ECG 2

TD

Thème : Révisions sur les variables aléatoires à densité et la diagonalisation

Exercice 1 : Diagonalisation simultanée

Soient E est un espace vectoriel de dimension non nulle n, f et g sont deux endomorphismes de E. On suppose que f a n valeurs propres distinctes.

1. Que dire des sous-espaces propres de f ?

2. Montrer que si $f \circ g = g \circ f$, les sous-espaces propres de f (resp. g) sont stables par g (resp. f).

3. Montrer que $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si f et g se diagonalisent dans une même base.

Exercice 2 : loi de Rayleigh

Soit X une variable aléatoire à densité dont une densité est

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ te^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité.

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

3. Quelle est la loi de $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2$?

Problème
I. Quelques propriétés des lois log-normales

d'après ESSEC 2012 - E

Soient m un réel et σ un réel strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi log-normale de paramètres $\left(m, \sigma^2\right)$ si X est à valeurs strictement positives et si $\ln(\mathrm{X})$ suit la loi normale de paramètres $\left(m, \sigma^2\right)$. On écrit alors $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathcal{LN}\left(m, \sigma^2\right)$

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi log-normale de paramètres $\left(m, \sigma^2\right)$. On pourra dans la suite utiliser la variable aléatoire $\mathrm{Y} = \ln(\mathrm{X})$.

1. Soient a, b deux réels, a étant différent de 0 et U est une variable aléatoire qui suit une loi normale de paramètres $\left(m, \sigma^2\right)$. Donner la loi de $a\mathrm{U} + b$ (on précisera les paramètres).

2. Cas où $m = 0$.
On suppose dans cette question 2 que $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathcal{LN}\left(0, \sigma^2\right)$

a) *Densité.*
Exprimer la fonction de répartition F de X en fonction de Φ (la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite). En déduire que X est une variable aléatoire à densité et que la fonction définie par

$$f_{\mathrm{X}} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(\ln(x))^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est une densité de probabilité de X.

b) *Espérance.*

i) Établir l'existence de $\mathbf{E}(\mathrm{X})$ et l'égalité $\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2} - 2y\right)\right) \mathrm{d}y$.

ii) En utilisant le changement de variable $t = \frac{y}{\sigma} - \sigma$, en déduire $\mathbf{E}(\mathrm{X})$ en fonction de σ.

c) *Variance.*

i) Soit α un réel non nul. Montrer que X^α suit une loi log-normale dont on précisera les paramètres.

ii) En déduire que X admet une variance et que $\mathbf{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{e}^{\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right)$.

3. On reprend le cas général : $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathcal{LN}\left(m, \sigma^2\right)$.

a) Soit μ un réel strictement positif. Montrer que $\mu\mathrm{X}$ suit une loi log-normale de paramètres $\left(m + \ln(\mu), \sigma^2\right)$.

b) Justifier l'existence de $\mathbf{E}(\mathrm{X})$, de $\mathbf{V}(\mathrm{X})$, et établir :

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \mathrm{e}^{m+\frac{\sigma^2}{2}} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{e}^{2m+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right).$$

II. Le modèle binomiale de Cox-Ross-Rubinstein

Soit n un entier naturel non nul. On souhaite modéliser l'évolution du cours d'une action entre les dates 0 et t fixé, strictement positif. On suppose qu'initialement ce cours est $\mathrm{S}_{0,n} = 1$ et si l'on note $\mathrm{S}_{k,n}$ la valeur aléatoire de ce cours à la date $\frac{kt}{n}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a la relation :

$$\mathrm{S}_{k,n} = \mathrm{S}_{k-1,n} \times \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\mathrm{Y}_k\right),$$

où :

- μ est une constante réel strictement positive liée au rendement moyen de l'action sur une durée égale à t ;
- v est une constante réelle strictement positive appelée volatilité de l'action sur la durée t ;
- $(\mathrm{Y}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Soit

$$\mathbf{P}(\mathrm{Y}_k = 1) = \mathbf{P}(\mathrm{Y}_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On suppose que n est assez grand pour que $1 + \dfrac{\mu}{n} - \dfrac{v}{\sqrt{n}} > 0$. On admet que $\mathrm{S}_{0,n}, \ldots, \mathrm{S}_{n,n}$ sont des variables aléatoires discrètes. On note C_n la variable aléatoire $\mathrm{S}_{n,n}$ qui modélise le cours de l'action à l'instant t.

1. *Simulation de la variable aléatoire* C_n.

a) Quelles sont les valeurs que peut prendre l'expression Python la variable `y` dans :

```
import random as rd
x=rd.random()<1/2
y=2*x-1
```

b) Compléter le script Python suivant pour que la fonction ainsi déclarée simule la variable aléatoire C_n.

```
import numpy.random as rd
def C(n,mu,v) :
    S=1
    for k in range(n):
        Y=
        S=
    return S
```

2. *Espérance et variance*

a) Calculer l'espérance et la variance commune aux Y_k.

b) Montrer que

$$\mathbf{E}[\mathrm{C}_n] = \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathrm{C}_n) = \left(\left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^2 + \frac{v^2}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^{2n}.$$

On pourra admettre que dans le cas de variables indépendantes admettant des espérances, le produit des espérances des variables vaut l'espérance du produit des variables.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}[\mathrm{C}_n]$ et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{V}(\mathrm{C}_n) = \mathrm{e}^{2\mu}\left(\mathrm{e}^{v^2} - 1\right)$. Déterminer les paramètres de la loi log-normale ayant pour espérance la première limite et pour variance la seconde.

Éléments de solutions

Exercice 1

1. $\dim \mathrm{E} = n$ et f admet n valeurs propres distinctes : les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ et $x \in \mathrm{E}_\lambda(f)$. On a : $f(x) = \lambda x \Rightarrow g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$; mais comme f et g commutent, on a également $f(g(x)) = \lambda g(x)$. Ainsi $g(x) \in \mathrm{E}_\lambda(f)$ et $\mathrm{E}_\lambda(f)$ est stable par g.

3. Raisonnons par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $f \circ g = g \circ f$. Puisque f possède n valeurs propres distinctes et que $\dim \mathrm{E} = n$, f est diagonalisable. Soit alors $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de f, respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Alors

$$\mathrm{M}_\mathcal{B}(f) = \mathrm{Diag}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right).$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\mathrm{E}_{\lambda_i}(f) = \mathrm{Vect}\left(e_i\right),$$

stable par g d'après 2. Ainsi,

$$\exists \mu_i \in \mathbb{R}, \quad g\left(e_i\right) = \mu_i e_i$$

et $$\mathrm{M}_\mathrm{B}(g) = \mathrm{Diag}\left(\mu_1, \ldots, \mu_n\right).$$

$\boxed{\Leftarrow}$. On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{M}_\mathcal{B}(f)$ et $\mathrm{M}_\mathcal{B}(g)$ soient diagonales. Alors :

$$\mathrm{M}_\mathrm{B}(f \circ g) = \mathrm{M}_\mathrm{B}(f)\mathrm{M}_\mathrm{B}(g) = \mathrm{M}_\mathrm{B}(g)\mathrm{M}_\mathrm{B}(f)$$

(puisque deux matrices diagonales commutent), et donc

$$\mathrm{M}_\mathrm{B}(f \circ g) = \mathrm{M}_\mathrm{B}(g \circ f).$$

Ainsi $$f \circ g = g \circ f.$$

Exercice 2

1. La fonction f est positive, continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \int_0^{\mathrm{A}} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \left[\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^{\mathrm{A}} = 1.$$

2. On intègre par parties :

$$\int_0^{\mathrm{A}} t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \left[-t\cdot\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^{\mathrm{A}} + \int_0^{\mathrm{A}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$
$$= -\mathrm{A}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{A}^2}{2}} + \int_0^{\mathrm{A}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \qquad (\bullet)$$

On reconnaît la densité de la loi normale centrée réduite. Puis, par parité :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

Par les croissances comparées, $\quad -\mathrm{A}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{A}^2}{2}} \underset{\mathrm{A}\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

On en déduit la convergence absolue, l'existence de l'espérance avec

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.}$$

3. La variable aléatoire $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Soit $y \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathrm{Y} \leqslant y) &= \mathbf{P}(0 \leqslant \mathrm{X} \leqslant \sqrt{y})\\ &= \int_0^{\sqrt{y}} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^{\sqrt{y}} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}.\end{aligned}$$

On reconnait la fonction répartition d'une loi exponentielle de paramètre $1/2$. Ainsi

$$\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathcal{E}(1/2).$$

Problème
I. Quelques propriétés des lois log-normales

1. On sait qu'une transformation affine d'une variable aléatoire suivant une loi normale reste une variable aléatoire. Or,

$$\mathbf{E}(a\mathrm{U} + b) = a\mathbf{E}(\mathrm{U}) + b = am + b$$

$$\text{et} \quad \mathbf{V}(a\mathrm{U} + b) = a^2\,\mathbf{V}(\mathrm{U}) = (a\sigma)^2.$$

Il vient

$$a\mathrm{U} + b \hookrightarrow \mathcal{N}\left(am + b, (a\sigma)^2\right)$$

2.a) On a $\mathrm{F_X}(x) = 0$ pour $x \leqslant 0$ et

$$\begin{aligned}\mathrm{F_X}(x) = \mathbf{P}(\mathrm{X} \leqslant x) &= \mathbf{P}(\ln(\mathrm{X}) \leqslant \ln(x))\\ &= \mathbf{P}\left(\frac{\ln(\mathrm{X})}{\sigma} \leqslant \frac{\ln(x)}{\sigma}\right)\\ &= \Phi\left(\frac{\ln(x)}{\sigma}\right).\end{aligned}$$

$\mathrm{F_X}$ est constante sur $\mathbb{R}_-^*$ donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle. Par composition, $\mathrm{F_X}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur

$\mathbb{R}_*^+$. De plus, par continuité à droite de la fonction de répartition

$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{F_X}(x) = \mathrm{F_X}(0) = 0 = \lim_{x\to 0^-} \mathrm{F_X}(x).$$

C'est la continuité de $\mathrm{F_X}$ en 0. On prouve ainsi que X est une variable à densité.
De plus, par dérivation d'une fonction composée, pour $x \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\mathrm{F_X}'(x) = \frac{1}{\sigma x}\Phi'\left(\frac{\ln(x)}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma x} f_{\mathrm{N}}\left(\frac{\ln(x)}{\sigma}\right).$$

Avec f_{N} une densité de la loi normale centrée réduite. D'où le résultat.

2.b)i)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} |t| f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x f_{\mathrm{X}}(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0^+ donc on a une intégrale généralisée en $+\infty$. De plus, par l'intermédiaire des croissances comparées, on montre que

$$x f_{\mathrm{X}}(x) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Par le théorème de comparaison, $\int_0^{+\infty} t f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument et donc X admet une espérance. Puis, à l'aide du changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif $y = \ln(x)$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\mathrm{X}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\mathrm{X}}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{(\ln(x))^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}x \\
&\underset{y=\ln(x)}{=} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2} - 2y\right)\right)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2.b)ii) On effectue le changement de variable affine $t = \frac{y}{\sigma} - \sigma$. En particulier, $t^2 = \frac{y^2}{\sigma^2} - 2y + \sigma^2$ et

$$\frac{y^2}{\sigma^2} - 2y = t^2 - \sigma^2.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathrm{X}) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(t^2-\sigma^2\right)\right)\sigma\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{\sigma^2/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t \qquad = \mathrm{e}^{\sigma^2/2}.
\end{aligned}$$

L'intégrale se simplifiant puisqu'on y reconnaît la densité d'une loi normale centrée réduite.

2.c)i) On a $\ln(\mathrm{X}^\alpha) = \alpha\ln(\mathrm{X}) \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, (\alpha\sigma)^2\right)$.

2.c)ii) X^2 suit une loi $\mathcal{LN}\left(0, 4\sigma^2\right)$. D'après le calcul de l'espérance, on a

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}^2) = \mathrm{e}^{(4\sigma^2)/2} = \mathrm{e}^{2\sigma^2}.$$

On conclut par la formule de Koenig-Huygens.

3.a) On a

$$\ln(\mu\mathrm{X}) = \ln(\mathrm{X}) + \ln(\mu) \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m + \ln(\mu), \sigma^2\right).$$

Finalement $\qquad \mu\mathrm{X} \hookrightarrow \mathcal{LN}\left(m + \ln(\mu), \sigma^2\right)$.

3.b) La variable $\mathrm{e}^{-m}\mathrm{X}$ suit une loi $\mathcal{LN}(0,\sigma^2)$ et, d'après ce qui précède, $\mathrm{e}^{-m}\mathrm{X}$ admet une espérance. Par linéarité, $\mathrm{X} = \mathrm{e}^m\left(\mathrm{e}^{-m}\mathrm{X}\right)$ admet aussi une espérance et

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \mathbf{E}\left(\mathrm{e}^m\left(\mathrm{e}^{-m}\mathrm{X}\right)\right) = \mathrm{e}^m\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{-m}\mathrm{X}\right) = \mathrm{e}^{m+\frac{\sigma^2}{2}}.$$

De même, on prouve l'existence de la variance et son calcul.

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(\mathrm{X}) &= \mathbf{V}\left(\mathrm{e}^m\left(\mathrm{e}^{-m}\mathrm{X}\right)\right) = \mathrm{e}^{2m}\,\mathbf{V}\left(\mathrm{e}^{-m}\mathrm{X}\right) \\
&= \mathrm{e}^{2m+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right).
\end{aligned}$$

II. Le modèle binomiale de Cox-Ross-Rubinstein

1.a) y simule une loi uniforme sur $\{-1; 1\}$.

1.b)

```
def C(n,mu,v) :
    S=1
    for k in range(n):
        x=rd.random()<1/2
        Y= 2*x-1
        S=S*(1+mu/n+v/(n**(1/2))*Y))
    return S
```

2.a) Vérifier que

$$\mathbf{E}\left(\mathrm{Y}_k\right) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}\left(\mathrm{Y}_k\right) = 1.$$

2.b) Par récurrence, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$,

$$\mathrm{S}_{i,n} = \prod_{k=1}^{i}\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\mathrm{Y}_k\right).$$

En particulier, pour $i = n$

$$\mathrm{C}_n = \mathrm{S}_{n,n} = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\mathrm{Y}_k\right).$$

De plus, par linéarité de l'espérance

$$\mathbf{E}\left[1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\mathrm{Y}_k\right] = \left[\left(1 + \frac{\mu}{n}\right)\right.$$

On conclut à l'aide du résultat admis par l'énoncé

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathrm{C}_n) &= \mathbf{E}\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}\mathrm{Y}_k\right)\right] \\ &= \prod_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left[1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}\mathrm{Y}_k\right] = \left(1+\frac{\mu}{n}\right)^n.\end{aligned}$$

De même, on obtient

$$\mathbf{E}({\mathrm{C}_n}^2) = \left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+\frac{v^2}{n}\right)^n.$$

On conclut par la formule de Koenig-Huygens

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\mathrm{C}_n) &= \mathbf{E}\left[\mathrm{C}_n^2\right] - \mathbf{E}\left[\mathrm{C}_n\right]^2 \\ &= \left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+\frac{v^2}{n}\right)^n - \left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{2n}.\end{aligned}$$

2.c) On dispose du développement limité :

$$n\ln\left(1+\frac{2\mu+v^2}{n}+\frac{\mu^2}{n^2}\right) = 2\mu+v^2+o(1).$$

Par continuité de la fonction exponentielle

$$\begin{aligned}\left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+\frac{v^2}{n}\right)^n &= \exp\left(n\ln\left(1+\frac{2\mu+v^2}{n}+\frac{\mu^2}{n^2}\right)\right) \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{2\mu+v^2}.\end{aligned}$$

De même

$$\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{2\mu}.$$

D'après l'expression de la variance obtenue précédemment

$$\mathbf{V}(\mathrm{C}_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{2\mu+v^2} - \mathrm{e}^{2\mu} = \mathrm{e}^{2\mu}\left(\mathrm{e}^{v^2}-1\right).$$

On vérifie que

$$\sigma = v \quad \text{et} \quad m = \mu - \frac{v^2}{2}.$$