DM 4 - sujet A

THÈME : LOIS À DENSITÉ

Exercice I

Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose $Y = \ln\left(e^X - 1\right)$.

1. **a)** Justifier que Y est une variable à densité et préciser une densité de Y.
b) Tracer à l'aide de python la densité obtenue sur $[-5;5]$? Commenter.

2. Vérifier que $\mathbf{E}(Y)$ existe et la calculer.

3. On importe la bibliothèque `numpy.random` sous l'alias `rd`. La commande `rd.exponential(1,m)` permet d'avoir une matrice ligne avec `m` colonnes dont chaque coefficient est une réalisation de X.
Comment simuler la variable Y et vérifier le calcul précédent en donnant une approximation de $\mathbf{E}(Y)$?

Exercice II

- *Construction de la variable* X.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \dfrac{2}{\pi\left(e^t + e^{-t}\right)}$.

4. **a)** Soit la fonction g définie sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ par : $\forall \theta \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[, \qquad g(\theta) = \ln\left(\tan(\theta)\right)$.
Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et calculer sa dérivée.
b) En déduire grâce au changement de variable $t = g(\theta)$ que f est une densité de probabilité.
On note dans toute la suite X une variable aléatoire admettant une densité égale à f.
c) Que dire de l'espérance de X?

- *Préliminaires au calcul de la variance de* X.

5. Soit p un entier naturel non nul.
a) Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre p. Calculer l'espérance $\mathbf{E}\left(Y^2\right)$.
b) On note $J_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-pt}\, dt$. Déduire de la question précédente la convergence et la valeur de J_p.
c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-pt}}{1+e^{-2t}}\, dt$ converge, puis que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-pt}}{1+e^{-2t}}\, dt \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- *Variance de* X *à l'aide d'une série.*

6. **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\frac{1}{1+e^{-2t}} = (-1)^{n+1} \frac{e^{-2(n+1)t}}{1+e^{-2t}} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-2kt}.$$

b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}^+$:

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\left[(-1)^{n+1} \frac{e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-(2k+1)t}\right].$$

c) Montrer finalement que X admet une variance et que

$$\mathbf{V}(X) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

d) Proposer deux méthodes pour approximer la variance de X. L'une utilisant la somme précédente, l'autre en utilisant la même idée que la question 3.

DM 4 - sujet *

THÈME : LOIS À DENSITÉ

Exercice I

1. Soient X une variable à densité de loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ et a un réel fixé supérieur à 1.
Déterminer le réel σ afin que la quantité $\mathbf{P}\big(X \in [a-1; a+1]\big)$ soit maximale.

Exercice II : Autour de la loi normale

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et T une variable aléatoire définie sur Ω suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. On notera Φ la fonction de répartition de T.

2. **a)** Sachant que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est encore valable pour les variables à densité, montrer que pour tout $x > 0$, on a :
$$0 < 1 - \Phi(x) \leqslant \frac{1}{2x^2}.$$
b) En déduire l'existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - \Phi(x)\big)\,\mathrm{d}x$.
c) Calculer I.

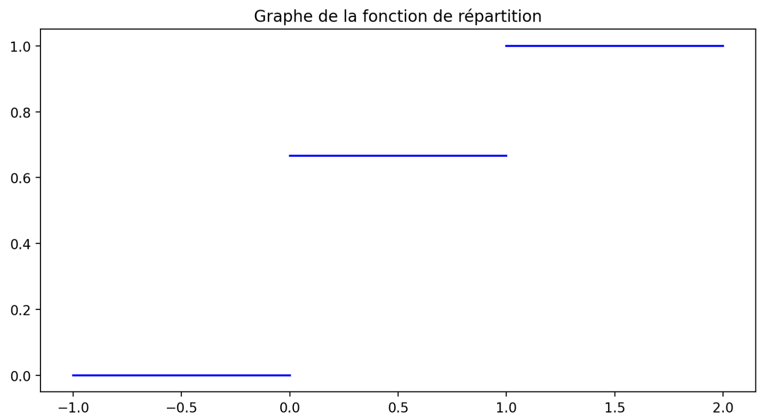
3. On associe à T les variables aléatoires suivantes :
$$X = |T|, \quad Y = \lfloor T \rfloor \quad \text{et} \quad Z = \lfloor X \rfloor$$
où $|\cdot|$ désigne la valeur absolue et $\lfloor\cdot\rfloor$, la partie entière.
a) Vérifier que X est à densité et donner une densité.
b) Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la probabilité $\mathbf{P}(Z = k)$ à l'aide de la fonction Φ.
c) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la probabilité $\mathbf{P}(Y = k)$.
d) En raisonnant sur les sommes partielles, montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k\big(\mathbf{P}(Y = k) - \mathbf{P}(Y = -k)\big)$.
e) En déduire l'espérance de Y.
f) Montrer que Z admet une espérance.

Problème : Médiane(s)

4. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Notons F sa fonction de répartition. Dans la suite, on appelle ensemble des médianes de X l'ensemble $\mathscr{M}(X)$ défini par :
$$\mathscr{M}(X) = \left\{ m \in \mathbb{R} \;\middle|\; \mathbf{P}\big([X < m]\big) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \mathbf{P}\big([X \leqslant m]\big) \right\}.$$

- *Exemples dans le cas discret.*

a) On suppose dans cette question que X suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ avec $p \in]0,1[$. Déterminer $\mathscr{M}(X)$.
On pourra distinguer $p < 1/2$, $p = 1/2$, $p > 1/2$ et s'appuyer sur la représentation graphique de la fonction de répartition. Par exemple, avec python pour $p = 1/3$, on obtient



b) On suppose dans cette question que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;1/2)$.

i) Montrer que :

$$\forall\, k \in [\![0;n]\!], \qquad \mathbf{P}\big([X \leqslant k]\big) = \mathbf{P}\big([X \geqslant n-k]\big).$$

ii) Dans cette question, on suppose que n est pair. Vérifier que F, la fonction de répartition de X ne prend pas la valeur $1/2$. En déduire que $\mathscr{M}(X)$ est réduit à un singleton à déterminer.

iii) On suppose maintenant que n est impair. Vérifier que F prend la valeur $1/2$. En déduire que $\mathscr{M}(X)$ est réduit à un segment à déterminer.

- *Exemples et propriétés dans le cas continu.*

On suppose dans la suite que X est une variable à densité avec une densité f continue sur $\mathbb{R}$.

c) *Exemple 1.*
Déterminer $\mathscr{M}(X)$ lorsque X suit la loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$. Vérifier que :

$$\mathbf{E}(X) \notin \mathscr{M}(X).$$

d) *Exemple 2.*
Que dire de $\mathscr{M}(X)$ si X est une variable à densité avec une densité paire ?

e) *Informatique.*

i) On suppose que X admet une densité strictement positive sur $\mathbb{R}$. Vérifier que $\mathscr{M}(X)$ se réduit à un singleton (on notera $\mathscr{M}(X) = \{m\}$).

ii) Proposer un programme python qui prend en argument une précision $e \in \mathbb{R}_*^+$, la fonction de répartition F et renvoie une approximation de m à e-près.

f) On suppose que X admet une variance (et donc une espérance). Soit $m \in \mathscr{M}(X)$.

→ Montrer que si $m \leqslant \mathbf{E}(X)$ alors $\mathbf{V}(X) \geqslant \big(m-\mathbf{E}(X)\big)^2 \mathbf{P}(X \leqslant m)$.
On pourra dans un premier temps, établir que $\mathbf{V}(X) \geqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{m} (t-\mathbf{E}(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.

→ Montrer que si $m \geqslant \mathbf{E}(X)$ alors $\mathbf{V}(X) \geqslant \big(m-\mathbf{E}(X)\big)^2 \big(1-\mathbf{P}(X \leqslant m)\big)$.

Conclure en montrant que :

$$\big|m-\mathbf{E}(X)\big| \leqslant \sqrt{2\mathbf{V}(X)}.$$

g) Dans la suite, on souhaite déterminer les réels a qui minimise la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(a) = \mathbf{E}\Big(\big|X-a\big|\Big) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t-a|\, f(t)\mathrm{d}t.$$

i) Justifier que φ est une fonction convexe.

ii) Vérifier que la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto t f(t)$ admet une primitive G sur $\mathbb{R}$ de limite nulle en $-\infty$.

iii) En déduire que φ est dérivable et exprimer φ' à l'aide de la fonction de répartition F de X.

iv) Conclure.

DM 4 - éléments de solution

Sujet A

1.a) La variable X est presque surement à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$. Donc $e^X - 1$ est aussi presque surement à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$. Dès lors Y est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_Y(t) = \mathbf{P}(Y \leqslant t) &= \mathbf{P}\left(\ln\left(e^x - 1\right) \leqslant t\right) \\ &= \mathbf{P}\left(e^X \leqslant e^t + 1\right) \quad \text{(exp est strict. croiss.)} \\ &= \mathbf{P}\left(X \leqslant \ln\left(e^t + 1\right)\right) \quad \text{(ln aussi)} \\ &= F_X\left(\ln\left(e^t + 1\right)\right). \end{aligned}$$

Comme X suit une loi exponentielle, on a de plus

$$F_Y(t) = 1 - e^{-\ln\left(e^t + 1\right)}$$

car $\ln\left(e^t + 1\right) \geqslant \ln(1) \geqslant 0$. D'où

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= 1 - e^{-\ln\left(1/\left(e^t + 1\right)\right)} \\ &= 1 - \frac{1}{e^t + 1} = \frac{e^t}{e^t + 1}. \end{aligned}$$

Remarque. On vérifie que F_Y *est bien croissante avec les bonnes limites en* $\pm\infty$.
On en déduit par quotient que F_Y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Dès lors Y est bien une variable à densité et une densité est obtenue par dérivation via :

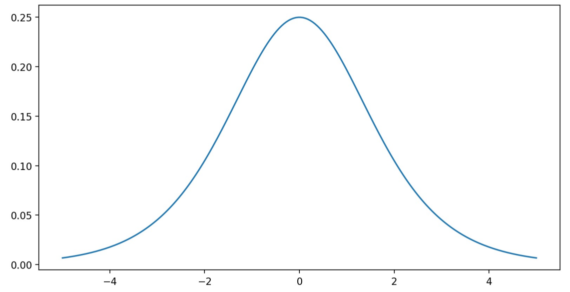
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_Y(t) = {F_X}'(t) = \frac{e^t}{\left(1 + e^t\right)^2}.$$

1.b)

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

x=np.linspace(-5,5,200)
y=np.exp(x)/(1+np.exp(x))**2

plt.plot(x,y)
plt.show()
```



Notons que f_Y est une fonction paire. En effet, pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_Y(-t) &= \frac{e^{-t}}{\left(1 + e^{-t}\right)^2} \\ &= \frac{e^{-t}}{\left(e^{-t}\left(1 + e^t\right)\right)^2} \\ &= \frac{e^{-t}}{e^{-2t}\left(1 + e^t\right)^2} \\ &= \frac{e^t}{\left(1 + e^t\right)^2} = f_Y(t). \end{aligned}$$

2. La fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto t f_Y(t)$ est continue. Donc l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\, dt$$

est généralisée en $\pm\infty$. Or, à l'aide des croissances comparées,

$$t f_Y(t) = o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Par le critère de négligeabilité sachant que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{t^2}$ sont convergentes, l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\, dt$$

est absolument convergente. L'espérance de Y existe.
Or la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto t f_Y(t)$ est impaire, nécessairement

$$\mathbf{E}(Y) = 0.$$

3.

```
import numpy.random as rd

N=50000
X=rd.exponential(1,N)
Y=np.zeros(N)
for iter in range(N):
    Y[iter]=np.log(np.exp(X[iter])-1)
print(np.mean(Y))

# résultat :
0.008109848055894197
# qui est bien proche de 0.
```

4.a) La fonction tangente est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ vers $]0, +\infty[$.
La fonction logarithme est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
Par composition, g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= \frac{1 + \tan^2(\theta)}{\tan(\theta)} = \frac{1}{\cos^2(\theta)\tan(\theta)} \\ &= \frac{1}{\cos(\theta)\sin(\theta)} = \frac{2}{\sin(2\theta)} \end{aligned}$$

4.b) Vérifions la définition.

- La fonction f est positive.
- Par quotient, f est continue sur $\mathbb{R}$.
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_a^b \frac{1}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t.$$

Effectuons le changement de variable $t = g(\theta)$, $\mathscr{C}^1$ et bijective de $]0, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. Dans un premier temps, $\mathrm{e}^t = \tan\theta$, $\mathrm{e}^{-t} = 1/\mathrm{e}^t = 1/\tan(\theta)$ et

$$f(t) = \frac{2}{\pi\big(\tan(\theta) + 1/\tan(\theta)\big)}.$$

Dans un second temps

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = g'(\theta) = \frac{\tan'(\theta)}{\tan(\theta)}.$$

Sachant que $\tan'(\theta) = 1 + \tan(\theta)^2$, il vient :

$$\mathrm{d}t = \frac{1 + \tan(\theta)^2}{\tan(\theta)}\,\mathrm{d}\theta;$$

puis en posant $\alpha = g^{-1}(a)$, $\beta = g^{-1}(b)$,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_\alpha^\beta \frac{1 + \tan^2(\theta)}{\tan(\theta)\left(\tan(\theta) + \frac{1}{\tan(\theta)}\right)}\mathrm{d}\theta.$$

L'intégrande se simplifie

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_\alpha^\beta 1\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}(\beta - \alpha).$$

Or :

→ Quand a tend vers $-\infty$, α tend vers 0 ;

→ Quand b tend vers $+\infty$, β tend vers $\frac{\pi}{2}$.

On en déduit la convergence et l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1.$$

Finalement, f est une densité de probabilité.

4.c) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(-t) = \frac{2}{\pi\left(\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^t\right)} = f(t).$$

Donc f est paire.
La fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto t f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$$

est généralisée en $\pm\infty$. Or par les croissance comparées :

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 |t f(t)| = 0.$$

C'est-à-dire

$$|t f(t)| = o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Par le critère de négligeabilité sachant que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ sont convergentes, l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$$

est absolument convergente. L'espérance de X existe. Or par imparité de $t \mapsto t f(t)$,

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

5.a) Comme Y suit une loi exponentielle de paramètre p, on sait que Y admet une espérance et une variance avec

$$\mathbf{E}(\mathrm{Y}) = \frac{1}{p} \quad\text{et}\quad \mathbf{V}(\mathrm{Y}) = \frac{1}{p^2}.$$

Or par la formule de Koenig-Huygens,

$$\mathbf{V}(\mathrm{Y}) = \mathbf{E}\left(\mathrm{Y}^2\right) - \mathbf{E}(\mathrm{Y})^2,$$

d'où
$$\mathbf{E}\left(\mathrm{Y}^2\right) = \frac{2}{p^2}.$$

5.b) Comme Y^2 admet une espérance, et qu'une densité de Y est

$$t \mapsto \begin{cases} p\mathrm{e}^{-pt} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors par le théorème de transfert,

$$\mathbf{E}\left(\mathrm{Y}^2\right) = p\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

converge. Ainsi J_p existe et

$$\mathrm{J}_p = \frac{2}{p^3}.$$

5.c) La fonction

$$h : t \mapsto \begin{cases} \frac{t^2\mathrm{e}^{-pt}}{1+\mathrm{e}^{-2t}} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^*$ et positive sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $\mathbb{R}_-$.
De plus pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$0 \leqslant \frac{t^2\mathrm{e}^{-pt}}{1 + \mathrm{e}^{-2t}} \leqslant t^2\mathrm{e}^{-pt}.$$

Or, on vient justement de vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ était convergente. Par le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^2\mathrm{e}^{-pt}}{1 + \mathrm{e}^{-2t}}\,\mathrm{d}t$$

est donc convergente. Puis par croissance l'intégrale

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{t^2\mathrm{e}^{-pt}}{1 + \mathrm{e}^{-2t}}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\mathrm{J}_p = \int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{p^3} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On conclut sur l'existence et le calcul de la limite par le théorème d'encadrement.

6.a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$.

La somme $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-2kt}$ est une somme géométrique de raison $-e^{-2t}$ et de premier terme 1. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-2kt} = \frac{1-(-1)^{n+1}e^{-2(n+1)t}}{1+e^{-2t}}$$
$$= (-1)^{n+1}\frac{e^{-2(n+1)t}}{1+e^{-2t}} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-2kt}.$$

6.b) Notons que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \frac{2}{\pi\left(e^t + e^{-t}\right)} = \frac{2e^{-t}}{\pi\left(1+e^{-2t}\right)}.$$

D'après la question précédente,

$$f(t) = \frac{2e^{-t}}{\pi}\left((-1)^{n+1}\frac{e^{-2(n+1)t}}{1+e^{-2t}} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-2kt}\right).$$

6.c) Remarquons que

$$t^2 f(t) = \frac{2}{\pi}\left[(-1)^{n+1}\frac{t^2e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^2 e^{-(2k+1)t}\right].$$

Or les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\,dt \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-(2k+1)t}\,dt$$

sont convergentes d'après les questions précédentes. On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$$

est convergente. Puis par parité, on a la convergence de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$$

Elle même absolument convergente puisque l'intégrande est positive. Par le théorème de transfert, X admet un moment d'ordre 2 et donc une variance.

D'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)^2.$$

Or on a vu que $\mathbf{E}(X) = 0$ et

$$\mathbf{E}\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt = 2\int_0^{+\infty} t^2 f(t)dt.$$

De plus

$$\int_0^{+\infty} t^2 f(t)dt$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[(-1)^{n+1}\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\,dt + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k J_{2k+1}\right].$$

Finalement,

$$\mathbf{V}(X) = \frac{4}{\pi}\left[(-1)^{n+1}\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\,dt + \sum_{k=0}^{n}\frac{2(-1)^k}{(2k+1)^3}\right].$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ avec

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

on a

$$\mathbf{V}(X) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

6.d) *Méthode 1.*

La première idée est d'utiliser la formule précédente et d'approximer $\mathbf{V}(X)$ par une somme partielle. Pour « N assez grand »

$$\mathbf{V}(X) \simeq \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

Un code possible est alors :

```
import numpy as np


# Méthode 1
N=500
V=0
E=1 # pour le changement de signe
for k in range(N):
    V+=E/(2*k+1)**3
    E=-E
print(V*8/np.pi)
```

Méthode 2. Via la méthode d'inversion

En reprenant le calcul de la question 4.b), on peut expliciter la onction de répartition de X par

$$F(x) = \frac{2}{\pi}g^{-1}(x).$$

On vérifie que la variable

$$Z = g\left(\frac{2}{\pi}U\right) \quad \text{avec} \quad U \hookrightarrow \mathscr{U}(]0;1[)$$

a la même loi que X ce qui permet de simuler la variable X par :

```
import numpy.random as rd

def g(theta):
    return np.log(np.tan(theta))

def simuX():
    u=rd.random()
    return g(u*np.pi/2)
```

Ensuite, en remarquant que $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2)$, on peut approximer la variance par la moyenne empirique d'un échantillon formée à partir de X^2. Par exemple :

```
N=50000
X=rd.exponential(1,N)
Y1=np.zeros(N)
Y2=np.zeros(N)
for iter in range(N):

    Y2[iter]=simuX()**2
print(np.mean(Y2))
```

Les résultats :

```
2.4674010989991113

2.4833811210379535
```

*Sujet **

Exercice I

1. Effectuons le changement de variable affine $u = \frac{x}{\sigma}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(a-1 \leqslant X \leqslant a+1) &= \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\int_{\frac{a-1}{\sigma}}^{\frac{a+1}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}}\sigma\cdot du\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\int_{\frac{a-1}{\sigma}}^{\frac{a+1}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.\end{aligned}$$

On cherche donc le minimum de la fonction G définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par

$$G : \sigma \mapsto \int_{\frac{a-1}{\sigma}}^{\frac{a+1}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Soit F, une primitive de la fonction continue $u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}$ de sorte que

$$G(\sigma) = F\left(\frac{a+1}{\sigma}\right) - F\left(\frac{a-1}{\sigma}\right).$$

En tant que primitive, F est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition, G est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $\sigma \in \mathbb{R}_*^+$

$$\begin{aligned}&G'(\sigma)\\ &= F'\left(\frac{a+1}{\sigma}\right)\cdot\left(-\frac{a+1}{\sigma^2}\right) - F'\left(\frac{a-1}{\sigma}\right)\cdot\left(-\frac{a-1}{\sigma^2}\right)\\ &= \exp\left(-\frac{\left(\frac{a+1}{\sigma}\right)^2}{2}\right)\cdot\left(-\frac{a+1}{\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{\left(\frac{a-1}{\sigma}\right)^2}{2}\right)\cdot\left(-\frac{a-1}{\sigma^2}\right).\end{aligned}$$

Ainsi $G'(\sigma) \geqslant 0$ si et seulement si

$$\exp\left[\frac{(a+1)^2-(a-1)^2}{2\cdot\sigma^2}\right] \geqslant \frac{a+1}{a-1}.$$

En simplifiant le membre de gauche, $G'(\sigma) \geqslant 0$ si et seulement si

$$\exp\left(\frac{2\cdot a}{\sigma^2}\right) \geqslant \frac{a+1}{a-1}.$$

Comme la fonction logarithme est strictement croissante, c'est équivalent à

$$\frac{2\cdot a}{\sigma^2} \geqslant \ln\left(\frac{a+1}{a-1}\right) \iff \sigma^2 \leqslant \frac{2\cdot a}{\ln\left(\frac{a+1}{a-1}\right)}.$$

Comme σ est à valeur positive, c'est équivalent à

$$\sigma \leqslant \sqrt{\frac{2\cdot a}{\ln\left(\frac{a+1}{a-1}\right)}}.$$

Résumons si on pose

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{2\cdot a}{\ln\left(\frac{a+1}{a-1}\right)}}$$

alors $G'(\sigma) \geqslant 0$ si et seulement si $\sigma \leqslant \sigma_0$. La fonction G est croissante sur l'intervalle $]0;\sigma_0]$ et décroissante sur $[\sigma_0;+\infty[$. Ainsi, G admet un maximum en σ_0.
Concluons $\mathbf{P}(a-1 \leqslant X \leqslant a+1)$ est maximale lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma_0)$.

Exercice II
d'après oral ESCP 99

2. Dans la suite, une densité de T est définie pour tout x réel par

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

et la fonction de répartition de T est alors

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt.$$

2.a) La loi normale centrée réduite admet un moment d'ordre 2 et une variance égale à 1. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'applique et donne pour tout x réel :

$$\mathbf{P}(|T| > x) \leqslant \frac{1}{x^2} \iff \mathbf{P}([T > x] \cup [T < -x]) \leqslant \frac{1}{x^2}$$

Par symétrie de la loi normale centrée réduite :

$$2\mathbf{P}(T > x) \leqslant \frac{1}{x^2}.$$

On en déduit l'inégalité de gauche

$$1 - \Phi(x) \leqslant \frac{1}{2x^2}.$$

L'inégalité de droite est directe car la densité est strictement positive.

2.b,c) Par les critères de majoration et de Riemann, on montre que l'intégrale $\int_0^{+\infty} 1-\Phi(x)\,dx$ converge. De plus, pour $A > 0$, intégrons par parties (les fonctions sont $\mathscr{C}^1$)

$$\int_0^A (1-\Phi(t))\,dt = \left[t(1-\Phi(t))\right]_0^A - \int_0^A t\varphi(t)\,dt$$

Or les inégalités

$$0 < A(1-\Phi(A)) \leqslant A\frac{1}{2A^2}$$

donne par le théorème d'encadrement

$$\lim_{A\to+\infty} A(1-\Phi(A)) = 0.$$

D'où pour $A \to +\infty$

$$\int_0^{+\infty}\left(1-\Phi(t)\right)dt = \int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,dt.$$

Sachant qu'une primitive de $t \mapsto t\varphi(t)$ est $-\varphi$, on trouve

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

3.a) On a directement

$$X(\Omega) = \mathbb{R}^+.$$

Calculons la fonction de répartition de $X = |T|$.
- pour tout $x \leqslant 0$, $\mathbf{P}(X \leqslant x) = 0$.
- pour $x > 0$,

$$\mathbf{P}(X \leqslant x) = \mathbf{P}(-x \leqslant T \leqslant x) = \int_{-x}^{x}\varphi(t)\,dt = 2\Phi(x) - 1.$$

Par dérivation, on montre qu'une densité de X est donnée par

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2\varphi(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On vérifie ensuite que X a une espérance avec

$$\mathbf{E}(X) = 2\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

3.b) Pour tout $k \geqslant 0$, on a

$$[Z = k] = [\lfloor X \rfloor = k] = [k \leqslant X < k+1].$$

Comme X est à densité

$$\mathbf{P}(Z = k) = \mathbf{P}([k < X \leqslant k+1]) = 2\int_k^{k+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 2\big(\Phi(k+1) - \Phi(k)\big).$$

3.c) De même, pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$[Y = k] = [\lfloor T \rfloor = k] = [k \leqslant T < k+1]$$

et

$$\mathbf{P}(Y = k) = \int_k^{k+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(k+1) - \Phi(k).$$

3.d) Utilisons, comme suggéré dans l'énoncé, les sommes partielles. Pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{N} k(\mathbf{P}(Y = k) - \mathbf{P}(Y = -k)) = \sum_{k=1}^{N} k(\Phi(k+1) - \Phi(k)) - \sum_{k=1}^{N} k(\Phi(-k+1) - \Phi(-k))$$

Or :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N} k(\Phi(k+1) - \Phi(k)) \\
&= \sum_{k=1}^{N} [(k+1)\Phi(k+1) - k\Phi(k)] - \sum_{k=1}^{N} \Phi(k+1) \\
&= (N+1)\Phi(N+1) - \Phi(1) - \sum_{k=2}^{N+1} \Phi(k)
\end{aligned}$$

et comme pour tout $x \geqslant 0, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N} k(\Phi(-k+1) - \Phi(-k)) \\
&= \sum_{k=1}^{N} k(\Phi(k) - \Phi(k-1)) \\
&= \sum_{k=1}^{N} [k\Phi(k) - (k-1)\Phi(k-1)] - \sum_{k=1}^{N} \Phi(k-1) \\
&= N\Phi(N) - \sum_{k=0}^{N-1} \Phi(k)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N} k(\mathbf{P}(Y = k) - \mathbf{P}(Y = -k)) \\
&= N(\Phi(N+1) - \Phi(N)) + \Phi(N+1) \\
&\quad - \Phi(1) + \Phi(0) + \Phi(1) - \Phi(N) - \Phi(N+1).
\end{aligned}$$

Or :

$$N(\Phi(N+1) - \Phi(N)) = N\int_N^{N+1} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{N}{\sqrt{2\pi}} e^{-N^2/2}$$

tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini. Ainsi :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} k(\mathbf{P}(Y = k) - \mathbf{P}(Y = -k)) = 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

3.e) Pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$0 < k(\Phi(k+1) - \Phi(k)) = k\int_k^{k+1} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{k e^{-k^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

Par le théorème d'encadrement et les croissances comparées, on en déduit que

$$k(\Phi(k+1) - \Phi(k)) = o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

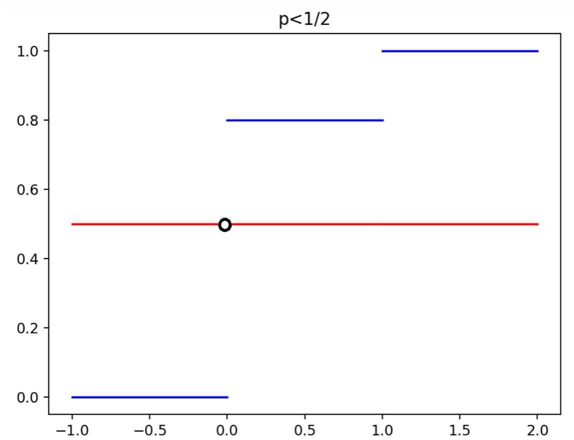
Par le critère de Riemann et de négligeabilité, on en déduit la convergence absolue de la série $\sum k(\Phi(k+1) - \Phi(k))$. Ceci prouve que l'espérance de Z existe.

Problème

4.a) Notons F la fonction de répartition de $\mathscr{B}(p)$, on a :

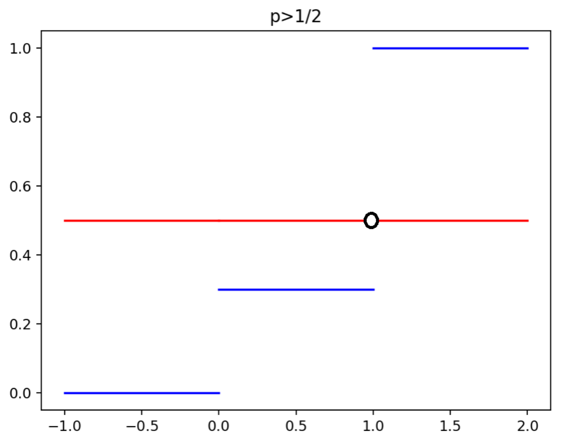
$$\begin{cases} \forall x < 0, & F(x) = 0 \\ \forall x \in [0,1[, & F(x) = 1 - p \\ \forall x \in [1,+\infty[, & F(x) = 1. \end{cases}$$

→ Si $p < \frac{1}{2}$, traçons en bleu le graphe de la fonction de répartition, en rouge la droite d'équation $y = 1/2$.

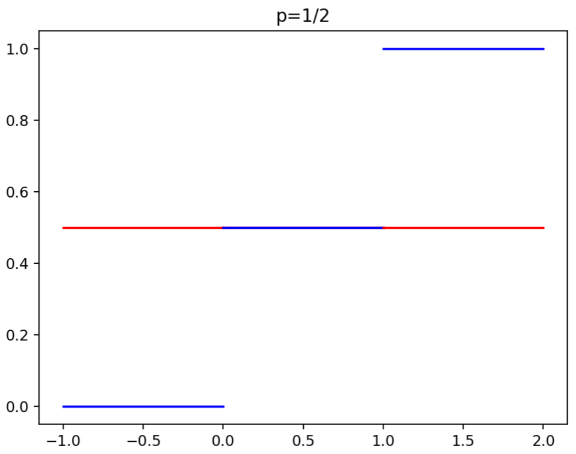


On lit que dans ce cas $\mathscr{M}(X) = \{0\}$.

→ Si $p > \frac{1}{2}$, $\quad M(X) = \{1\}$.



→ Si $p = \frac{1}{2}$, $\mathcal{M}(X) = [0,1]$.



Les graphes ont été obtenus par le code :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def FctionRepartition(val,loi) :
    plt.clf()
    m=len(val)
    val=[val[0]-1]+val+[val[-1]+1]
    LoiCumulee=[sum(loi[0:i:1]) for i in
        range(0, m+1)]
    for i in range(m+1) :
        x=[val[i],val[i+1]]
        y=[LoiCumulee[i],LoiCumulee[i]]

        plt.plot(x,1/2*np.ones(2),'r')
        plt.plot(x,y,'b')

    plt.show()


# On teste avec une Bernoulli
p=0.5
val=[0,1]
loi=np.array([1-p,p])
FctionRepartition(val,loi)
```

4.b)i) Soit $k \in [\![0;n]\!]$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \leqslant k) &= \sum_{j=0}^{k} \mathbf{P}(X = j) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \sum_{j=n-k}^{n} \binom{n}{n-j} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \sum_{j=n-k}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
\mathbf{P}(X \leqslant k) &= \mathbf{P}(X \geqslant n-k).
\end{aligned}$$

À l'aide de la formule de symétrie des coefficients binomiaux.

4.b)ii) Supposons donc n pair. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$. Pour $k \in [\![0;n]\!]$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \leqslant k) &= \mathbf{P}(X \geqslant 2p-k) \\
&= 1 - \mathbf{P}(X < 2p-k) \\
&= 1 - \mathbf{P}(X \leqslant 2p-k-1) \quad \text{car } X(\Omega) \subset \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Comme $\mathbf{P}(X \leqslant p-1) < \mathbf{P}(X \leqslant p)$, on en déduit

$$\begin{cases} \mathbf{P}(X \leqslant p) > \frac{1}{2} \\ \mathbf{P}(X \leqslant p-1) < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Comme la fonction de répartition est une fonction en escalier croissante, elle ne peut prend pas la valeur $\frac{1}{2}$. Dans ce cas, l'ensemble des médianes est réduit à un singleton. Vérifions que

$$\frac{n}{2} \in \mathcal{M}(X).$$

En effet

$$1 - \mathbf{P}\left(X \geqslant \frac{n}{2}\right) = \mathbf{P}\left(X < \frac{n}{2}\right) \leqslant \mathbf{P}\left(X \leqslant \frac{n}{2}\right).$$

D'où

$$\frac{1}{2} \leqslant \mathbf{P}(X \leqslant n)$$

car on a vu que

$$\mathbf{P}\left(X \geqslant \frac{n}{2}\right) = \mathbf{P}\left(X \leqslant \frac{n}{2}\right).$$

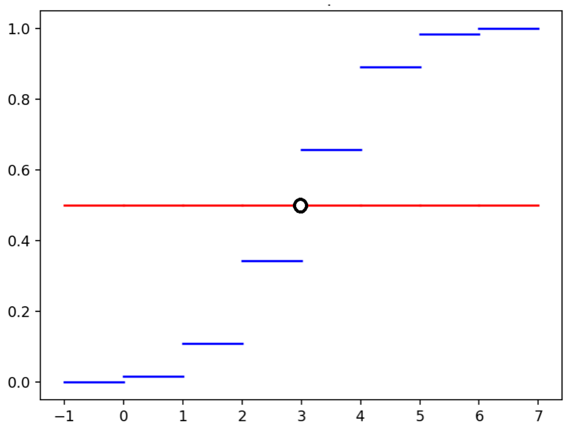
Ensuite

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(X < \frac{n}{2}\right) &= 1 - \mathbf{P}\left(X \geqslant \frac{n}{2}\right) \\
&\leqslant 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

D'où $n/2 \in \mathcal{M}(X)$.
Comme $\mathcal{M}(X)$ est un singleton, on a même

$$\mathcal{M}(X) = \left\{\frac{n}{2}\right\}.$$

Illustrons la situation par des graphes : $(n = 6)$



Obtenu par :

```
import scipy.special as sp
n=6
p=1/2
loi=np.zeros(n+2)
for i in range(n+1):
     loi[i]=sp.binom(n,i)*p**i*(1-p)**(n-i)
val=[i for i in range(n+1)]
FctionRepartition(val,loi)
```

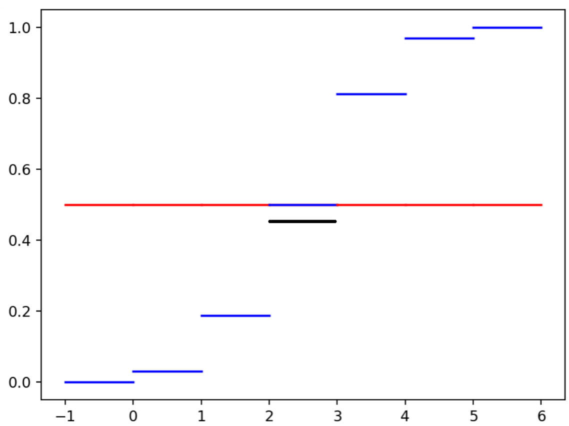
4.b)iii) Si n est impair, en posant $n = 2p+1$, on a de même :

$$\forall k \in [\![0, 2p+1]\!], \qquad \mathbf{P}(X \leqslant k) + \mathbf{P}(X \leqslant 2p-k) = 1.$$

En adaptant le raisonnement, on montre que pour n impair.

$$\mathscr{M}(X) = \left[\frac{n-1}{2}; \frac{n+1}{2}\right].$$

Illustration avec $n = 5$:



4.c) La fonction de répartition F de X est :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_-^*, & F(x) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+, & F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \end{cases}$$

On en déduit :

$$m \in \mathscr{M}(X) \iff F(m) = \frac{1}{2}$$
$$\iff 1 - e^{-m\lambda} = \frac{1}{2} \iff m = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Il vient :

$$\mathscr{M}(X) = \left\{\frac{\ln 2}{\lambda}\right\}.$$

Comme $\mathbf{E}(X) = 1/\lambda$, on a bien

$$\mathbf{E}(X) \notin \mathscr{M}(X).$$

4.d) Lorsque la densité est paire

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt = \int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{1}{2}.$$

Soit

$$\mathbf{P}(X < 0) = \frac{1}{2} = \mathbf{P}(X \leqslant 0).$$

C'est-à-dire $\qquad 0 \in \mathscr{M}(X).$

Précisons que si X admet une espérance, alors $\mathbf{E}(X) = 0$ et

$$\mathbf{E}(X) \in \mathscr{M}(X).$$

4.e) Notons que dans le cas des variables à densité

$$\mathscr{M}(X) = \left\{m \in \mathbb{R} \mid F(m) = \frac{1}{2}\right\}.$$

4.e)i) Dans ce cas, la fonction de répartition est continue et strictement croissante. Le théorème de la bijection s'applique , F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;1[$. En particulier, $1/2$ admet un unique antécédent par F. Autrement dit, $\mathscr{M}(X)$ est réduit à un singleton.

4.e)ii) On admet que l'on sait trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$F(a) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant F(b).$$

On applique ensuite le principe de dichotomie pour trouver le zéro de la fonction

$$S : t \in \mathbb{R} \mapsto F(t) - 1/2.$$

```
def dichotomie(a0,b0,precision):
    a=a0
    b=b0
    p=precision
    while b-a>p :
        c=(a+b)/2
        if S(a)*S(c)<=0:
            b=c
        else :
            a=c
    return(b)
```

4.f) Si $m \leqslant \mathbf{E}(X)$, par la formule de transfert,

$$\mathbf{V}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(t - \mathbf{E}(X)\right)^2 f(t)\,dt$$
$$\geqslant \int_{-\infty}^{m} \left(t - \mathbf{E}(X)\right)^2 f(t)\,dt.$$

Or pour $t \leqslant m \leqslant \mathbf{E}(X)$, on a

$$t - \mathbf{E}(X) \leqslant m - \mathbf{E}(X) \leqslant 0.$$

Par décroissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^-$

$$\left(t - \mathbf{E}(X)\right)^2 \geqslant \left(m - \mathbf{E}(X)\right)^2.$$

La densité est positive

$$\left(t - \mathbf{E}(X)\right)^2 f(t) \geqslant \left(m - \mathbf{E}(X)\right)^2 f(t).$$

Puis, par croissance de l'intégrale (avec les bornes dans le bon sens)

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &\geqslant \int_{-\infty}^{m} \big(m-\mathbf{E}(X)\big)^2 f(t)\,\mathrm{d}t\\ &\geqslant \big(m-\mathbf{E}(X)\big)^2 \int_{-\infty}^{m} f(t)\,\mathrm{d}t\\ &\geqslant \big(m-\mathbf{E}(X)\big)^2 \mathbf{P}(X\leqslant m).\end{aligned}$$

- En adoptant le raisonnement, on a dans le cas $\mathbf{E}(X)\leqslant m$

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &\geqslant \int_{m}^{+\infty} (m-\mathbf{E}(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t\\ &\geqslant (m-\mathbf{E}(X))^2 \int_{m}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\\ &\geqslant (m-\mathbf{E}(X))^2 \mathrm{P}(X>m).\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbf{V}(X)\geqslant (m-\mathbf{E}(X))^2(1-\mathbf{P}(X\leqslant m)).$$

- Gardons la même disjonction des cas.
  - Si $m\leqslant \mathbf{E}(X)$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &\geqslant (m-\mathbf{E}(X))^2\mathbf{P}(X\leqslant m)\\ &\geqslant (m-\mathbf{E}(X))^2\cdot\frac{1}{2}\end{aligned}$$

car m est une médiane. D'où

$$2\,\mathbf{V}(X)\geqslant (m-\mathbf{E}(X))^2$$

Et le résultat s'en déduit.

  - Si $m\geqslant \mathbf{E}(X)$, on a maintenant

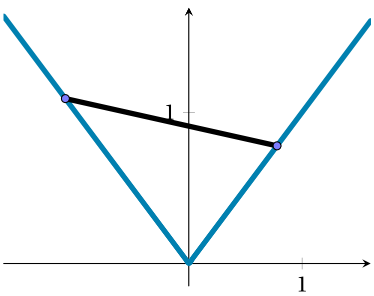
$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &\geqslant (m-\mathbf{E}(X))^2\mathbf{P}(X>m)\\ &\geqslant (m-\mathbf{E}(X))^2\cdot\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Et la conclusion demeure.

4.g)i) Notons que la fonction valeur absolue est convexe. En effet pour $x,\ y\in\mathbb{R}$ et $\lambda\in[0;1]$, on a par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}&|\,\lambda x+(1-\lambda)y)\\ \leqslant&\lambda|x|+(1-\lambda)|y|.\end{aligned}$$

Un dessin pour illustrer la preuve :



Pour $a,\ b\in\mathbb{R}$ et $\lambda\in[0;1]$

$$\begin{aligned}|X-\lambda a-(1-\lambda)b| &= |-\lambda(a-X)-(1-\lambda)(b-X)|\\ &= |\lambda(a-X)+(1-\lambda)(b-X)|\\ &\leqslant \lambda|X-a|+(1-\lambda)|X-b|.\end{aligned}$$

Par croissance de l'espérance, on en déduit la convexité de φ.

$$\varphi\big(\lambda a+(1-\lambda)b\big)\leqslant\lambda\varphi(a)+(1-\lambda)\varphi(b).$$

4.g)ii) La fonction $t\in\mathbb{R}\mapsto tf(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$. Soit H, une telle primitive. De plus, X admet une espérance (sinon φ n'est pas définie) et l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$$

converge (absolument). En particulier, H admet une limite finie en $-\infty$. Si on note ℓ cette limite, on vérifie que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad G(x)=H(x)-\ell$$

convient. On a aussi

$$G(x)=\int_{-\infty}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

4.g)iii) On a

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \int_{-\infty}^{a}|t-a|f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{a}^{+\infty}|t-a|f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= -\int_{-\infty}^{a}(t-a)f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{a}^{+\infty}(t-a)f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{a}^{+\infty}tf(t)\,\mathrm{d}t-\int_{-\infty}^{a}tf(t)\,\mathrm{d}t\\ &\qquad +a\int_{-\infty}^{a}f(t)\,\mathrm{d}t-a\int_{a}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

En introduisant les fonctions G et F, il vient

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \big(\mathbf{E}(X)-G(a)\big)-G(a)+aF(a)-a\big(1-F(a)\big)\\ &= -2G(a)+\mathbf{E}(X)+2aF(a)-a.\end{aligned}$$

Par combinaison linéaire et produit, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $a\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\varphi'(a) &= -2G'(a)+2F(a)+2aF'(a)-1\\ &= -2af(a)+2F(a)+2af(a)-1\\ &= 2F(a)-1.\end{aligned}$$

Rappelons maintenant un énoncé de convexité :
Soient $\varphi : I\to\mathbb{R}$ et a appartenant à un intervalle ouvert inclus dans I.

Si
- → φ est convexe ;
- → φ est dérivable en a;
- → a est un point critique $\big(\varphi'(a)=0\big)$;

Alors, φ admet un minimum global en a.
Comme les points critiques ici sont les médianes. Cet énoncé permet donc de justifier que φ admet un minimum global atteint uniquement sur les médianes.