2

ALGÈBRE

Exercice 2.01.

Soit la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$T_0 = 1, T_1 = X \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant que l'on explicitera. Montrer que :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

2. Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^\pi \cos(p\theta)\cos(q\theta)\, d\theta$.

a) Montrer que pour tous réels a et b, on a :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

b) Calculer $I_{p,q}$.

3. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ est convergente. On la note $\langle P, Q\rangle$.
Montrer que $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $\|.\|$ la norme associée.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(T_0, \dots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. Cette base est-elle orthonormale ?

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\langle X^n, T_n\rangle$.

6. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$, la valeur de :

$$d = \inf_{(a_0,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \left(\sqrt{\int_{-1}^1 \frac{(t^n - (a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0))^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt}\right)$$

Solution :

1. On montre aisément par récurrence sur $n \geqslant 1$ la relation :
« $\deg(T_n) = n$, le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} et $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = (\cos n\theta)$ ».
La clé du dernier résultat est la formule : $2\cos p\cos q = \cos(p+q) + \cos(p-q)$, qui donne, en supposant la formule vraie jusqu'au rang $n+1$:

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos\theta) &= 2\cos\theta T_{n+1}(\cos\theta) - T_n(\cos\theta) = 2\cos\theta\cos(n+1)\theta - \cos n\theta \\ &= \cos(n+2)\theta. \end{aligned}$$

et la formule est encore vraie au rang $n+2$.

2. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos(p\theta)\cos(q\theta)\,d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos((p+q)\theta) + \cos((p-q)\theta))\,d\theta \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \pi & \text{si } p = q = 0\,. \\ \pi/2 & \text{si } p = q \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

3. Il y a des problèmes de convergence de l'intégrale en -1 et 1 (la fonction qu'on intègre est continue sur $]-1,1[$). Mais, au voisinage de 1 :

$$\left|\frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right| \begin{cases} \sim \dfrac{P(1)Q(1)}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}} & \text{si } P(1)Q(1) \neq 0 \\ = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right) & \text{si } P(1)Q(1) = 0 \end{cases}$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ converge, donc par le théorème de comparaison l'intégrale définissant $\langle P, Q\rangle$ converge absolument en 1. Même raisonnement en -1.

• L'expression est symétrique et linéaire par rapport à la seconde variable, par linéarité de l'intégration.

• Si $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $\langle P, P\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \geqslant 0$, par positivité de l'intégration puisqu'on intègre une fonction positive et que les bornes sont dans le sens croissant.

• Si $\langle P, P\rangle = 0$, comme la fonction intégrée est positive et continue sur $]-1,1[$, elle est nulle sur $]-1,1[$, donc P est nul sur $]-1,1[$; donc $P = 0$ (polynôme ayant une infinité de racines).

4. La famille $(T_0, \ldots, T_n)$ est échelonnée en degré, donc elle est libre. Elle est composée de $n+1$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ et cet espace est de dimension $n+1$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Comme la fonction cos est de classe C^1 strictement décroissante de $]0,\pi[$ dans $]-1,1[$, on peut faire le changement de variable $x = \cos(\theta)$, qui donne
(puisque $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ quand $\theta \in]0,\pi[$) :

$$\langle T_p, T_q\rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_p(x)T_q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi} \cos(p\theta)\cos(q\theta)\,d\theta = I_{p,q} = 0 \text{ si } p \neq q$$

Ainsi la famille $(T_0,\dots,T_n)$ est orthogonale. Elle n'est pas orthonormale puisque, par exemple $\|T_0\|^2=\pi$, ou parce que $\forall\, k\geqslant 1,\ \|T_k\|^2=\frac{\pi}{2}\neq 1$.

5. Pour $n\geqslant 1$, d'après la question 1, on a :

$$T_n-2^{n-1}X^n\in\mathbb{R}_{n-1}[X]=\mathrm{Vect}(T_0,\dots,T_{n-1})\subset T_n^{\perp}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\langle T_n,X^n\rangle &= \frac{1}{2^{n-1}}\langle T_n,T_n-(T_n-2^{n-1}X^n)\rangle\\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\|T_n\|^2+\frac{1}{2^{n-1}}\langle T_n,T_n-2^{n-1}X^n\rangle=\frac{\pi}{2^n}.\end{aligned}$$

6. d est la distance de X^n à l'espace $\mathbb{R}_{n-1}[X]$; d est donc la distance de X^n à son projeté orthogonal sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Or, comme la famille $(T_0,\dots,T_n)$ est une base orthogonale, en adaptant (par normalisation des T_k) la formule connue pour une base orthonormale, on a :

$$X^n=\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\langle T_k,X^n\rangle}{||T_k||^2T_k}}_{\in\mathrm{Vect}(T_0,\dots,T_{n-1})=\mathbb{R}_{n-1}[X]}+\underbrace{\frac{\langle T_n,X^n\rangle}{||T_n}||^2T_n}_{\in\mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}}$$

Donc : $d=\Big\|\dfrac{\langle T_n,X^n\rangle}{||T_n||^2}T_n\Big\|=\dfrac{|\langle T_n,X^n\rangle|}{||T_n||}=\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2^n}$.

Exercice 2.02.

Soit $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$.

On considère une matrice $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et une matrice $B\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Si C est une matrice carrée à coefficients réels, on rappelle que $\mathrm{Spec}(C)$ désigne l'ensemble de ses valeurs propres éventuellement complexes.

1. a) Quel est l'ordre de la matrice carrée AB ? Quel est celui de la matrice BA ?

b) Soit $\lambda\in\mathbb{R}^*$. Montrer que si X est un vecteur colonne propre de AB associé à la valeur propre λ, alors BX est un vecteur colonne propre de la matrice BA associé à la valeur propre λ.

En déduire que $\mathrm{Spec}(AB)\setminus\{0\}=\mathrm{Spec}(BA)\setminus\{0\}$.

c) On pose $M=I_n-AB$ et $N=I_p-BA$. Montrer que la matrice M est inversible si et seulement si la matrice N est inversible.

d) On suppose que $1\notin\mathrm{Spec}(BA)$. Montrer que la matrice M est inversible et que son inverse R vaut $R=I_n+AN^{-1}B$.
(On pourra écrire le produit RM sous la forme $I_n+A(I_p-BA)^{-1}CB$ et constater que $C=0$.)

2. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. On considère deux vecteurs colonnes X et Y de $\mathbb{R}^n$ et on pose $A=X$ et $B={}^tY$.

a) Écrire la matrice N définie dans la question 1. c).

On suppose désormais que le produit scalaire $\langle X|Y\rangle$ est différent de 1.

b) Montrer que la matrice $M = I_n - AB$ est inversible et donner une expression de son inverse à l'aide de la question 1.d.

c) En déduire que le polynôme P défini par $P(t) = \dfrac{1}{1-\langle X|Y\rangle}t^2 + \dfrac{(\langle X|Y\rangle - 2)}{1-\langle X|Y\rangle}t + 1$ est un polynôme annulateur de M.

3. On considère les deux vecteurs colonnes X et Y de $\mathbb{R}^4$ donnés par

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice M. Est-elle diagonalisable ?

4. On considère les deux vecteurs colonnes X et Y de $\mathbb{R}^4$ donnés par

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice M et la matrice M^{-1} après avoir justifié son existence. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Solution :

1. a) La matrice AB est une matrice carrée d'ordre n tandis que BA est une matrice carrée d'ordre p.

b) Soit X un vecteur colonne propre de AB associé à la valeur propre $\lambda \neq 0$. On a donc $ABX = \lambda X$, en multipliant à gauche par B on obtient $(BA)BX = \lambda BX$.

On a $BX \neq 0$, sinon $\lambda X = 0$ et par suite $X = 0$ puisque $\lambda \neq 0$, ce qui est impossible. On a donc $\lambda \in \mathrm{Spec}(BA)$.

On vient de montrer que $\mathrm{Spec}(AB)\setminus\{0\} \subseteq \mathrm{Spec}(BA)\setminus\{0\}$. Il suffit d'échanger les rôles de A et B pour conclure.

c) La matrice M est inversible si et seulement si $1 \notin \mathrm{Spec}(AB)\setminus\{0\}$, ce qui équivaut d'après la question précédente à dire que N est inversible.

d) Comme $1 \notin \mathrm{Spec}(BA)$, les matrices M et N sont inversibles d'après la question précédente. En effectuant le produit RM, on trouve

$$\begin{aligned} RM &= I_n + A(I_p - BA)^{-1}B - AB - A(I_p - BA)^{-1}BAB \\ &= I_n + A(I_p - BA)^{-1}B - A(I_p - BA)^{-1}(I_p - BA)B - A(I_p - BA)^{-1}BAB \\ &= I_n + A(I_p - BA)^{-1}[I_p - (I_p - BA) - BA]B = I_n \end{aligned}$$

2. a) D'après 1) a), on a $N \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$, par suite N est le scalaire $1 - \langle X|Y\rangle$.

b) Comme $N = 1 - \langle X|Y\rangle \neq 0$, M est inversible d'après 1) c). Avec 1) d), on obtient :

$$M^{-1} = I_n + (1 - \langle X|Y\rangle)^{-1} X\,{}^tY.$$

c) On remarque que la question précédente nous conduit à

$$I_n = M + \frac{1}{1-\langle X|Y\rangle}(I_n - M)M = \Big(\frac{2-\langle X|Y\rangle}{1-\langle X|Y\rangle}\Big)M - \frac{1}{1-\langle X|Y\rangle}M^2.$$

Ce qui donne immédiatement P comme polynôme annulateur de M.

3. On trouve : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Comme $0 = \langle X|Y\rangle \neq 1$, la question 2. d) nous dit que $P(t) = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$ est un polynôme annulateur de M. Le réel 1 est donc la seule valeur propre possible de M (c'est effectivement le cas).

Or $M \neq I$, elle n'est donc pas diagonalisable.

4. Comme $10 = \langle X|Y\rangle \neq 1$, on voit que M est inversible. On a :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 \\ -1 & -1 & -3 & -4 \\ -1 & -2 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{-1}{3} & \frac{-4}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{7}{9} & \frac{-1}{3} & \frac{-4}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{2}{3} & \frac{-4}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{-1}{3} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}.$$

Ici $P(t) = -\frac{1}{9}t^2 - \frac{8}{9}t + 1$, ses racines sont 1 et -9, et ce sont les seules valeurs propres possibles de M. On voit que l'équation du sous-espace propre associé à 1 est $x + 2y + 3z + 4t = 0$, il est donc de dimension 3.

Si -9 n'était pas une valeur propre, la matrice $M + 9I$ serait inversible et une factorisation de P conduirait à $M = I$, ce qui est absurde (on peut aussi chercher un vecteur propre pour la valeur -9).

La somme des dimensions des sous-espaces propres est donc (au moins) 4, donc vaut 4 et par suite la matrice M est diagonalisable.

Exercice 2.03.

On considère l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n ($n \geqslant 2$) à coefficients réels.
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on rappelle que $\mathrm{Spec}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de A.
Si $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\Phi(M) = (m'_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice carrée d'ordre n dont les coefficients sont donnés par $m'_{i,j} = m_{n+1-j,n+1-i}$. La matrice $\Phi(M)$ est la symétrique de M par rapport à la « deuxième diagonale ».

1. a) Vérifier que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer Φ^2.

b) Montrer que $\Phi({}^tM) = {}^t(\Phi(M))$. On suppose que la matrice M est symétrique, que peut-on dire de $\Phi(M)$?

c) Soient A et B deux matrices réelles carrées d'ordre n.
Prouver que $\Phi(AB) = \Phi(B)\Phi(A)$.

d) Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\Phi(M)$ est inversible. Vérifier dans ce cas que $(\Phi(M))^{-1} = \Phi(M^{-1})$. Prouver que $\mathrm{Spec}(\Phi(M)) = \mathrm{Spec}(M)$.

e) Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si $\Phi(M)$ l'est.

2. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est bisymétrique si elle est symétrique par rapport aux deux diagonales (*i.e.* si ${}^tM = M$ et $\Phi(M) = M$). Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est une matrice colonne, on pose $\widetilde{X} = \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix}$.

On considère désormais une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est bisymétrique.

a) Justifier le fait que A est diagonalisable, avec une matrice de passage diagonalisante orthogonale.

b) Montrer que si la colonne X appartient au sous-espace E_λ de A propre associé à la valeur propre λ,
alors $\widetilde{X}$ appartient aussi à E_λ.

c) En déduire que si $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$, alors il existe un vecteur colonne propre associé à λ qui vérifie l'une des deux conditions : $\widetilde{X} = X$ ou bien $\widetilde{X} = -X$.

3. On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que A est bisymétrique et montrer que le rang de A est supérieur où égal à 3.

b) Déterminer le noyau de A.

c) Chercher les vecteurs colonnes propres de A qui vérifient $\widetilde{X} = X$.

d) Diagonaliser la matrice A avec une matrice de passage orthogonale.

Solution :

1. a) La linéarité est évidente. On voit immédiatement que $\Phi^2 = Id$.

b) On voit que $\Phi({}^tM) = \big(({}^tM)'_{i,j}\big) = (m_{n+1-i,n+1-j}) = {}^t\Phi(M)$.

Si la matrice M est symétrique, on en déduit que la matrice $\Phi(M)$ est aussi symétrique.

c) Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices réelles carrées d'ordre n. D'après le cours, on a $C = AB = (c_{i,j})$ avec $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$. D'où $\Phi(C) = \big(c'_{i,j}\big)$ avec :

$$c'_{i,j} = c_{n+1-j,n+1-i} = \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-j,k}b_{k,n+1-i} = \sum_{h=1}^{n} a_{n+1-j,n+1-h}b_{n+1-h,n+1-i}$$

$= \sum_{h=1}^{n} b'_{i,h} a'_{h,j}.$

Or cette dernière somme représente $(\Phi(B)\Phi(A))_{i,j}$, on a donc bien $\Phi(AB) = \Phi(B)\Phi(A)$.

d) Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, il existe alors $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $MN = NM = I$. Il vient $I = \Phi(I) = \Phi(MN) = \Phi(N)\Phi(M)$ et par suite $\Phi(M)$ est inversible et $\Phi(M)^{-1} = \Phi(M^{-1})$.

Or $\Phi^2 = Id$, on a donc bien l'équivalence souhaitée.

Comme $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ équivaut à $M - \lambda I$ non inversible, donc à $\Phi(M - \lambda I) = \Phi(M) - \lambda I$ non inversible, c.a.d. à $\lambda \in \mathrm{Sp}(\Phi(M))$.

e) Supposons $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, alors il existe D diagonale et P inversible telles que $M = PDP^{-1}$. Avec c) et d), on voit que $\Phi(P)$ est inversible et que l'on a $\Phi(M) = \Phi(P)^{-1}\Phi(D)\Phi(P)$. Il est clair que $\Phi(D)$ est encore diagonale, la matrice $\Phi(M)$ est donc diagonalisable.
Là encore, la propriété $\Phi^2 = Id$ nous donne immédiatement la réciproque.

2. a) Il suffit de dire qu'une matrice bisymétrique est déjà symétrique réelle.

b) Soit $x \in E_\lambda$, comme A est bisymétrique ($a_{i,j} = a_{j,i} = a_{n+1-i,n+1-j}$) il vient :

$$(M\widetilde{x})_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\widetilde{x}_k = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}x_{n+1-k} = \sum_{h=1}^{n} a_{i,n+1-h}x_h = \sum_{h=1}^{n} a_{n+1-i,h}x_h$$
$$= \lambda x_{n+1-i} = \lambda \widetilde{x}_i.$$

c) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $x \in E_\lambda$, alors on a $M(x + \widetilde{x}) = \lambda(x + \widetilde{x})$ d'après la question précédente. Posons $y = x + \widetilde{x}$, si $y = 0$ alors $\widetilde{x} = -x$ et si $y \neq 0$ alors $y \in E_\lambda$ vérifie $\widetilde{y} = y$.

3. a) Il est clair que A est bisymétrique. Ses trois premières colonnes sont libres, d'où $\mathrm{rg}(A) \geqslant 3$.

b) La dimension du noyau est 1 ou 0. Si c'est 1, d'après 2) c) on peut chercher un vecteur générateur du noyau sous la forme (a, b, b, a) ou $(a, b, -b, -a)$.

On voit immédiatement que la première possibilité donne le vecteur nul et la deuxième nous conduit à $\ker(A) = \mathbb{R}(1, 1, -1, -1)$.

c) On cherche donc les vecteurs propres qui sont de la forme (a, b, b, a). Les deux premières équations du système montrent que (a, b) vérifie les équations $6a + 4b = \lambda a$ et $4a = \lambda b$. on en tire facilement $\lambda = -2$ ou $\lambda = 8$, et que les vecteurs cherchés appartiennent à $\mathbb{R}(1, -2, -2, 1) \subseteq E_{-2}$ ou à $\mathbb{R}(2, 1, 1, 2) \subseteq E_8$.

d) On cherche la dernière valeur propre éventuelle λ.

La matrice A étant diagonalisable, on doit avoir $-2 = \mathrm{tr}(A) = 0 - 2 + 8 + \lambda$, on trouve donc $\lambda = -8$, les sous espaces propres sont donc tous de dimension 1. Les vecteurs de E_{-8} sont nécessairement de la forme $(a, b, -b, -a)$ et sont orthogonaux aux autres sous espaces propres, d'où $E_{-8} = \mathbb{R}(1, -1, 1, -1)$.

La matrice A se diagonalise donc sous la forme $A = PD^tP$ avec :

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-2}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{2} & \frac{2}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D=\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.04.

Dans cet exercice on confondra vecteur de $\mathbb{R}^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) et matrice colonne canoniquement associée. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et une matrice $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

0. Montrer que $\operatorname{rg}(AB)\operatorname{rg}(A)$.

1. Dans cette question on choisit pour A et B les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les matrices AB et BA.

b) Déterminer le rang de AB.

2. On se place dans le cas général où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On considère les applications linéaires :
$\varphi : \operatorname{Ker}(AB-\lambda I_n) \to \mathbb{R}^p$ et $\psi : \operatorname{Ker}(BA-\lambda I_p) \to \mathbb{R}^n$ définies par $\varphi(x)=Bx$ et $\psi(y)=Ay$.
Montrer que $\operatorname{Im}(\varphi) \subseteq \operatorname{Ker}(BA-\lambda I_p)$ et que $\operatorname{Im}(\psi) \subseteq \operatorname{Ker}(AB-\lambda I_n)$.

b) En déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\dim(\operatorname{Ker}(AB-\lambda I_n)) = \dim(\operatorname{Ker}(BA-\lambda I_p))$$

c) Justifier l'égalité $\operatorname{Spec}_{\mathbb{C}}(AB) \setminus \{0\} = \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(BA) \setminus \{0\}$ (on rappelle que $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de la matrice M).

d) On considère les matrices $M = I_n + AB$ et $N = I_p + BA$. On suppose que N est inversible, montrer alors que M est aussi inversible.
Vérifier que si $x \in \mathbb{R}^n$ est solution de l'équation $x = M^{-1}y$ où $y \in \mathbb{R}^n$, alors on a $By = NBx$.
En déduire que $M^{-1} = I_n - AN^{-1}B$.

3. On revient au cas particulier des matrices A et B données dans la question 1.

a) Trouver les valeurs propres de la matrice AB. Est-elle diagonalisable ?

b) Justifier l'inversibilité de la matrice $M = I_n + AB$ et déterminer son inverse.

Solution :

1. a) On a : $AB=\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = 2I_2$.

b) On voit immédiatement que $\mathrm{Im}(AB) \subseteq \mathrm{Im}(A)$, d'où

$$\mathrm{rg}(AB) = \dim(\mathrm{Im}(AB)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\, A) = \mathrm{rg}(A)$$

c) Comme on a trivialement $\mathrm{rg}(A) = 2$, il vient $\mathrm{rg}(AB) \leqslant 2$ avec a). Les colonnes de AB ne sont pas proportionnelles, on a donc $\mathrm{rg}(AB) = 2$.

2. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Si $z = \varphi(x) = Bx$ avec $x \in \mathrm{Ker}(AB - \lambda I_n)$, on a $ABx - \lambda x = 0$, d'où $BAz - \lambda z = BABx - \lambda Bx = B(ABx - \lambda x) = 0$. On trouve donc bien $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}(BA - \lambda I_p)$.

On prouve de façon analogue que $\mathrm{Im}(\psi) \subseteq \mathrm{Ker}(AB - \lambda I_n)$.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, en appliquant le théorème du rang à l'application linéaire φ, on obtient

$$\dim(\mathrm{Ker}(AB - \lambda I_n)) = \dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi))$$

Examinons $\mathrm{Ker}\,\varphi$: si $0 = \varphi(x) = Bx$, alors on a $0 = \lambda x - ABx = \lambda x$ puisque $x \in \mathrm{Ker}(AB - \lambda I_n)$, et par suite φ est injective car $\lambda \neq 0$.

D'où $\dim(\mathrm{Ker}(AB - \lambda I_n)) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(BA - \lambda I_p))$ d'après a).

Avec la même méthode, en utilisant cette fois l'application linéaire ψ, on montre que $\dim(\mathrm{Ker}(BA - \lambda I_p)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(AB - \lambda I_n))$. D'où l'égalité souhaitée.

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(AB) \setminus \{0\}$, alors on peut se servir de l'égalité précédente puisque $\lambda \neq 0$ et par suite $\lambda \in \mathrm{Sp}(BA) \setminus \{0\}$.
En échangeant les rôles de A et B, on obtient l'inclusion inverse, d'où :

$$\mathrm{Sp}(AB) \setminus \{0\} = \mathrm{Sp}(BA) \setminus \{0\}$$

c) Dire que N est inversible revient à dire que $-1 \notin \mathrm{Sp}(BA) \setminus \{0\} = \mathrm{Sp}(AB) \setminus \{0\}$ d'après la question précédente, et par suite $M = I + AB$ est inversible.
Si $x = M^{-1}y$, on a $ABx + x = y$, d'où $By = BABx + Bx = NBx$.

Par conséquent on a $Bx = N^{-1}By$ et en reportant dans la deuxième équation on obtient $AN^{-1}By + x = y$.

On en déduit que $M^{-1} = I_n - AN^{-1}B$.

3. a) On a vu au cours de la première question que $BA = 2I_2$.

On a donc $\{2\} = \mathrm{Sp}(BA) \setminus \{0\} = \mathrm{Sp}(AB) \setminus \{0\}$. De plus, d'après 1) c) on a $\mathrm{rg}(AB) = 2$, donc $0 \in \mathrm{Sp}(AB)$. On aboutit finalement à $\mathrm{Sp}(AB) = \{0, 2\}$.

Avec 2. b), il vient $\dim(\mathrm{Ker}(AB - 2I_3)) = \dim(\mathrm{Ker}(BA - 2I_2)) = 2$. La somme des dimensions des sous-espaces propres de AB est donc 3, par conséquent la matrice AB est diagonalisable.

b) On voit que $-1 \notin \mathrm{Sp}(BA) = \{2\}$, il découle de 2. c) que M est inversible et que

$$M^{-1} = I_3 - A(\frac{1}{3}I_2)B = I_3 - \frac{1}{3}AB.$$

D'où : $M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.05.

$GL_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Une matrice S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0,$$

et définie positive si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ {}^tXSX > 0.$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles positives d'ordre n et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives d'ordre n.

1. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

2. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. On souhaite montrer l'existence de R orthogonale et S symétrique définie positive telle que $M = RS$.

a) Montrer que la matrice ${}^tMM$ est symétrique définie positive.

b) En déduire qu'il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tMM = S^2$.

c) Montrer que S est inversible et que MS^{-1} est orthogonale.

d) Conclure.

Dans la suite de cet exercice, on admettra l'unicité d'une telle factorisation.

3. Soit $\Sigma \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Soit P une matrice orthogonale telle que $D = P^{-1}\Sigma P$ soit diagonale. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D.

Soit $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\operatorname{tr}(\Sigma) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q_1 telle que $\operatorname{tr}(Q\Sigma) = \operatorname{tr}(Q_1 D)$ et en déduire :

$$\operatorname{tr}(Q\Sigma) \leqslant \operatorname{tr}(\Sigma).$$

c) Montrer que $\sup_{Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \{\operatorname{tr}(Q\Sigma)\} = \operatorname{tr}(\Sigma)$.

Solution :

1. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. La matrice S est diagonalisable via une matrice orthogonale P. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux d'une telle réduite diagonale. On raisonne ensuite par double implication.

($\Rightarrow$) On suppose que $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et X_i un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i. Alors, ${}^tX_iSX_i = \lambda_i \|X_i\|^2 > 0$. Ainsi, $\lambda_i > 0$.

($\Leftarrow$) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul et $(X_1, \ldots, X_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres. Il existe $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $X = \sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i$. Alors,

$$^tXSX = \sum_{1\leq i,j\leq n} \mu_i\mu_j {}^tX_iSX_j = \sum_{1\leq i,j\leq n} \mu_i\mu_j\lambda_j {}^tX_iX_j = \sum_{i=1}^n \mu_i^2\lambda_i\|X_i\|^2 > 0.$$

Ce qui termine la question.

2. a) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. D'après les propriétés de la transposition, ${}^tMM$ est symétrique. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul. Alors, ${}^tX{}^tMMX = {}^tMXMX = \|MX\|^2$.

Or, comme M est inversible et X est non nul, alors MX est non nul et $\|MX\|^2 > 0$.

Ainsi, $M \in GL_n(\mathbb{R})$ entraîne que ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

b) D'après la question 1, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels strictement positifs et P une matrice orthogonale telle que, en notant $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, ${}^tMM = PD{}^tP$.

Alors, en posant $\widetilde{D} = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ qui est bien définie d'après la question 1 et $S = P\widetilde{D}{}^tP$, on obtient bien, toujours d'après la question 1 :

$$S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ et } {}^tMM = S^2$$

c) Comme les éléments diagonaux de $\widetilde{D}$ sont non nuls, en posant :

$$T = P\operatorname{diag}(\lambda_1^{-1/2}, \ldots, \lambda_n^{-1/2}){}^tP,$$

on a $TS = ST = I_n$ et S est inversible. Puis,

$${}^t(MS^{-1})MS^{-1} = ({}^tS)^{-1}{}^tMMS = S^{-1}S^2S = I_n$$

et $MS^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

d) Finalement, pour toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = RS$.

3. a) Comme la trace est invariante par changement de base, $\operatorname{tr}\Sigma = \operatorname{tr} D = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

b) Comme Σ est symétrique réelle, elle est diagonalisable et il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\Sigma = PD{}^tP$, avec D diagonale.

Alors,

$$\operatorname{tr}(Q\Sigma) = \operatorname{tr}(QPD{}^tP) = \operatorname{tr}({}^tPQPD) = \operatorname{tr}(Q_1D)$$

où $Q_1 = {}^tPQP$ appartient à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, notons $Q_1 = (q_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. Alors,

$$\operatorname{tr}(Q\Sigma) = \operatorname{tr}(Q_1D) = \sum_{i=1}^n \lambda_i q_{i,i}$$

Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$. De plus, comme Q_1 est orthogonale, on a $\sum_{k=1}^n q_{i,k}^2 = 1$ et $|q_{i,i}| \leqslant 1$.

Ainsi, $\operatorname{tr}(Q\Sigma) \leqslant \operatorname{tr}(\Sigma)$.

c) D'après la question 3. b), pour toute matrice $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(Q\Sigma) \leqslant \operatorname{tr}(\Sigma)$, cette inégalité étant une égalité lorsque $Q = I_n$. Ainsi :

$$\sup_{Q\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \operatorname{tr}(Q\Sigma) = \max_{Q\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \operatorname{tr}(Q\Sigma) = \operatorname{tr}(\Sigma)$$

Exercice 2.06.

Soient m, n et p trois entiers naturels avec p **impair** et $m \geqslant 2$. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients **entiers** telles que A soit symétrique, et

$$A = I_n + mB \text{ et } A^p = I_n.$$

1. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers telle que $(u_k)_k$ converge. Montrer que $(u_k)_k$ est constante à partir d'un certain rang.

2. Soit $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{p}}$. Montrer que $\omega^p = 1$, puis en déduire l'ensemble $\mathcal{R}$ des racines du polynôme $X^p - 1$.

3. Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors $\lambda \in \mathcal{R}$.

4. a) Montrer que B est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes de module strictement inférieur à 1.

b) En notant, pour tout entier naturel k, $B^k = (b_{i,j}^{(k)})_{1\leq i,j\leq n}$, montrer que l'on a : $\lim\limits_{k\to+\infty} b_{i,j}^{(k)} = 0$.

c) En déduire que $A = I_n$.

Solution :

1. Soit ℓ la limite de la suite (u_n). Il existe un réel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{3}$.
Soit $n \geqslant n_0$. Alors, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant |u_{n+1} - \ell| + |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{2}{3} < 1$.
Ainsi, comme u_n et u_{n+1} sont entiers, alors $u_n = u_{n+1}$ et $(u_n)_n$ est constante à partir du rang n_0.

2. D'après les propriétés des nombres complexes, $\omega^p = 1$. De plus, pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $\omega^{kp} = 1$. Ainsi, les nombres complexes $\{\omega^k,\ k \in [\![0, p-1]\!]\}$ sont distincts deux à deux et racines du polynôme $X^p - 1$ de degré p, donc ce sont ses seules racines.

3. Comme $A^p = I_n$, toute valeur propre de A satisfait $\lambda^p = 1$, donc appartient à $\mathcal{R}$.

4. Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable. De plus, en notant $A = PDP^{-1}$ alors $B = P\dfrac{1}{m}(D - I)P^{-1}$. Soit μ une valeur propre de B. Il existe $k \in [\![0, p-1]\!]$ tel que $\mu = \dfrac{\omega^k - 1}{m}$. Ainsi, si $k = 0$, alors $\mu = 0$. Sinon, ω^k et 1 ne sont pas colinéaires (p impair) et d'après l'inégalité triangulaire,

$$|\mu| = \frac{|\omega^k - 1|}{m} < \frac{2}{m} \leqslant 1$$

a) D'après la question précédente, $B^k = P\big(\dfrac{D-I}{m}\big)^n P^{-1}$ et $b_{i,j}^{(k)}$ est une combinaison linéaire des (μ_i^k). Ainsi, $\lim\limits_{k\to\infty} b_{i,j}^{(k)} = 0$.

b) D'après la question précédente, comme B est à coefficients entiers, il existe k_0 tel que $B^{k_0} = 0_n$. Ainsi, B est diagonalisable et nilpotente donc c'est la matrice nulle et $A = I_n$.

Exercice 2.07.

Dans cet exercice, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 2$.

1. a) Montrer que A admet au moins une valeur propre complexe, c'est-à-dire que l'ensemble des valeurs propres de A n'est pas vide et qu'il existe un polynôme annulateur de A tel que ses racines soient exactement les valeurs propres de A. Un tel polynôme est noté m_A et on admet que l'on peut choisir m_A à coefficients réels.

b) Montrer que si m_A est de degré impair, A admet au moins une valeur propre réelle.

On suppose désormais que m_A est de degré pair $2p$ et que les valeurs propres de A sont toutes complexes non réelles.

2. Existe-t-il une droite de $\mathbb{R}^n$ stable par l'endomorphisme canoniquement associé à A ?

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ une valeur propre de A. Montrer que $\overline{\lambda}$ (conjugué de λ) est également valeur propre de A et que les sous-espaces propres associés à λ et $\overline{\lambda}$ sont de même dimension.

4. Soit X un vecteur colonne propre de A associé à λ. En considérant les vecteurs Y et Z réels qui sont respectivement la partie réelle de X et la partie imaginaire de X, montrer qu'il existe un plan P de $\mathbb{R}^n$ stable par l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Solution :

On note f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A. Le polynme m_A sera aussi noté m_f.

1. a) L'endomorphisme f admet un polynôme annulateur réel car la famille

$$(Id, f, f^2, \dots, f^{n^2})$$

est de cardinal n^2+1 donc liée. Les valeurs propres de f sont incluses dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur.

On factorise ce polynôme sur $\mathbb{C}$ par le théorème de d'Alembert-Gauss, soit :

$$P(X) = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

Supposons que λ_p ne soit pas valeur propre de f. Alors l'endomorphisme $f - \lambda_p Id$ est inversible ainsi que $(f-\lambda_p Id)^{m_p}$. On peut ainsi composer à droite par l'inverse de $(f-\lambda_p I)^{m_p}$ et on obtient encore un polynôme annulateur après avoir supprimé une racine qui n'est pas valeur propre.

En recommençant ce processus, on récupère le polynôme m_f. En effet on ne peut épuiser ainsi toutes les racines de P car alors on aurait $Id = 0$.

b) Le polynôme m_f est réel et de degré impair. Il admet au moins une racine réelle (théorème des valeurs intermédiaires), donc il existe une valeur propre réelle et si X est un vecteur propre associé, la droite vectorielle engendrée par X est une droite stable.

2. Si f admet une droite stable, et si X est une base de cette droite, alors $f(X) = aX$ et a est valeur propre réelle de f. Ainsi f n'admet pas de droite stable.

3. Soit X un vecteur colonne propre complexe de A associé à λ. On a $AX = \lambda X$. En passant au conjugué, A étant réelle, il vient $A\overline{X} = \overline{\lambda X}$. Ainsi $\overline{\lambda}$ est valeur propre de A associée au vecteur colonne propre $\overline{X}$.

On a également la réciproque (immédiat).

On montre enfin que $(X_1, \ldots, X_q)$ est une base du sous-espace propre E_λ, si et seulement si $(\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_q})$ est une base du sous-espace propre $E_{\overline{\lambda}}$.

4. On a $Y = \dfrac{X + \overline{X}}{2}$ et $Z = \dfrac{X - \overline{X}}{2i}$. Ce sont des vecteurs colonnes réels.

Soient a, b réels tels que $aY + bZ = 0$. Alors $(a - ib)X + (a + ib)\overline{X} = 0$ ce qui entraîne que $a = b = 0$.

Ainsi la famille (Y, Z) est libre et engendre un plan vectoriel.

Montrons que ce plan est stable par A.

On pose $\lambda = a + ib$, avec $b \neq 0$. Il vient

$$\begin{aligned} AY &= \frac{AX + A\overline{X}}{2} = \frac{1}{2}\big((a+ib)X + (a-ib)\overline{X}\big) \\ &= \frac{1}{2}\left((a+ib)(Y+iZ) + (a-ib)(Y-iZ)\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad AY = aY - bZ \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} AZ &= \frac{AX - A\overline{X}}{2i} = \frac{1}{2i}\big((a+ib)X - (a-ib)\overline{X}\big) \\ &= \frac{1}{2i}\left((a+ib)(Y+iZ) - (a-ib)(Y-iZ)\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad AZ = bY + aZ \end{aligned}$$

Le plan $\mathrm{Vect}(Y, Z)$ est bien stable.

Exercice 2.08.

Dans cet exercice, n est un entier tel que $n \geqslant 2$ et $E = \mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique. On confondra les vecteurs de E et les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ainsi que les endomorphismes de E avec les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par A. Montrer que $F^\perp$ est stable par la transposée ${}^tA$ de A.

2. On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel H de E de dimension $n - 1$.

Montrer que les hyperplans de E stables par A sont déterminés par les vecteurs propres de ${}^tA$.

3. On suppose la matrice A diagonalisable. Montrer qu'il existe n hyperplans $H_1, \ldots, H_n$ stables par A tels que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} H_i = \{0\}$.

4. Réciproquement, on suppose qu'il existe n hyperplans $H_1, \ldots, H_n$ stables par A tels que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} H_i = \{0\}$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Solution :

1. Soit $Y \in F^{\perp}$. On a ${}^tXY = 0$, pour tout $X \in F$. Et ${}^tX{}^tAY = {}^t(AX)Y = 0$ puisque $AX \in F$.

2. Soit H un hyperplan de E stable par A. La question précédente montre que $H^{\perp}$ est une droite stable par ${}^tA$.
Or une droite stable est engendrée par un vecteur propre puisque si X engendre la droite stable D, alors $AX \in D \Rightarrow AX = \lambda X$. La réciproque de cette proposition est immédiate.

Réciproquement, si D est une droite stable de ${}^tA$, cette droite est engendrée par un vecteur propre X de ${}^tA$ et $D^{\perp}$ est un hyperplan stable par ${}^t({}^tA) = A$.

3. Notons $(X_1, \ldots, X_n)$ une base de vecteurs propres de A, $D_i = \mathrm{Vect}(X_i)$ et $H_i = D_i^{\perp}$. On a ainsi défini n hyperplans. Chacun est stable par ${}^tA$.
Soit $X \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} H_i$. Alors ${}^tAX \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} H_i$, donc ${}^tAX \in H_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $AX \in H_i^{\perp} = D_i$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, ce qui est impossible puisque les D_i sont supplémentaires. Donc $X = 0$.

4. Réciproquement, on suppose qu'il existe n hyperplans $H_1, \ldots, H_n$ stables par A tels que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} H_i = \{0\}$. Alors, il existe n droites $D_1, \ldots, D_n$ stables par ${}^tA$, chacune de base $X_1, \ldots, X_n$.
Chacun de ces vecteurs est un vecteur propre de ${}^tA$, et cette famille est libre. En effet, supposons par exemple que $X_n \in \mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_{n-1})$.

Soit $Y \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} H_i$.

Alors Y est orthogonal à $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ et X_n donc à $\mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_{n-1})$ qui est un sous-espace de E de dimension inférieure ou égale à $n - 1$. Il suffit de prendre $Y \in [\mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_{n-1})]^{\perp}$ pour obtenir une contradiction à $\bigcap\limits_{i=1}^{n} H_i = \{0\}$.

On a ainsi obtenu que la matrice ${}^tA$ est diagonalisable et donc que A est également diagonalisable.

Exercice 2.09.

Dans cet exercice, $E = \mathbb{R}[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On définit une application T sur E, par :

$$\forall P \in E, T(P)(X) = (3X + 8)P(X) - X(5 - X)P'(X) + X^2(1 - X)P''(X)$$

où P' et P'' représentent respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de P.

1. a) Montrer que l'application T est un endomorphisme de E.
   b) Pour quelles valeurs de n, le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est-il stable par T ?
   c) L'application T est-elle surjective sur E ?

2. Soit P un polynôme propre de T, c'est-à-dire un polynôme P non nul tel que la famille $(P, T(P))$ soit liée.

a) Que peut valoir le degré de P ?

b) Montrer que les polynômes propres de T appartiennent à un sous-espace F de E de dimension finie et que la restriction de T à F induit un endomorphisme de F, que l'on note encore T.

3. a) Déterminer tous les couples $(\lambda, P) \in \mathbb{R} \times E$ tels que $T(P) = \lambda P$.

b) L'application T est-elle injective ?

Solution :

1. a) L'application T est linéaire par distributivité du produit sur l'addition et linéarité de la dérivation.

b) Supposons que $P(X) = a_n X^n + \ldots$, avec $a_n \neq 0$. On détermine alors le coefficient dominant de $T(P)$:

$$T(P)(X) = X^{n+1}(3a_n + na_n - n(n-1)a_n) + \ldots = a_n(-n^2 + 2n + 3)X^{n+1} + \ldots$$

Ainsi $\deg(T(P)) = n+1$ sauf si $n = 3$ (l'autre racine est négative), donc seul $\mathbb{R}_3[X]$ est stable par T.

Si $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, alors :

$$T(P) = (3X + 8)(aX^3 + bX^2 + cX + d) \\ -X(5 - X)(3aX^2 + 2bX + c) + X^2(1 - X)(6aX + 2b)$$

c) L'application T ne peut être surjective, puisque les degrés 0 et 4 ne sont pas atteints. (Il suffit de construire la liste des degrés obtenus)

2. On vérifie que $T(1) = 3X + 8$ et $T(X) = 4X^2 + 3X$. Les polynômes de degré supérieur ou égal à 2 rentrent dans le cadre précédent. Ainsi un polynôme propre appartient obligatoirement à $\mathbb{R}_3[X]$ par la question précédente.

Le sous espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ est stable par T (on l'a vérifié ci dessus).

3. a) On écrit la matrice de l'induit par T dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, soit

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice triangulaire inférieure : ses valeurs propres sont les éléments diagonaux, soit $\{-1, 0, 3, 8\}$.

La matrice A est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

- le polynôme X^3 est associé à la valeur propre -1
- le polynôme $3X^3 + X^2$ est associé à la valeur propre 0 (lien entre les deux dernières colonnes)
- le polynôme $3X^3 + 4X^2 + 3X$ est associé à la valeur propre 3
- le polynôme $10 + 6X + 3X^2 + X^3$ est associé à la valeur propre 8

b) L'application T n'est pas injective car 0 est valeur propre de T.

Exercice 2.10.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E diagonalisable. On note $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ l'ensemble de ses valeurs propres et $E_1, \ldots, E_p$ les sous-espaces propres associés.

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f, tel que $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$. Soit x un vecteur de F.

1. Montrer qu'il existe un unique p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_p$.

2. On suppose désormais $x \neq 0$. Montrer que, quitte à modifier l'ordre, on peut supposer qu'il existe $r \in [\![1, p]\!]$ tel que $x_i = 0$, pour $i > r$ et $x_i \neq 0$, pour $i \leqslant r$. On a alors $x = x_1 + \ldots + x_r$.
On note V_x le sous-espace vectoriel engendré par $(x_1, \ldots, x_r)$.

3. a) Montrer que $(x_1, \ldots, x_r)$ est une base de V_x.

b) Montrer que pour tout $j \geqslant 0$, $f^j(x) \in V_x$.

c) Déterminer la matrice A de la famille $(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x))$ dans la base $(x_1, \ldots, x_r)$ de V_x.

Notons $C_1, \ldots, C_r$ les colonnes de A et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des réels tels que $\sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_j C_j = 0$. Montrer que le polynôme $P = \sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_j X^{j-1}$ est le polynôme nul. En déduire que A est inversible.

d) Montrer que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $x_i \in F$, puis que $F = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$.

4. Réciproquement, montrer que $\bigoplus\limits_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$ est un sous-espace de E stable par f.

5. Soit g un endomorphisme de E, diagonalisable et commutant avec f (*i.e.* tel que $f \circ g = g \circ f$). Montrer qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à f et g.

Solution :

1. L'endomorphisme f est diagonalisable et $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} E_i$. Ainsi, pour tout $x \in F$, il existe un unique p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \ldots \times E_p$ tel que $x = x_1 + \ldots + x_p$.

2. Certains des vecteurs x_i peuvent être nuls, mais pas tous si $x \neq 0$. Quitte à réordonner les sous-espaces propres, on peut supposer que les x_i non nuls sont les r premiers.

3. a) La famille $(x_1, \ldots, x_r)$ est génératrice de V_x, elle est formée de vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes : elle est donc libre.

b) Pour la même raison, pour tout $j \geqslant 0$, $f^j(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i^j x_i \in V_x$.

c) La matrice de la famille $(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x))$ dans la base$(x_1, \ldots, x_r)$ est la matrice de Vandermonde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \ldots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}$$

$\sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_j C_j = 0$, donne en regardant coefficient par coefficient : $\forall\, i \in [\![1, r]\!], P(\lambda_i) = 0$. Ainsi le polynme P, qui est de degré inférieur ou égal à $r-1$ admet r racines distinctes, donc est le polynme nul. Cela prouve que A est inversible.

Ainsi la matrice A est la matrice de passage d'une base à une famille libre, donc ici une base.

d) En écrivant chaque vecteur de la base $(x_1, \ldots, x_r)$ dans cette nouvelle base, on obtient que $x_i \in F$, comme combinaison linéaire de la famille $(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x))$.

Donc $x \in \bigoplus\limits_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$ et $F \subset \bigoplus\limits_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$. L'inclusion contraire est banale d'où le résultat.

4. La réciproque est évidente car des sous-espaces propres sont toujours stables. On vient ainsi de caractériser la forme des sous-espaces vectoriels de E stables par f.

5. Comme g est diagonalisable, on a $E = \bigoplus\limits_{k=1}^{q} F_k$, où F_k est le sous-espace propre de g associé à la valeur propre μ_k.

Or, comme f et g commutent, chaque F_k est stable par f. Donc $F_k = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} (F_k \cap E_i)$.

Une base de $F_k \cap E_i$ est formée de vecteurs propres communs à f et g. Comme $E = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{q} F_k$, on obtient une base de E formée de vecteurs propres communs à f et g.

Exercice 2.11.

Soit (M_n) une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $M_n = \big(m_{i,j}(n)\big)_{1 \leq i,j \leq p}$. On dit que la suite (M_n) est convergente si pour tout couple $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, la suite $(m_{i,j}(n))$ converge vers une limite réelle notée $m_{i,j}$.

On pose alors $M = [m_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq p}$, on dit que la suite (M_n) converge vers M et on écrit $\lim\limits_{n \to \infty} (M_n) = M$.

On admettra que si la suite (M_n) converge vers M et si P et Q sont deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients ne dépendent pas de n, alors $\lim\limits_{n \to \infty} (PM_nQ) = PMQ$.

1. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonalisable. On note I_p la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
   a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{n \to \infty} \big(1 + \dfrac{x}{n}\big)^n$.

b) Montrer que la suite de matrices $\left(\left(I_p+\frac{1}{n}A\right)^n\right)_n$ converge. On note $E(A)$ sa limite.

c) Montrer que pour tout réel x, $E(xI_p+A)=\mathrm{e}^x E(A)$.

Dans la suite, A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonalisables et qui commutent ($AB=BA$). On note u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés à A et B. On note $(\lambda_1,\dots,\lambda_r)$ les valeurs propres de u et $(\mu_1,\dots,\mu_q)$ les valeurs propres de v.

2. On note $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre de u associé à une valeur propre λ. Montrer que $E_\lambda(u)$ est stable par v.

Pour $i\in[\![1,r]\!]$, on note alors v_i l'endomorphisme de $E_{\lambda_i}(u)$ induit par la restriction de v à $E_{\lambda_i}(u)$. L'objet de la question suivante est de montrer que v_i est diagonalisable.

3. Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de v. On suppose que chaque vecteur x_j est écrit sous la forme

$$x_j=x_{1,j}+x_{2,j}+\cdots+x_{r,j},\text{ avec } x_{k,j}\in E_{\lambda_k}(u) \text{ pour tout } k \text{ de } [\![1,r]\!]$$

a) Montrer que les vecteurs non nuls de la famille $(x_{k,1},\dots,x_{k,p})$ sont des vecteurs propres de v et des vecteurs propres de u.

b) Montrer que cette famille est une famille génératrice de $E_{\lambda_k}(u)$.

c) En déduire que u et v admettent une base commune de vecteurs propres.

4. Montrer que $E(A+B)=E(A)E(B)=E(B)E(A)$.

Solution :

1. a) On montre classiquement que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\mathrm{e}^x$.

b) Comme A est diagonalisable, il existe P inversible et $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$ diagonale telles que $A=PDP^{-1}$. Ainsi pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$I+\frac{1}{n}A=P(I_p+\frac{1}{n}D)P^{-1}\text{ et }\left(I_p+\frac{1}{n}A\right)^n=P\left(I_p+\frac{1}{n}D\right)^nP^{-1}$$

avec $\left(I_p+\frac{1}{n}D\right)^n=\mathrm{diag}\left((1+\frac{\lambda_1}{n})^n,\dots,(1+\frac{\lambda_p}{n})^n\right)$.

Ainsi, en utilisant 1. a) et la propriété donnée dans l'énoncé, la suite $\left((I_p+\frac{1}{n}A)^n\right)_n$ converge et sa limite vaut :

$$E(A)=P\,\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1},\dots,\mathrm{e}^{\lambda_p})P^{-1}$$

c) Soit x un réel. La matrice $A_x=xI_p+A$ reste diagonalisable et l'on a $A_x=PD_xP^{-1}$, où $D=\mathrm{diag}(x+\lambda_1,\dots,x+\lambda_p)$

Le même raisonnement qu'à la question précédente montre que la suite $\left((I_p+\frac{1}{n}A_x)^n\right)_n$ converge et que sa limite vaut

$$\begin{aligned}E(xI_p+A)&=P\,\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{x+\lambda_1},\dots,\mathrm{e}^{x+\lambda_p})P^{-1}=\mathrm{e}^xP\,\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1},\dots,\mathrm{e}^{\lambda_p})P^{-1}\\&=\mathrm{e}^xE(A)\end{aligned}$$

2. Soit $x\in E_\lambda(u)$. Alors, $u(x)=\lambda x$. Comme u et v commutent, on obtient :

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$$

ce qui montre que $v(x) \in E_\lambda(u)$. Ainsi, $E_\lambda(u)$ est stable par v.

3. a) Par définition, les $x_{k,i}$ non nuls sont des vecteurs propres de u. Soit $j \in [\![1,n]\!]$. On suppose que x_j est vecteur propre de v associé à la valeur propre μ_j. Alors,

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_j x_{i,j} = \mu_j x_j = v(x_j) = v(x_{1,j}) + v(x_{2,j}) + \cdots + v(x_{p,j}) = \sum_{i=1}^{p} v(x_{i,j})$$

Or, d'après la question 2, chaque $v(x_{k,j})$ est dans $E_{\lambda_k}(u)$. Par unicité de la décomposition selon la somme directe, on a

$$\forall\, k \in [\![1,p]\!], v(x_{k,j}) = \mu_j x_{k,j},$$

les $x_{k,i}$ non nuls sont des vecteurs propres de v.

b) Soit $z \in E_{\lambda_k}(u)$. Le vecteur z se décompose sur la base $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sous la forme $z = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. Donc

$$z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{p} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{i,j} \Big)$$

Mais $z \in E_{\lambda_k}(u)$. Donc $z = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_{i,k}$.

c) De la famille génératrice de la question précédente, on peut extraire une base de $E_{\lambda_k}(u)$ par le théorème de la base incomplète. On obtient ainsi pour chaque sous-espace propre de u une base de vecteurs propres de v. En mettant ces bases bout à bout, on obtient une base de vecteurs propres commune à u et v.

4. Comme A et B sont diagonalisables avec la même matrice de passage P (question précédente), on peut écrire

$$\begin{aligned} E(A+B) &= P \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1+\mu_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_p+\mu_p}) P^{-1} \\ &= P \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_p}) P^{-1} \times P \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{\mu_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mu_p}) P^{-1} \\ &= E(A)E(B) = E(B)E(A) \end{aligned}$$

Exercice 2.12.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

On pose $S_0 = 1$ et pour tout entier k non nul, on désigne par S_k le polynôme défini par :

$$S_k(X) = \prod_{i=0}^{k-1} (X - i)$$

1. a) Démontrer que, pour tout entier n, la famille $\big(S_k\big)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

b) Soit m un entier naturel. Prouver que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_m[X]$, il existe un unique $(m+1)$-uplet de réels $(a_k)_{0 \leq k \leq m}$ tel que $P = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k S_k$.

2. a) Pour tout entier naturel n et tout entier naturel k calculer $S_k(n)$.

b) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_m[X]$ écrit dans la base $\left(S_k\right)_{0\leq k\leqslant m}$ sous la forme : $P=\sum\limits_{k=0}^{m} a_k S_k$.

i) Démontrer que pour tout entier $N\geqslant m$:

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{P(n)}{n!}=\sum_{k=0}^{m} a_k\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{(n-k)!}$$

ii) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{P(n)}{n!}$ converge et calculer sa somme en fonction des a_k, $k\in [\![0,m]\!]$.

c) Soit p un entier naturel non nul.

Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{n^2(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{n!}$ et calculer sa somme.

Solution :

1. a) Les éléments de la famille sont des polynômes de degrés échelonnés, la liberté en découle.

b) On sait que $\mathbb{R}_m[X]$ est un espace vectoriel de dimension $m+1$, contenant les $m+1$ polynômes S_k, $0\leqslant k\leqslant m$. Comme ils forment une famille libre de $\mathbb{R}_m[X]$, c'est une base de cet espace et P s'y décompose de façon unique.

2. a) $\star$ Si $n\geqslant k$, alors $S_k(n)=n(n-1)\dots(n-k+1)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

$\star$ Si $n<k$, alors n est une racine de S_k, donc $S_k(n)=0$.

b) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_m[X]$ écrit dans la base $(S_k)_{0\leq k\leq m}$ sous la forme : $P=\sum\limits_{k=0}^{m} a_k S_k$.

i) On a :

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{P(n)}{n!}=\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{m} a_k\frac{S_k(n)}{n!}=\sum_{k=0}^{m} a_k\sum_{n=0}^{N}\frac{S_k(n)}{n!}\qquad(1)$$

Or $S_k(n)=0$ si $n\leqslant k-1$, on en déduit :

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{P(n)}{n!}=\sum_{k=0}^{m} a_k\sum_{n=k}^{N}\frac{S_k(n)}{n!}=\sum_{k=0}^{m} a_k\sum_{n=k}^{N}\frac{n!}{(n-k)!n!}=\sum_{k=0}^{m} a_k\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{(n-k)!}$$

ii) On a : $\sum\limits_{n=k}^{N}\dfrac{1}{(n-k)!}=\sum\limits_{i=0}^{N-k}\dfrac{1}{i!}\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}\mathrm{e}$

On déduit alors (m est fixé) la convergence de la série proposée, avec :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P(n)}{n!}=\mathrm{e}\sum_{k=0}^{m} a_k$$

c) On pose $P(X)=X^2(X-1)\dots(X-p+1)$.

On a : $P(X)=XS_p=(X-p)S_p+pS_p=S_{p+1}+pS_p$.

Les coordonnées de P dans la base $(S_k)_{0\leq k\leq p+1}$ de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ sont $(0,0,\dots,0,p,1)$ donc la série $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{n^2(n-1)(n-2)...(n-p+1)}{n!}$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2(n-1)(n-2)...(n-p+1)}{n!}=(p+1)\mathrm{e}$$

Exercice 2.13.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On identifie $\mathbb{R}^n$ avec l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes d'ordre n.

L'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique :

$$\langle X,Y\rangle={}^tXY$$

La norme euclidienne associée est notée $\|.\|$. On note $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $R(A)$ la partie de $\mathbb{R}$ définie par :

$$R(A)=\{\ {}^tXAX,\ X\in\mathbb{R}^n,\|X\|=1\}$$

1. Trouver des éléments de $R(A)$ en prenant successivement pour X un vecteur propre normé de A, puis pour $1\leqslant i\leqslant n$, le vecteur e_i.

2. Soient a et b deux réels de $R(A)$ tels que : $a<b$. On considère X_1 un vecteur normé de $\mathbb{R}^n$ tel que ${}^tX_1AX_1=a$ et X_2 un vecteur normé de $\mathbb{R}^n$ tel que ${}^tX_2AX_2=b$. Pour $\alpha\in[0,1]$, on pose : $X_\alpha=\alpha X_1+(1-\alpha)X_2$

a) Montrer que pour tout $\alpha\in[0,1], X_\alpha\neq 0$.

b) Montrer que l'application :

$$\varphi:[0,1]\to\mathbb{R},\quad \alpha\mapsto\frac{{}^tX_\alpha AX_\alpha}{\|X_\alpha\|^2}$$

est continue.

c) En déduire que $R(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

3. Soit Q une matrice orthogonale réelle, montrer que : $R(A)=R({}^tQAQ)$.

4. Dans cette question on prend $n=2$.

a) Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admettant 2 valeurs propres λ_1 et λ_2. Justifier l'existence d'une matrice diagonale réelle D et d'une matrice orthogonale P telles que : $A={}^tPDP$.

Déterminer $R(A)$ en fonction de λ_1 et λ_2.

b) Soient A et B deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admettant respectivement pour valeurs propres $\lambda_1\leqslant\lambda_2$ et $\mu_1\leqslant\mu_2$, montrer que :

$$\mathrm{tr}(AB)\leqslant\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2$$

Solution :

1. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur colonne propre normé associé : ${}^tXAX = {}^tX\lambda X = \lambda$, donc $\mathrm{Sp}(A) \subset R(A)$.

On a ${}^te_iAe_i = a_{i,i}$ donc $R(A)$ contient tous les éléments de la diagonale principale de A.

2. Soit $a < b$.
a) Par l'absurde : si $\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2 = 0$, alors

• si $\alpha = 0$ alors X_2 est nul , il n'est donc pas normé.

• sinon $X_1 = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha}X_2$ et $||X_1|| = 1$ entraîne $\alpha = \dfrac{1}{2}$

d'où : $X_2 = -X_1$ et ${}^tX_2AX_2 ={}^t X_1AX_1$ ce qui entraîne $a = b$: absurde.

Donc pour tout $\alpha \in [0,1], X_\alpha \neq 0$.

b) La fonction φ est une fonction rationnelle à dénominateur jamais nul : elle est bien continue sur $[0,1]$.

c) Soient $a < b$ 2 réels de $R(A)$, on applique le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue φ sur $[a,b] \subset [0,1]$: soit $c \in [a,b]$, on a : $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$ il existe donc $\alpha_0 \in [0,1]$ tel que $\varphi(\alpha_0) = c$.

Soit le vecteur normé : $X = \dfrac{X_{\alpha_0}}{||X_{\alpha_0}||}$, on a : $\varphi(\alpha_0) = \dfrac{{}^tX_{\alpha_0}AX_{\alpha_0}}{||X_{\alpha_0}||^2} = {}^tXAX = c$. Donc $c \in R(A)$ ce qui prouve que $R(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

3. Soit $a \in R({}^tQAQ)$. Il existe X un vecteur normé de $\mathbb{R}^n$, tel que : ${}^tX{}^tQAQX = a$, soit ${}^t(QX)A(QX) = a$. Or : $||QX||^2 = {}^t(QX)(QX) = {}^tX{}^tQQX = {}^tXX = ||X||^2 = 1$ donc $a \in R(A)$.

On prouve l'autre inclusion de la même manière en écrivant A sous la forme : ${}^t({}^tQ)({}^tQAQ){}^tQ$.
Ainsi $X \in R(A) \implies {}^tX{}^t({}^tQ)({}^tQAQ){}^tQX = {}^t({}^tQX)({}^tQAQ){}^tQX$, avec

$$||{}^tQX||^2 = {}^t({}^tQX){}^tQX = {}^tXQ{}^tQX = {}^tXX = ||X||^2 = 1$$

4. a) La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$ dans une base orthonormée formée de vecteurs propres (théorème spectral). On suppose $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$: il existe P orthogonale telle que $A = {}^tQPQ$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

D'après les questions 1.a et 2 on peut affirmer : $[\lambda_1, \lambda_2] \subseteq R(A)$.

Montrons que $R(A) \subseteq [\lambda_1, \lambda_2]$.

On a $R(A) = R(D)$ (question 3).

Soit X vecteur normé de $\mathbb{R}^2$ défini par ${}^tX = (x, y)$ avec $x^2 + y^2 = 1$.

Alors ${}^tXDX = \lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 \geqslant \lambda_1(x^2 + y^2) = \lambda_1$, et ${}^tXD \leqslant \lambda_2(x^2 + y^2) = \lambda_2$ d'où

$R(D) \subseteq [\lambda_1, \lambda_2] \implies R(A) \subseteq [\lambda_1, \lambda_2]$.

b) Le théorème spectral appliqué à B donne : $B = {}^tQ\Delta Q$ avec $\Delta = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2)$ et Q matrice de passage orthogonale. Ainsi

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A{}^tQ\Delta Q) = \mathrm{tr}(\Delta QA{}^tQ)$$

si on note $QA^tQ = (\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ alors,

$\mathrm{tr}(AB) = \mu_1\alpha_{11} + \mu_2\alpha_{22} = \mu_1\lambda_1 + \mu_2\lambda_2 + \mu_1(\alpha_{11} - \lambda_1) + \mu_2(\alpha_{22} - \lambda_2)$

$= \mu_1\lambda_1 + \mu_2\lambda_2 + (\alpha_{11} - \lambda_1)(\mu_1 - \mu_2)$

car $\alpha_{11} + \alpha_{22} = \mathrm{tr}(QA{}^tQ) = \mathrm{tr}({}^tQQA) = \mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$.

Or $\lambda_1 \leqslant \alpha_{11}$ car $\alpha_{11} \in R(QA{}^tQ) = R(A) = Sp(A) = [\lambda_1, \lambda_2]$,

d'où le résultat demandé.

Exercice 2.14.

On note $\|.\|$ la norme usuelle de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

Soit deux entiers r et n tels que $2 \leqslant r \leqslant n$ et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r. On note f et g les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés à A et ${}^tAA$.

1. a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tAA) = r$.

b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale réelle $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ telles que : ${}^tAA = PD{}^tP$.

c) Déterminer le signe des réels λ_i pour $i \in [\![1, n]\!]$.

d) Montrer que parmi les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, il y a r nombres strictement positifs et $n - r$ nuls.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que :

• $\forall\, i \in [\![1, r]\!], \lambda_i > 0$.

• $\forall\, i > r, \lambda_i = 0$.

On pose pour $i \in [\![1, n]\!], \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.

2. a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}_1 = (X_i)_{1 \leq i \leq n}$ orthonormée de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de g avec pour tout $i \in [\![r+1, n]\!], X_i \in \mathrm{Ker}(f)$.

b) On pose pour tout $i \in [\![1, r]\!], Y_i = \dfrac{1}{\sigma_i} AX_i$, montrer que la famille de vecteurs $(Y_1, \ldots, Y_r)$ est orthonormée. On complète cette famille en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ notée $\mathcal{B}_2$.

c) Déterminer la matrice Δ de f dans les bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ et en déduire l'existence de deux matrices orthogonales P_1 et P_2 telles que : $A = P_1\,\mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \cdots, 0)P_2$.

3. Soit la matrice $A' = {}^tP_2\,\mathrm{diag}(\dfrac{1}{\sigma_1}, \ldots, \dfrac{1}{\sigma_r}, 0, \ldots, 0){}^tP_1$.

a) Calculer AA' et montrer que l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à AA' est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(f)$.

b) Soit $Y \in \mathbb{R}^n$ fixé. Montrer que la fonction $X \mapsto \|AX - Y\|$ atteint son minimum sur $\mathbb{R}^n$ en $X_0 = A'Y$.

Solution :

1. a) $X \in \mathrm{Ker}(A) \implies AX = 0 \implies {}^tAAX = 0$

$X \in \mathrm{Ker}({}^tAA) \implies {}^tAAX = 0 \implies {}^tX({}^tAAX) = 0 \implies ||AX||^2 = 0 \implies AX = 0$

Donc $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}({}^tAA)$ et par le théorème du rang : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tAA)$

b) La matrice ${}^tAA$ est symétrique réelle. Le théorème spectral assure la diagonalisabilité de ${}^tAA$ dans une base orthonormale $\mathcal{B}_d$ de vecteurs propres. Si on note $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de ${}^tAA$, on pose $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ et P la matrice de passage entre les deux bases orthonormées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_d$, P est orthogonale : $P^{-1} = {}^tP$ et ${}^tAA = PD{}^tP$

c) Soit X_i vecteur propre non nul de ${}^tAA$ ou de D associé à la valeur propre λ_i. On a :

$$ {}^tAAX_i = \lambda_i X_i \implies ||AX_i||^2 = \lambda_i ||X_i||^2 $$

avec $||X_i|| > 0$ car $X_i \neq 0$, d'où $\lambda_i = \dfrac{||AX_i||^2}{||X_i||^2} \geqslant 0$

d) On sait que $\text{rg}({}^tAA) = \text{rg}(D) = r$ donc r valeurs propres seulement sont non nulles. Quitte à les renommer,on peut prendre $\lambda_i > 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$.

2. a) On prend pour $\mathcal{B}_1$ la base orthonormée $\mathcal{B}_d$ de diagonalisation de g :

- $g(X_i) = \lambda_i X_i, 1 \leqslant i \leqslant n$
- $r+1 \leqslant i \leqslant n, X_i \in \text{Ker}(g) = \text{Ker}(f)$. (q.1.a)

b) On a pour $1 \leqslant i, j \leqslant r$

$$ \begin{aligned} \langle Y_i, Y_j \rangle &= \langle \frac{1}{\sigma_i} AX_i, \frac{1}{\sigma_j} AX_j \rangle = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} ({}^tX_i {}^tAAX_j) = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} ({}^tX_i \lambda_j X_j) \\ &= \frac{\sigma_j}{\sigma_i} < X_i, X_j >= \delta_{ij} \end{aligned} $$

c) On a $(1 \leqslant i \leqslant r) \implies AX_i = \sigma_i Y_i$, puis $(r+1 \leqslant i \leqslant n) \implies AX_i = 0$ car $\text{rg}(A) = r$.

D'où $\Delta = \text{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_r, 0, \cdots, 0)$.

Soit $P_1 = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_2}$ et $P_2 = P_{\mathcal{B}_\in, \mathcal{B}}$.

Ces deux matrices de passage sont orthogonales (passage d'une base orthonormée à une base orthonormée) et vérifient : $A = P_1 \Delta P_2$

3. a) Alors $AA' = P_1 \,\text{diag}(1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0){}^tP_1$ (r 1 suivis de $n-r$ 0).

D'où : $AA'AA' = P_1 \,\text{diag}(1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0){}^tP_1 P_1 \,\text{diag}(1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0){}^tP_1$,

qui est égal à $P_1 \,\text{diag}(1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0){}^tP_1 = AA'$. Donc $(AA')^2 = AA'$.

De plus ${}^t(AA') = {}^tP_1 \,\text{diag}(1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0){}^tP_1 = AA'$, donc l'endomorphisme h associé est un projecteur orthogonal de rang r.

b) On sait que $\text{rg}(h) = \text{rg}(f)$ et $Y \in \text{Im}(h) \implies Y = AA'X = A(A'X)$ donc $\text{Im}(h) \subset \text{Im}(f)$ et donc $\text{Im}(h) = \text{Im}(f)$.

Ainsi h est-il le projecteur orthogonal sur $\text{Im}(f)$.

c) La distance de Y a un élément de $\text{Im}(f)$ est supérieure à la distance de Y à son projeté orthogonal sur $\text{Im}(f)$.

Or $AX_0 = AA'Y$ est le projeté orthogonal de Y sur $\text{Im}(f)$.

Donc le vecteur $X_0 = A'Y$ minimise la fonction $X \mapsto ||AX - Y||$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2.15.

1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} v_i$.

   a) Déterminer une matrice $P \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle qu'on ait l'égalité matricielle :

$$(\,u_0 \quad \cdots \quad u_n\,) = (\,v_0 \quad \cdots \quad v_n\,)\,P$$

b) On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n et $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ sa base canonique.

Montrer que $\mathcal{B}_1 = (1, 1+X, (1+X)^2, \dots, (1+X)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

(On pourra montrer que P est la matrice de passage entre deux bases de $\mathbb{R}_n[X]$)

c) En déduire l'expression de v_n en fonction des $u_i, 0 \leqslant i \leqslant n$:

$$v_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} u_i$$

2. On note d_n le nombre de permutations sans point fixe de $[\![1, n]\!]$ (*i.e.* de permutations σ de $[\![1, n]\!]$ telles que $\forall\, i, \sigma(i) \neq i$) et on pose : $d_0 = 1$.

a) Pour tout entier $n \geqslant 0$, montrer la relation : $n! = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} d_i$

b) En déduire l'expression de d_n en fonction de n pour $n \geqslant 0$.

c) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = (n+1)a_n + (-1)^{n+1}$.

Montrer que les deux suites (a_n) et (d_n) sont égales.

3. On note pour tout entier naturel n : $J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \, dx$.

a) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \, dt$.

b) En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, d_n = \frac{1}{e}(n! + (-1)^n J_n)$$

c) Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$: $J_n \sim \dfrac{\mathrm{e}}{n}$.

En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{(n-1)!}{\mathrm{e}} - \dfrac{d_n}{n}$.

Solution :

1. a) La matrice P est $\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \cdots & \binom{n-1}{0} & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$.

b) La famille $\mathcal{B}_1 = (1, 1+X, (1+X)^2, \cdots, (1+X)^n)$ est une famille de $(n+1)$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ échelonnée en degrés. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

La matrice P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ vers $\mathcal{B}_1$ car $(1+X)^j = \displaystyle\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i$.

Elle est donc inversible et P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_0$.

Or pour $0 \leqslant j \leqslant n, X^j = ((1+X)-1)^j = \displaystyle\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i}(1+X)^i(-1)^{j-i}$ d'où :

$$P^{-1} = \left(\binom{j}{i}(-1)^{j-i}1_{i\leqslant j}\right)_{0\leq i,j\leq n}$$

c) On a : $(v_0, \cdots, v_n) = (u_0, \cdots, u_n)P^{-1}$ d'où : $v_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(-1)^{n-i}u_i$

2. a) Soit $0 \leqslant n$, et $0 \leqslant i \leqslant n$. Le nombre de permutations à i points fixes est $\binom{n}{i}d_{n-i}$ En effet : $\binom{n}{i}$ façons de choisir les i points fixes et d_{n-i} façons de permuter sans point fixe les $n-i$ éléments restant.
On partitionne l'ensembles des $n!$ permutations de $[\![1,n]\!]$ selon le nombre de points fixes, et $n! = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i}d_{n-i}$. En posant $j = n-i$: $n! = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j}d_j \implies n! = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j}d_j$

b) On applique la question 1.c : $d_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(-1)^{n-i}i!$ et en changeant i en $n-i$:

$$d_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(-1)^i(n-i)! = n!\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

c) On vérifie l'égalité par récurrence sur n : on a $d_0 = a_0 = 1$ et
$(n+1)d_n + (-1)^{n+1} = (n+1)n!\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} + (-1)^{n+1} = d_{n+1}$

3. a) Soit $x \in \mathbb{R}$,et $n \in \mathbb{N}$. Il suffit d'appliquer la formule de Taylor-Laplace à l'ordre n à la fonction $t \mapsto e^t$ sur l'intervalle d'extrémités 0 et x :

b) Soit $n \in \mathbb{N}$,pour $x = -1$ on obtient : $\mathrm{e}^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + \int_0^{-1} \frac{(-1-u)^n}{n!}\mathrm{e}^u du.$

On pose $t = 1+u$ dans l'intégrale : $\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{d_n}{n!} + \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{n!}(-1)^n t^n e^{t-1}dt = \frac{d_n}{n!} + \frac{(-1)^n J_n}{en!}$.
Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}, d_n = \dfrac{1}{\mathrm{e}}(n! - (-1)^n J_n)$

c) Sur $[0,1], \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e} \implies \displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{e}^x dx \leqslant \int_0^1 x^n \mathrm{e} dx = \frac{\mathrm{e}}{n+1} \implies \lim_{n\to\infty} J_n = 0$

Une intégration par parties donne :

$J_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)J_n \implies nJ_n = \mathrm{e} - J_{n+1} - J_n \implies \displaystyle\lim_{n\to+\infty} nJ_n = \mathrm{e}$, soit lorsque n tend vers $+\infty$, $J_n \sim \dfrac{\mathrm{e}}{n}$.

On a : $\dfrac{d_n}{n} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}[(n-1)! + \dfrac{(-1)^n}{n} J_n] \implies |\dfrac{1}{\mathrm{e}}(n-1)! - \dfrac{d_n}{n}| = \dfrac{J_n}{\mathrm{e}n} \sim \dfrac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(n-1)!}{\mathrm{e}} - \dfrac{d_n}{n}$ converge absolument.

Exercice 2.16.

1. Soit un entier naturel $n \geqslant 2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des polynômes annulateurs de M.

a) Justifier que $\mathcal{A}$ n'est pas réduit au polynôme nul.

b) Vérifier que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

c) Montrer que $\forall\, P \in \mathbb{C}[X], \forall\, Q \in \mathcal{A}, P\,Q \in \mathcal{A}$.

d) Montrer qu'il existe un polynôme non nul de $\mathcal{A}$ de degré minimal. Soit $K \in \mathcal{A}$ un polynôme unitaire (c'est-à-dire de coefficient du terme de plus haut degré égal à 1) de degré minimal.

En utilisant la division euclidienne des polynômes, montrer que K divise tout polynôme de $\mathcal{A}$. En déduire que

$$\mathcal{A} = \{KQ, Q \in \mathbb{C}[X]\}$$

Un tel polynôme K s'appelle polynôme minimal de M.

2. Exemples.

a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Déterminer le polynôme minimal de $\lambda\, I_n$, où I_n est la matrice identité d'ordre n.

b) Soit P la matrice d'un projecteur p distinct de 0 et Id. Déterminer le polynôme minimal de P.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de polynôme minimal K. Montrer que l'ensemble des racines de K est égal à l'ensemble des valeurs propres de M.

4. a) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$, soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par :

$$f(e_1) = 0, \quad f(e_2) = e_1, \quad f(e_3) = e_2$$

Soit M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer le polynôme minimal de M.

b) Soit $p \in \mathbb{N}$, tel que $1 \leqslant p \leqslant n$. Existe-t-il des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de polynôme minimal X^p ?

c) Soit $p \in \mathbb{N}$, tel que $p > n$. Existe-t-il des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de polynôme minimal X^p ? (On pourra s'intéresser aux sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(f^k)$, où $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ a pour matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.)

Solution :

1. a) La famille $(M^k)_{0\leq k\leq n^2}$ est liée puisque $\dim(\mathcal{M}_n(C)) = n^2$.

b) La vérification et immédiate.

c) La démonstration de cette question tient au fait que :

$$(PQ)(A) = P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$$

d) Soit $P \in \mathcal{A}$ tel que $P = KQ + R$ et $\deg(R) < \deg(K)$ (division euclidienne) ; alors $R = P - KQ \in \mathcal{A}$ ce qui entraîne que $R = 0$. La réciproque est claire grâce à la question c.

2. a) Le polynôme $K(X) = X - \lambda$ est annulateur de degré minimal.

b) On a $p^2 = p$, donc $K(X) = X(X-1)$ est annulateur, de degré minimal car $q \neq 0$ et $q \neq Id$.

3. On a $\mathrm{Sp}(M) \subseteq \mathrm{Rac}(K)$ car K est annulateur (c'est du cours). Mais si λ est une racine de $(K) \setminus \mathrm{Sp}(M)$, alors $K(X) = (X-\lambda)Q(X)$ et $0 = K(M) = (M - \lambda\, I_n)Q(M)$ avec $M - \lambda\, I_n$ inversible, donc Q annulateur, en contradiction avec la minimalité de $\deg(K)$.

4. a) On a $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui vérifie $M^3 = 0$ et $M^2 \neq 0$. Ainsi $K(X) = X^3$ est-il le polynôme minimal de M.

b) De même avec $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de matrice M dans $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$, défini par

$f(e_1) = \cdots = f(e_{n-p+1}) = 0, f(e_{n-p+2}) = e_{n-p+1}, f(e_{n-p+3}) = e_{n-p+2}, \ldots,$

$f(e_n) = e_{n-1}$

La matrice M est triangulaire supérieure stricte, donc $\mathrm{Spec}(M) = \{0\}$ et K de la forme X^k ; on a facilement $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$ Donc le polynôme minimal de M est $K(X) = X^p$.

c) La suite $\big(\mathrm{Ker}(f^k)\big)$ est croissante pour l'inclusion ;

s'il existe $x \in \mathrm{Ker}(f^{k+1}) \setminus \mathrm{Ker}(f^k)$, alors $f^j(x) \in \mathrm{Ker}(f^{k+1-j}) \setminus \mathrm{Ker}(f^{k-j})$; donc la suite $(\mathrm{Ker}(f^k))$ est strictement croissante puis stationnaire puisque l'on travaille en dimension finie.

Si $K(X) = X^p$ avec $p > n$, alors la suite $\big(\mathrm{Ker}(f^k)_{1 \leq k \leq p}\big)$ est strictement croissante à plus de n termes, ce qui est contradictoire avec la notion de dimension finie.

Exercice 2.17.

Soit $\big(E, \langle\ ,\ \rangle\big)$ un espace euclidien muni de la norme $\|.\|$ associée au produit scalaire, et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :

$$\forall\, x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|$$

1. a) Soit x un vecteur appartenant à $\mathrm{Ker}(u - id) \cap \mathrm{Im}(u - id)$.

Justifier qu'il existe $y \in E$ tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, n\, x = u^n(y) - y$.

b) En déduire que $E = \mathrm{Ker}(u - id) \oplus \mathrm{Im}(u - id)$.

2. On pose : $\forall p \in \mathbb{N}, v_p = \dfrac{1}{p+1} \sum\limits_{k=0}^{p} u^k$, et on note w le projecteur sur $\mathrm{Ker}(u - id)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u - id)$.

Montrer que pour tout $x \in E$, la suite $\big(v_p(x)\big)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $w(x)$, c'est-à-dire que

$$\forall\, x \in E,\ \lim_{p\to\infty} \|v_p(x) - w(x)\| = 0$$

3. Soit Q un projecteur de E, distinct de l'application nulle.

a) Montrer que si $\mathrm{Ker}(Q)$ et $\mathrm{Im}(Q)$ sont orthogonaux, alors

$$\forall\, x \in E, \|Q(x)\| \leqslant \|x\|$$

b) Réciproquement, on suppose que : $\forall\, x \in E, \|Q(x)\| \leqslant \|x\|$.

Soit $x \in \mathrm{Im}(Q)$ et $y \in \mathrm{Ker}(Q)$. En considérant les vecteurs $z = x + \lambda\, y$ pour λ quelconque dans $\mathbb{R}$, montrer que $\langle x, y\rangle = 0$.

c) En déduire qu'un projecteur Q non nul est orthogonal si et seulement si

$$\forall\, x \in E, \|Q(x)\| \leqslant \|x\|$$

4. En déduire que w est un projecteur orthogonal.

Solution :

1. a) Il existe y tel que $u(x) = x = u(y) - y = u^{k+1}(y) - u^k(y)\,,\ \forall k$. Ensuite, par somme télescopique, il vient : $nx = u^n(y) - y$.

b) On écrit, pour tout $n \geqslant 1$, $n||x|| \leqslant ||u^n(y)|| + ||y|| \leqslant 2||y||$, par hypothèse sur u et récurrence ; donc en prenant la limite, $x = 0$. On conclut par le théorème du rang.

2. Soit $x = a + b$ une décomposition de x sur $E = \mathrm{Ker}(u - I) \oplus \mathrm{Im}(u - I)$.

Alors $w(x) = a$.

D'autre part, $u(a) = a \Rightarrow \forall k\,,\ u^k(a) = a \Rightarrow \forall p\,,\ v_p(a) = a$

et $\forall p\,,\ v_p(b) = \frac{1}{p+1} \sum\limits_{k=0}^{p} \Big[u^{k+1}(b) - u^k(b)\Big] = \dfrac{u^{p+1}(b) - b}{p+1} \Rightarrow ||v_p(b)|| \leqslant \dfrac{2||b||}{p+1} \to 0$ comme ci-dessus.

Alors $\lim\limits_{p\to+\infty} v_p(x) = a = w(x)$.

3. a) Il suffit d'utiliser le théorème de Pythagore.

b) On a

$\forall\lambda\,,\ ||x||^2 = ||Q(x + \lambda\, y)||^2 \leqslant ||x + \lambda\, y||^2 \Rightarrow \forall\lambda\,,\ 0 \leqslant 2\,\langle x, y\rangle\,\lambda + ||y||^2\,\lambda^2$, ce qui donne $\langle x, y\rangle = 0$

c) C'est une conséquence des résultats a) et b).

4. Par inégalité triangulaire,

$$\forall\, x\,,\ \forall\, p\,,\ ||v_p(x)|| \leqslant \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} ||u^k(x)|| \leqslant \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} ||x||$$

donc par passage à la limite $||w(x)|| \leqslant ||x||$.

Exercice 2.18.

Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{C}^2$ qui commutent (c'est-à-dire tels que $f \circ g = g \circ f$).

On note A et B les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ canoniquement associées à f et g. On suppose que les matrices A et B ne sont pas des matrices scalaires (c'est-à-dire ne sont pas proportionnelles à la matrice identité).

1. On suppose que f admet deux valeurs propres λ, μ, avec $\lambda \neq \mu$.

a) Montrer que chaque sous-espace propre de f est stable par g.

b) Montrer que f et g sont diagonalisables dans une même base.

c) Montrer qu'il existe deux polynômes P_1, P_2 de $\mathbb{C}_1[X]$ et une matrice $K \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tels que $A = P_1(K)$ et $B = P_2(K)$.

2. On suppose désormais que f et g n'admettent chacun qu'une seule valeur propre.

a) Montrer que f et g admettent un vecteur propre commun noté e_1.

b) Montrer qu'il existe α, β complexes tels que les matrices A et B sont semblables respectivement aux matrices $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mu & \beta \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

c) Montrer qu'il existe deux polynômes P_1, P_2 de $\mathbb{C}_1[X]$ et une matrice $K \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tels que $A = P_1(K)$ et $B = P_2(K)$.

Solution :

1. a) Soit E_λ un sous-espace propre de f qui est de dimension 1. Soit $x \in E_\lambda$. Alors

$$g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x) = (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Ainsi $g(x) \in E_\lambda$.

b) L'endomorphisme f est diagonalisable car il possède deux valeurs propres distinctes.
Si l'on note $\tilde{g}$ la restriction de g à $E_\lambda(f)$, cette restriction induit un endomorphisme de $E_\lambda(f)$ qui est un espace de dimension 1. Si x en est une base, alors $(g(x), x)$ étant liés, il existe $\nu \in \mathbb{C}$ tel que $g(x) = \nu x$, ce qui entraîne que g et f admettent x comme vecteur propre commun.
De la même façon, f et g admettent un second vecteur propre commun y vecteur propre de f associé à la valeur propre μ.
On obtient ainsi une base de $\mathbb{C}^2$ formée de vecteurs propres communs à f et g. Ainsi g est diagonalisable et admet deux valeurs propres différentes (car la matrice B n'est pas scalaire)

c) Les matrices A et B sont semblables avec la même matrice de passage Q aux matrices $D_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ et $D_2 = \begin{pmatrix} \lambda' & 0 \\ 0 & \mu' \end{pmatrix}$.
Il existe un polynôme P_1 tel que $P_1(1) = \lambda$ et $P_1(-1) = \mu$ (polynôme interpolateur) et un polynôme P_2 tel que $P_2(1) = \lambda'$ et $P_2(-1) = \mu'$.
En notant $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, il vient $D_1 = P_1(K), D_2 = P_2(K)$. Finalement

$$A = QD_1Q^{-1} = P_1(QKQ^{-1}), \quad B = QD_2Q^{-1} = P_2(QKQ^{-1})$$

2. a) On remarque que les endomorphismes f et g ne sont pas diagonalisables, car autrement les matrices A et B seraient scalaires.
Sur $\mathbb{C}$ tout endomorphisme admet au moins une valeur propre. Alors la dimension du sous-espace propre associé est de 1 (car autrement A serait scalaire). Soit e_1 un vecteur propre associé de f. Le sous-espace propre $E_\lambda(f)$ est stable par g et e_1 est un vecteur propre commun à f et g.

b) On complète e_1 en une base (e_1, e_2) de $\mathbb{C}^2$ et on obtient le résultat demandé.

c) Les matrices A et B sont semblables avec la même matrice de passage Q, respectivement à $\lambda I_2 + N_1$ et $\mu I_2 + N_2$, avec $N_1 = \alpha N, N_2 = \beta N$ et $N^2 = N_1^2 = N_2^2 = 0$.

Il reste à poser $K = N$, $P_1(X) = \lambda + \alpha X, P_2(X) = \mu + \beta X$.

Exercice 2.19.

On note C l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. A tout élément $f \in C$, on associe la fonction $g = D(f)$ définie par :

$$\text{pour tout } x \text{ réel, } g(x) = D(f)(x) = f(x+1) - f(x)$$

1. Dans cette question, F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X. On note $g = D(F)$.

 a) Montrer que g est une densité de probabilité.

 b) Déterminer g quand X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

2. On dit qu'un réel λ est une valeur propre de D s'il existe une application non nulle f de C telle que $D(f) = \lambda f$.

Déterminer les valeurs propres de D.
(On pourra utiliser les fonctions $h_a : x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$ et $k_a : x \mapsto \sin(\pi x)\mathrm{e}^{ax}$).

3. Dans cette question, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

 a) Montrer que la restriction de D à E_n induit un endomorphisme de E_n ; on le note D_n.

 b) Cet endomorphisme D_n est-il diagonalisable ?

 c) Soit $(H_n)_{n\geq 0}$ la suite de polynômes définie par $H_0(X) = 1$ et pour tout $k \geqslant 1$, $H_k(X) = \prod\limits_{i=0}^{k-1} (X - i)$.

Montrer que $(H_0, \ldots, H_n)$ est une base de E_n. Donner la matrice associée à D_n dans cette base.

 d) On écrit $X^n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k H_k$.

Soit Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que :

$$E(Y^p) = \sum_{k=0}^{n} b_k \lambda^k$$

Solution :

1. a) La fonction F est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$. Cela entraîne que la fonction g vérifie

- la fonction g est positive et continue comme différence de fonctions continues.
- pour $B < A$, par la relation de Chasles

$$\int_B^A g(t)dt = \int_B^A (F(t+1) - F(t))dt = \int_A^{A+1} F(t)dt - \int_B^{B+1} F(t)dt$$

Or $\left|\int_A^{A+1} F(t)dt - 1\right| \leqslant \int_A^{A+1} |F(t) - 1|dt$ et, pour $\varepsilon > 0$, il existe X tel que pour tout $t > X$, $|F(t) - 1| < \varepsilon$. Ainsi, pour $A > X$

$$\left|\int_A^{A+1} F(t)dt - 1\right| \leqslant \varepsilon$$

De même Il existe Y tel que si $t < Y$, $|F(t) < \varepsilon$ et pour $B + 1 < Y$

$$\left|\int_B^{B+1} F(t)dt\right| \leqslant \varepsilon$$

Ce qui montre, en prenant les limites lorsque A tend vers $+\infty$ et B vers $-\infty$, que $\int_{\mathbb{R}} g(t)dt = 1$.

b) Un calcul immédiat donne $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -1 \\ 1+x & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

2. Il s'agit de résoudre l'équation $f(x+1) - f(x) = \lambda f(x)$, pour tout x réel, soit $f(x+1) = (\lambda+1)f(x)$.

- Si $\lambda = -1$, il vient $f(x+1) = 0$ pour tout x, soit f identiquement nulle.
- Si $\lambda \neq -1$, on pose $\mu = \lambda + 1$. On remarque que $D(h_a) = (e^a - 1)h_a$. Donc si $1 + \mu > 0, a = \ln(1+\mu)$ ce qui fournit une fonction propre h_a pour tout $\mu > -1$
- De même $D(k_a) = -(e^a + 1)k_a$. Donc pour $1 + \mu < 0$, $a = \ln(-1-\mu)$ est valeur propre de fonction propre associée k_a.

Ainsi tout réel différent de -1 est valeur propre de D.

3. a) D est linéaire et si P est un polynôme de degré k, $D(P) = P(X+1) - P(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $k-1$. On définit ainsi un endomorphisme de E_n.

b) Pour des raisons de degré, la seule valeur propre possible de D est 0, qui est valeur propre puisque $D(1) = 0$.
L'endomorphisme D n'est pas diagonalisable.

c) La famille $(H_n)_{n\geq 0}$ est échelonnée en degrés. Elle est libre et deg $H_k = k$ pour tout $k \geqslant 0$. C'est donc une base de $\mathbb{R}[X]$.

$D(H_p) = \prod_{k=0}^{p-1}(X-k+1) - \prod_{k=0}^{p-1}(X-k) = p\prod_{k=0}^{p-2}(X-k) = pH_{p-1}$

La matrice demandée est donc strictement triangulaire supérieure avec une sur-diagonale $\{1, 2, \ldots, n-1\}$.

d) Par le théorème de transfert

$$E(H_k(Y)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\lambda^n}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{(n-k)!} = \lambda^k$$

Par linéarité de l'espérance

$$E(Y^p) = \sum_{k=0}^{n} b_k E(H_k(Y)) = \sum_{k=0}^{n} b_k\lambda^k$$

Exercice 2.20.

Soient μ un réel tel que $\mu \geqslant 1$ et E un espace vectoriel euclidien de produit scalaire et de norme notés respectivement $\langle .,. \rangle$ et $\|.\|$.

Une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs de E est dite μ-presque orthogonale si

$\triangleright$ Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\|u_i\| = 1$,

$\triangleright$ Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\frac{1}{\mu}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \big\|\sum\limits_{i=1}^{n} x_i u_i\big\|^2 \leqslant \mu\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$.

1. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille μ-presque orthogonale de vecteurs de E.

Montrer que $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.

2. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. Montrer que $(u_1, \ldots, u_n)$ est 1-presque orthogonale si et seulement si $(u_1, \ldots, u_n)$ est orthonormale.

(Pour l'une des implications, on pourra considérer la combinaison linéaire $u_i + u_j$ avec $i \neq j$.)

3. Soit f un endomorphisme de E.

a) Montrer qu'il existe un réel k tel que

$$\forall\, x \in E, \|f(x)\|k\|x\|$$

b) Montrer que si f est un automorphisme de E, alors il existe un réel $\lambda > 0$ tel que

$$\forall\, x \in E, \frac{1}{\lambda}\|x\|\|f(x)\|\lambda\|x\|$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille libre de vecteurs unitaires de E.

Montrer l'existence d'un réel $\mu \geqslant 1$ tel que $(u_1, \ldots, u_n)$ soit μ-presque orthogonale.

Solution :

1. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille μ-presque orthogonale de vecteurs de E et $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i u_i = 0$.

On a alors $0 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \| \sum\limits_{i=1}^{n} x_i u_i \|^2 = 0$, et donc $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$, d'où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0$. La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.

2. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.
▷ Supposons $(u_1, \ldots, u_n)$ orthonormale.

Alors, pour $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a $\| \sum\limits_{i=1}^{n} x_i u_i \|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$,
donc $(u_1, \ldots, u_n)$ est 1-presque orthogonale.
▷ Réciproquement, supposons $(u_1, \ldots, u_n)$ est 1-presque orthogonale. Soient i et j distincts dans $[\![1, n]\!]$. On a $1^2 + 1^2 = 2 \leqslant \|u_i + u_j\|^2 \leqslant 2$.
Ainsi, $\|u_i + u_j\|^2 = \|u_i\|^2 + \|u_j\|^2 + 2(u_i|u_j) = 2 + 2(u_i|u_j) = 2$,
et donc $\langle u_i, u_j \rangle = 0$. Comme les u_k sont unitaires, on en déduit que $(u_1, \ldots, u_n)$ est orthonormale.

3. a) Soient $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de E, $x \in E$ et $(x_1, \ldots, x_p)$ les coordonées de x dans cette base. Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\|f(x)\|^2 = \| \sum_{i=1}^{p} x_i f(e_i) \|^2 \leqslant \big(\sum_{i=1}^{p} \|x_i f(e_i)\| \big)^2 = \big(\sum_{i=1}^{p} |x_i| \|f(e_i)\| \big)^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^p$, on a

$$\big(\sum_{i=1}^{p} |x_i| \|f(e_i)\| \big)^2 \leqslant \big(\sum_{i=1}^{p} x_i^2 \big) \times \big(\sum_{i=1}^{p} \|f(e_i)\|^2 \big) = ||x||^2 \times \sum_{i=1}^{p} \|f(e_i)\|^2$$

car (e_i) orthonormale.
En posant $k = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{p} \|f(e_i)\|^2 + 1}$, on a bien $k > 0$ et pour tout $x \in F$, $\|f(x)\| \leqslant k\|x\|$.

b) Appliquons la question précédent, à f et f^{-1} ; il existe des constante $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$ telles que

$$\forall\, x \in E, \|f(x)\| \leqslant k_1\|x\| \text{ et } \|f^{-1}(x)\| \leqslant k_2\|x\|.$$

En particulier, pour tout $x \in E$, $\|x\| \leqslant k_2\|f(x)\|$ et donc

$$\forall x \in E,\ \frac{1}{k_2}\|x\| \leqslant \|f(x)\| \leqslant k_1\|x\|$$

En posant $\lambda = \max(k_1, k_2, 1)$, on a bien $\lambda \geqslant 1$ et

$$\forall x \in F, \frac{1}{\mu}\|x\| \leqslant \|f(x)\| \leqslant \mu\|x\|$$

c) Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de F. Soit $f : F \to F$ l'unique application linéaire vérifiant $f(e_i) = u_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ (définition d'un endomorphisme par l'image d'une base). D'après 3.b., il existe $\lambda \geqslant 1$ tel que

$$\forall x \in F,\ \frac{1}{\lambda}\|x\| \leqslant \|f(x)\| \leqslant \lambda\|x\|$$

Soient $\mu = \lambda^2$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. On a $\mu \geqslant 1$ et

$$\frac{1}{\mu}||x||^2 = \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \|\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\|^2 = ||f(x)||^2 \leqslant \mu\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \mu||x||^2$$

car $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormale.
On en déduit que $(u_1, \ldots, u_n)$ est μ-presque orthogonale.

Exercice 2.21.

Pour n entier naturel tel que $n \geqslant 2$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique $\langle ., . \rangle$, et $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est la norme euclidienne associée.

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est notée $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.

Un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est noté aussi bien $x = (x_1, \ldots, x_n)$ que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $N(A) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$, où $\mathrm{Spec}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres dans $\mathbb{C}$ de A. Pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $q_A(x) = \langle Ax, x \rangle$.

Enfin, on désigne par H_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $H_n = (a_{j,k})_{1 \leq j,k \leq n}$, avec $a_{j,k} = \dfrac{1}{j+k-1}$.

On utilisera sans démonstration la relation : $\forall\, t > 0, \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique :

$$N(A) = \sup\{|q_A(x)|, x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$$

2. On note : $K_n = \displaystyle\int_1^{\sqrt{n}} \frac{\arctan(x)}{x}\, dx$ et $L_n = \displaystyle\int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) dx$.

On pose $J_n = K_n - L_n$, et on cherche un équivalent de J_n.

a) Montrer que pour $t0$, $\arctan tt$. En déduire que $0 < L_n \leqslant 1$.

b) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

Montrer que $K_n \underset{(\infty)}{\sim} \dfrac{\pi}{4} \ln(n)$.

c) En déduire que $J_n \underset{(\infty)}{\sim} \dfrac{\pi}{4} \ln(n)$.

3. On note a l'élément de $\mathbb{R}^n$ défini par : $a = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}})$

a) Montrer que $\|a\|^2 \leqslant 1 + \ln(n)$.

b) On note $q_n = q_{H_n}$ et on admet que $4J_n \leqslant q_n(a)$ et que $N(H_n) \leqslant \pi$. Montrer que :

$$\frac{4J_n}{1 + \ln(n)} \leqslant q_n\left(\frac{a}{\|a\|}\right)$$

En déduire la limite de $N(H_n)$ lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. La matrice A est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable en base orthonormée et toutes ses valeurs propres sont réelles. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres, non nécessairement distinctes, rangées par ordre de valeur absolue décroissante.

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres, avec e_i vecteur propre associé à λ_i. Ainsi, $N(A) = |\lambda_1|$.

D'autre part, pour un vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ de norme 1, en utilisant l'expression du produit scalaire en base orthonormée, on a $|q_A(x)| = |\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2| \leqslant |\lambda_1| \|x\|^2 = |\lambda_1|$ Ce maximum est atteint pour $x = e_1$, et l'on a bien :

$$N(A) = |\lambda_1| = \sup\{|q_A(x)|, \|x\| = 1\} = \max\{|q_A(x)|, \|x\| = 1\}.$$

2. a) On pose $f(t) = t - \arctan(t)$, alors $f'(t) = 1 - \dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{t^2}{1+t^2} > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est nulle en zéro, donc strictement positive pour $t > 0$. On a donc $\forall t \geqslant 0,\ \arctan(t) \leqslant t$.
On en déduit par croissance de l'intégrale sur $[1, \sqrt{n}]$, les bornes étant bien dans le bon ordre, que $L_n \leqslant \displaystyle\int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n}}\, dx = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} \leqslant 1$.
Par ailleurs, L_n est l'intégrale sur un segment d'une fonction continue, positive et non identiquement nulle. C'est donc un réel strictement positif. Ainsi, $0 < L_n \leqslant 1$

b) La fonction $h\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x}\arctan(\dfrac{1}{x})$ est continue, positive sur $[1, +\infty[$ et équivaut au voisinage de $+\infty$ à $1/x^2$. Par critère de comparaison des intégrales de fonctions continues positives, h est ainsi intégrable sur $[1, +\infty[$. Avec la formule rappelée en début de partie, on a

$$K_n = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{\pi/2 - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\, dx = \frac{\pi}{4}\ln(n) - \int_1^{\sqrt{n}} h(x)\, dx$$

Quand $n \to +\infty$, le second terme admet une limite finie et est donc négligeable devant le premier qui tend vers $+\infty$. On a donc $K_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{4}\ln(n)$.

c) On a $J_n = K_n - L_n$ et $K_n \to +\infty$ alors que (L_n) est bornée entre 0 et 1. On a donc aussi $K_n - 1 \leqslant J_n = K_n - L_n \leqslant K_n$, K_n étant strictement positive comme intégrale sur un segment avec bornes bien rangées d'une fonction continue positive non identiquement nulle, on peut diviser par K_n .
Ainsi : $1 - \dfrac{1}{K_n} \leqslant J_n \leqslant 1$ et par le théorème d'encadrement :

$$J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4}\ln(n)$$

3. a) On remarque que $\|a\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ décroît sur $[1, +\infty[$, on a $\forall k \geqslant 2,\ \dfrac{1}{k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$.

En sommant ces inégalités de 2 à n pour $n \geqslant 2$, on a donc

$$\|a\|^2 \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\, dt = 1 + \int_{1}^{n} \frac{dt}{t} = 1 + \ln(n)$$

b) On a admis que $4J_n \leqslant q_n(a)$. Avec la question précédente, on en déduit que

$$0 \leqslant \frac{4J_n}{1+\ln(n)} \leqslant \frac{4J_n}{\|a\|^2} \leqslant q_n\Big(\frac{a}{\|a\|}\Big) = \frac{q_n(a)}{\|a\|^2}$$

c) D'après les questions 1. et 3.b, H_n étant symétrique réelle,

$$N(H_n) = \sup_{\|x\|=1} |q_n(x)| \geqslant q_n\Big(\frac{a}{\|a\|}\Big) \geqslant \frac{4J_n}{1+\ln(n)}.$$

On suppose acquis que $N(H_n) \leqslant \pi$. On a ainsi $\dfrac{4J_n}{1+\ln(n)} \leqslant N(H_n) \leqslant \pi$

La question 2.c montre que le minorant tend vers π. On a donc, par théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} N(H_n) = \pi$$

Exercice 2.22.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles. Soit T l'application définie sur E, par :

$$\forall f \in E, T(f)(x) = \frac{1}{2}\Big(f\big(\frac{x}{2}\big) + f\big(\frac{x+1}{2}\big)\Big)$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?

2. On note T^n la composée de T avec lui même n fois. Donner une expression de $T^n(f)$ en fonction de f et de n.

3. On appelle valeur propre de T tout réel λ pour lequel il existe $f \in E$, $f \neq 0$, tel que $T(f) = \lambda f$.

On dit alors que f est une fonction propre pour la valeur propre λ.

a) Soit λ une valeur propre de T. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

b) Montrer que 1 est valeur propre de T. Déterminer les fonctions propres associées.

c) Montrer que -1 n'est pas valeur propre de T.

Solution :

1. L'application T est linéaire. De plus $T(f)$ est une fonction définie sur $[0, 1]$ (car $x/2$ et $(x+1)/2$ appartiennent à $[0, 1]$) et continue sur $[0, 1]$ comme somme de fonctions continues. L'application T n'est pas injective. Il existe en effet des fonctions f telles que pour tout $x \in [0, 1], f(x/2) + f((x+1)/2) = 0$. Par exemple $f(x) = \sin(2\pi x)$ vérifie

$$f\big(\frac{x}{2}\big)+f\big(\frac{x+1}{2}\big)=\sin(\pi x)+\sin(\pi x+\pi)=0$$

2. On calcule $T^2(f)$. Il vient :

$$T^2(f)(x)=\frac{1}{4}\big[f\big(\frac{x}{4}\big)+f\big(\frac{x+1}{4}\big)+f\big(\frac{x+2}{4}\big)+f\big(\frac{x+3}{4}\big)\big]$$

On montre alors par récurrence sur n que :

$$T^n(f)(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}f\big(\frac{x+k}{2^n}\big)$$

- vérifié pour $n=1,2$.
- supposons la relation vérifiée pour n. Alors

$$\begin{aligned}T^{n+1}(f)(x)&=\frac{1}{2}\big(T^n(f)\big(\frac{x}{2}\big)+T^n(f)\big(\frac{x+1}{2}\big)\big)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}f\big(\frac{x/2+k}{2^n}\big)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}f\big(\frac{(x+1)/2+k}{2^n}\big)\\&=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1}f\big(\frac{x+2k}{2^{n+1}}\big)+\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1}f\big(\frac{x+2k+1}{2^{n+1}}\big)\\&=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1}f\big(\frac{x+k}{2^{n+1}}\big)\end{aligned}$$

3. a) Soit λ une valeur propre de T de fonction propre associée f. Par la question précédente, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $\lambda^n f(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}f\big(\frac{x+k}{2^n}\big)$.

Or la fonction f étant continue sur $[0,1]$ elle est majorée en valeur absolue par un nombre M et

$$|T^n(f)(x)\leqslant\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\left|f\left(\frac{x+k}{2^n}\right)\right|\leqslant M$$

Donc la suite $(\lambda^n f)$ est bornée, ce qui entraîne que $|\lambda|\leqslant 1$.

b) Pour $\lambda=1$, on cherche f non nulle telle que $T(f)=f$ ce qui entraîne que pour tout $n\in\mathbb{N},T^n(f)=f$, soit

$$f(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}f\big(\frac{x+k}{2^n}\big)$$

Cette dernière expression est une somme de Riemann associée à la fonction f.

À la limite $f(x)=\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$, ce qui signiife que f est constante.

La réciproque est aisée à vérifier.

Ainsi 1 est valeur propre de T et le sous-espace propre associé est $\mathbb{R}_0[X]$.

c) Le réel -1 ne peut être valeur propre car, on aurait

$$(-1)^n f(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} f\big(\frac{x+k}{2^n}\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)dt$$

alors que la partie gauche de l'équation n'a pas de limite.

Exercice 2.23.

Dans cet exercice, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie n, et f un endomorphisme de E. On note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f et $R[f]$ l'ensemble des polynômes en f :

$$C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \ / \ f\circ g = g\circ f\}, \text{ et } R[f] = \{P(f) \ / \ P \in \mathbb{R}[X]\}$$

1. a) Montrer que $C(f)$ et $R[f]$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$.

b) Montrer que $R[f] \subset C(f)$.

On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique s'il existe au moins un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

2. Montrer que f est cyclique si et seulement il existe une base $\mathcal{B}$ de E et des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ tels que

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

On considère dans toute la suite un endomorphisme cyclique de E.

3. Soit $P(f) = f^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k$. Montrer que $P(f) = 0$.

4. a) Déterminer une base de $R[f]$

b) En déduire que $C(f) = R[f]$.

5. On suppose $\alpha_0 = 0$. Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ si et seulement si $\alpha_1 \neq 0$.

Solution :

1. a) On vérifie aisément cette question.

b) Question également évidente, par linéarité et puisque f commute avec toute puissance de f.

2. Il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E. Dans cette base, la matrice associée à f est de la forme proposée puisqu'on écrit en colonnes les coordonnées des vecteurs $f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0), f^n(x_0))$, ce dernier vecteur s'écrivant sous la forme $f^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_0)$ par définition d'une base.

Réciproquement supposons qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice associée à f est M.
Alors $f(e_i) = e_{i+1}, i \in [\![1, n-1]\!]$.
On pose $x_0 = e_1$ et il vient $e_2 = f(x_0), e_3 = f^2(x_0), \dots, e_n = f^{n-1}(x_0)$.

3. On remarque que $P(f)(x_0) = 0$ et par commutation, pour tout k :

$$P(f)(f^k(x_0)) = f^k(P(f)(x_0)) = 0$$

Ainsi $P(f)$ est-il nul sur une base de E donc identiquement nul.

4. a) On a donc par la question précédente que $f^n \in \text{Vect}(Id, f, \dots, f^{n-1})$. Par une récurrence immédiate pour tout $p \geqslant 0$, on a $f^{n+p} \in \text{Vect}(Id, f, \dots, f^{n-1})$, ce qui entraîne que la famille $(Id, f, \dots, f^{n-1})$ engendre $R[f]$.

De plus cette famille est libre car

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k = 0 \implies \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0) = 0 \implies a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$$

Ainsi $\mathbb{R}[f] = \text{Vect}(Id, f, \dots, f^{n-1})$, qui est de dimension n.

b) Soit $h \in C(f)$. On écrit $h(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$.

On pose $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$. On a alors

- $P(x_0) = h(x_0)$
- par commutation, pour tout i, $P(f^i(x_0)) = h(f^i(x_0))$.

Donc $h = P$.

5. On suppose dans cette question que $\alpha_0 = 0$.

On remarque qu'à cause du décalage des 1, les $(n-1)$ premières colonnes de M forment une famille libre.

Donc $\text{rg}(M) \geqslant n-1$. Or $\alpha_0 = 0$ donne une ligne de 0 et $\text{rg}(M) \leqslant n-1$. Ainsi $\text{rg}(M) = n-1$ et $\dim \text{Ker}\, M = 1$.
Or

$$P(x_0) = 0 \implies f\left(f^{n-1}(x_0) - \alpha_1 x_0 - \cdots - \alpha_{n-1} f^{n-2}(x_0)\right) = 0$$

Donc $\text{Ker}\, M = \text{Vect}(f^{n-1}(x_0) - \alpha_1 x_0 - \cdots - \alpha_{n-1} f^{n-2}(x_0))$.

- si $\alpha_1 = 0$, la base de $\text{Ker}\, f$ trouvée ci-dessus est également élément de $\text{Im}\, f$.
- si $\alpha_1 \neq 0$, alors $u = -\alpha_1 x_0 - \cdots - \alpha_{n-1} f^{n-2}(x_0) + f^{n-1}(x_0) \notin \text{Im}\, f$, ce qui montre que $\text{Ker}\, f \oplus \text{Im}\, f = E$.