frac{|h^4|}{4!} \mathrm{Max}_{t \in [0,1]} |g''(t)|.
\end{aligned}$$

On a donc, pour x tel que $[x-h, x+h] \subset [0,1]$,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - f''(x) \right| \\
&= \frac{1}{h^2} \left| f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) - h^2 f''(x) \right| \\
&= \frac{1}{h^2} \mid f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x) \\
&\quad + f(x-h) - f(x) + hf'(x) - \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) \mid \\
&= \frac{1}{h^2} \left(\left| f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x) \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| f(x-h) - f(x) + hf'(x) - \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) \right| \right) \\
&\leqslant \frac{1}{h^2} \frac{|h^4|}{4!} 2 \max_{t \in [0,1]} |g''(t)| \\
&\leqslant \frac{\mathrm{M}_2 h^2}{12}.
\end{aligned}$$

28. On a

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} & y_0 & = & a & \\ & \frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{h^2} & = & g(x_k) & k \in [\![1,n]\!] \\ y_n & = & b & & \end{array} \right.$$

$$\iff$$

$$\begin{cases} y_0 & = & a \\ -a+2y_1-y_2 & = & -h^2 g\left(x_1\right)) \\ -y_{k-1}+2y_k-y_{k+1} & = & -h^2 g\left(x_k\right) \quad k \in [\![2, n-1]\!] \\ -y_{n-1}+2y_n-b & = & -h^2 g\left(x_n\right) \\ y_n & = & b \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} y_0 & = & a \\ 2y_1-y_2 & = & -h^2 g\left(x_1\right)+a \\ -y_{k-1}+2y_k-y_{k+1} & = & -h^2 g\left(x_k\right) \quad k \in [\![2, n-1]\!] \\ -y_{n-1}+2y_n & = & -h^2 g\left(x_n\right)+b \\ y_n & = & b \end{cases}$$

Concluons :

$$\mathrm{AY} = \mathrm{B} \quad \text{avec} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} -h^2 g\left(x_1\right)+a \\ -h^2 g\left(x_2\right) \\ \vdots \\ -h^2 g\left(x_{n-1}\right) \\ -h^2 g\left(x_n\right)+b \end{bmatrix}.$$

*Pour le dernier problème du sujet *, voir le sujet A.*