

DS 3 - sujet A

THÈME : VARIABLE À DENSITÉ, DIAGONALISATION

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Problème I - Diagonalisation avec paramètres

Pour tout triplet de réels (a, b, c) on pose $M_{a,b,c} = \begin{bmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{bmatrix}$.

1. Justifier que pour tout triplet de réels (a, b, c) la matrice $M_{a,b,c}$ est diagonalisable.
2. On pose $E = \{M_{a,b,c} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.
Montrer que E est un espace vectoriel dont on déterminera une base et la dimension.
3. On pose $C = M_{0,0,1}$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice C dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
 - a) Préciser le rang de C . Que peut-on en déduire sur le spectre de C ?
 - b) Exprimer C^3 à l'aide de C . En déduire un polynôme annulateur de C .
 - c) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ .
 - d) Donner une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres pour φ .
4. On pose $B = M_{0,1,0}$ et ψ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice B dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
 - a) Montrer que ψ et φ commutent.
 - b) Montrer que tout vecteur propre de φ est un vecteur propre de ψ .
 - c) En déduire que ψ et φ sont diagonalisables dans une même base et donner les valeurs propres de ψ .
5.
 - a) Exprimer $M_{a,b,c}$ en fonction de I_3 , B , C et des réels a, b et c .
 - b) En déduire les valeurs propres de $M_{a,b,c}$.

Problème II - Exemples de variable à densité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

6. Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.
Dans la suite, on considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, admettant f comme densité. On note F_X la fonction de répartition de X .
7. La variable aléatoire X admet-elle une espérance?
8. On pose $Y = \ln(|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On note F_Y sa fonction de répartition.
 - a) Montrer que, pour tout réel x , on a :

$$F_Y(x) = F_X(e^x) - F_X(-e^x).$$
 - b) Montrer, sans expliciter la fonction F_Y , que Y est une variable aléatoire à densité. En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
9.
 - a) On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = -\ln(1 - U)$ et reconnaître la loi de Z .
 - b) *Simulation informatique de la loi de Y .*
On rappelle qu'en python, la commande `rd.random()` permet de simuler la loi uniforme sur $[0, 1[$. Écrire une fonction python `simuY` qui permet de simuler la variable Y .

10. Quelle sera la réponse de la machine à la succession de commandes suivantes?

Editeur

```
N=20000
s=0
for i in range(N):
    s+=simuY()*2
print(s/N)
```

Problème III - Loi de Benford

(A) Loi de la partie fractionnaire d'une variable aléatoire

- Dans la suite du problème, X désigne une variable aléatoire admettant une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ comme densité. On suppose que f est telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) dx$ est absolument convergente.
- Pour tout entier n positif ou nul, on définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par la relation

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^n \exp(-x)}{n!} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- On admet dans la suite l'équivalent de Stirling : quand n tend vers l'infini,

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

• Préliminaires

11. Reconnaître dans f_n une densité de probabilité d'une loi usuelle.
12. a) On suppose dans cette question qu'il existe un réel a tel que f soit croissante sur $]-\infty, a]$ et décroissante sur $[a, +\infty[$, vérifier que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)| dx = 2f(a).$$

Indication : on pourra préalablement démontrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

- b) Appliqué ce résultat pour en déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n'(t)| dt$.

13. Soit g une fonction dérivable définie sur $[0, 1]$ telle que $g(0) = g(1) = 0$, et telle qu'il existe un nombre réel C tel que pour tout $x \in [0, 1]$, $|g'(x)| \leq C$. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que :

$$\forall t \in [0, 1], \quad |g(t)| \leq C.$$

Bonus Montrer qu'on a un peu mieux avec :

$$\forall t \in [0, 1], \quad |g(t)| \leq \frac{C}{2}.$$

• Cas général de la partie fractionnaire

Pour tout réel x , on note $[x]$ sa partie entière (c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x) et $\text{frac}(x) \in [0, 1[$ sa partie fractionnaire, de sorte que $x = [x] + \text{frac}(x)$. Par exemple, $[12,34] = 12$ et $\text{frac}(12,34) = 0,34$.

On admet que $\text{frac}(X)$ est une variable aléatoire et on note G sa fonction de répartition.

14. a) Préciser $G(t)$ pour $t \in]-\infty; 0[$ et $t \in [1; +\infty[$.
b) Montrer que pour tout $t \in [0, 1[$:

$$[\text{frac}(X) \leq t] = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k \leq X \leq k + t].$$

En déduire

$$G(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{P}(k \leq X \leq k + t).$$

15. Justifier que pour tout $t \in [0, 1[$:

$$G(t) - t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k(t),$$

où $g_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définie par $g_k(t) = \int_k^{k+t} f(u) du - t \int_k^{k+1} f(u) du$.

16. Montrer que g_k est dérivable sur $[0, 1]$, puis que pour tout $t \in [0, 1]$, $g'_k(t) = f(k+t) - \int_k^{k+1} f(u) du$.

Indication. On pourra considérer F , une primitive de f .

17. a) Montrer à l'aide de l'égalité des accroissements finies que pour une fonction h de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$, on a

$$\left| h'(t) - (h(1) - h(0)) \right| \leq \int_0^1 |h''(u)| du.$$

- b) Appliquer à $t \mapsto F(t+k)$ pour en déduire que

$$\forall t \in [0, 1[, \quad \left| g'_k(t) \right| \leq \int_k^{k+1} |f'(u)| du.$$

18. En déduire que :

$$\forall t \in [0, 1[, \quad \left| G(t) - t \right| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(u)| du.$$

• **Application**

19. Pour tout entier n positif ou nul, soit Z_n une variable aléatoire de densité f_n . En utilisant le résultat précédent, montrer que :

$$\forall t \in [0, 1[, \quad \left| \mathbf{P}(\text{frac}(Z_n) \leq t) - t \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

20. En déduire la loi de la variable U telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$F_{Z_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_U(t)$$

où F_{Z_n} et F_U désignent respectivement la fonction de répartition de Z_n et U .

(B) Loi de Benford

Dans cette section, on note $\log_{10}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ définie par la relation $\log_{10}(x) = \ln(x) / \ln(10)$. On a donc pour tous réels a et b strictement positifs les relations $\log_{10}(ab) = \log_{10}(a) + \log_{10}(b)$ et $\log_{10}(10^a) = a$. On appelle loi de Benford la loi de probabilité sur l'ensemble $\mathbb{R}$ dont la fonction de répartition coïncide, sur l'intervalle $[1, 10[$, avec la fonction $\log_{10}$.

21. Si X est une variable aléatoire suivant la loi de Benford, expliciter une densité de X .

22. Si on pose $Y = \lfloor X \rfloor$, vérifier que

$$\mathbf{P}(Y = 1) = \mathbf{P}(Y \in \{2, 3\}) = \mathbf{P}(Y \in \{5, 6, 7, 8, 9\}).$$

23. Si X est une variable aléatoire suivant la loi de Benford, reconnaître la loi de $T = \log_{10}(X)$.

• **Loi du premier chiffre significatif**

On appelle mantisse d'un réel strictement positif x l'unique réel $M(x)$ appartenant à l'intervalle $[1, 10[$ tel qu'il existe un entier relatif k pour lequel on puisse écrire $x = M(x) \times 10^k$. Par exemple, $M(123) = 1,23$ et $M(0,25) = 2,5$.

24. Soit k un entier strictement positif. Si X est une variable aléatoire de loi uniforme sur $]1, 10^k[$, quelle est la loi de $M(X)$?

25. On rappelle que $\text{frac}(x)$ désigne la partie fractionnaire d'un réel x . Montrer que pour toute variable aléatoire strictement positive X on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathbf{P}(M(X) \leq x) = \mathbf{P}(\text{frac}(\log_{10}(X)) \leq \log_{10}(x))$$

26. Pour tout entier n positif ou nul, soit $Y_n = 10^{Z_n}$, où Z_n est une variable aléatoire de densité f_n (fonction définie au préliminaire). Montrer que :

$$\forall t \in [1; 10], \quad \left| \mathbf{P}(M(Y_n) \leq t) - \log_{10}(t) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On dit que la suite de variables $(M(Y_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une loi de Benford.

Problème IV - Matrices compagnons

Soit $n \geq 1$ un entier et $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ des nombres réels. Soit P le polynôme défini par l'expression

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n.$$

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels. La matrice $C_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, appelée matrice compagnon de P , est définie par

$$C_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & -a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• **Exemples.**

27. Donner la matrice compagnon C_Q du polynôme $Q(x) = (x-2)^2(x+1)$.

28. a) Déterminer le polynôme R dont la matrice compagnon est $C_R = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

b) Quelles sont les racines de R ? Quelles sont les valeurs propres de C_R ? Que constatez-vous?

29. La matrice C_R est-elle diagonalisable? Justifiez votre réponse.

• **Retour au cas général.**

30. Déterminer le rang de C_P et la dimension du noyau de C_P .

Indication. On pourra distinguer deux cas : le cas où $a_0 = 0$ et le cas où $a_0 \neq 0$.

31. Justifier que 0 est valeur propre de C_P si et seulement si $a_0 = P(0) = 0$.

32. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que $\dim(\text{Ker}(C_P - \lambda I_n)) \leq 1$.

• **La matrice M_P .**

Dans la suite, on considère $M_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $M_P = a_0 I_n + a_1 C_P + a_2 C_P^2 + \cdots + a_{n-1} C_P^{n-1} + C_P^n$.

On note $(E_1, E_2, \dots, E_n) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

les n vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'objectif est de montrer que M_P est la matrice nulle.

33. *Retour sur l'exemple*

Vérifier que M_R est la matrice nulle, où R est le polynôme trouvé à la question 28.

34. *Retour sur le cas général*

a) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E_k = C_P^{k-1} E_1$.

b) En déduire qu'il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $(X, C_P X, \dots, C_P^{n-1} X)$ soit une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

35. Montrer que $M_P E_1 = 0$.

36. En déduire que M_P est la matrice nulle.

• **Lien entre spectre et racines de P .**

37. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de C_P et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. Montrer que λ est racine de P .

38. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) = 0$.

a) On suppose uniquement dans cette question qu'il existe $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $C_P X = \lambda X$. Expliciter un système linéaire vérifiant par $(x_1, \dots, x_n)$. Montrer ensuite par récurrence que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad x_{n-k} = \left(a_{n-k} + \lambda a_{n-k+1} + \cdots + \lambda^{k-1} a_{n-1} + \lambda^k \right) x_n.$$

b) Montrer que λ est valeur propre de C_P et exhiber un vecteur propre associé.

Soit $k \geq 1$ un entier. On considère $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des nombres réels tous distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des entiers positifs ou nuls, puis on définit le polynôme S par $S(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{\alpha_i}$.

39. Dédurre de toute cette étude que la matrice compagnon C_S de S est diagonalisable si et seulement si les entiers α_i valent tous 1.

40. Est-ce que la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$ est diagonalisable?

– FIN –

DS 3 - sujet *

THÈME : VARIABLES À DENSITÉ, DIAGONALISATION

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Problème I - Matrices compagnons

Soit $n \geq 1$ un entier et $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ des nombres réels. Soit P le polynôme défini par l'expression

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n.$$

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels. La matrice $C_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, appelée matrice compagnon de P , est définie par

$$C_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & -a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• **Exemple**

1. a) Déterminer le polynôme R dont la matrice compagnon est $C_R = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.
 b) Quelles sont les racines de R ? Quelles sont les valeurs propres de C_R ? Que constatez-vous?
 c) La matrice C_R est-elle diagonalisable? Justifiez votre réponse.

• **Retour au cas général.**

2. Déterminer le rang de C_P et la dimension du noyau de C_P .
Indication. On pourra distinguer deux cas : le cas où $a_0 = 0$ et le cas où $a_0 \neq 0$.
3. Justifier que 0 est valeur propre de C_P si et seulement si $P(0) = 0$.
4. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que $\dim(\text{Ker}(C_P - \lambda I_n)) \leq 1$.

• **La matrice M_P .**

Dans la suite, on considère $M_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$M_P = a_0 I_n + a_1 C_P + a_2 C_P^2 + \dots + a_{n-1} C_P^{n-1} + C_P^n.$$

On note

$$(E_1, E_2, \dots, E_n) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

les n vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'objectif est de montrer que M_P est la matrice nulle.

5. a) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E_k = C_P^{k-1} E_1$.
 b) En déduire qu'il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $(X, C_P X, \dots, C_P^{n-1} X)$ soit une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
 6. Calculer $M_P E_1$.
 7. En déduire que M_P est la matrice nulle.

• **Lien entre spectre et racines de P.**

8. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de C_P et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. Montrer que λ est racine de P.
 9. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) = 0$.

- a) On suppose uniquement dans cette question qu'il existe $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $C_P X = \lambda X$. Montrer que

$$x_{n-k} = (a_{n-k} + \lambda a_{n-k+1} + \dots + \lambda^{k-1} a_{n-1} + \lambda^k) x_n$$

pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

- b) Montrer que λ est valeur propre de C_P et exhiber un vecteur propre associé.

Soit $k \geq 1$ un entier. On considère $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des nombres réels tous distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des entiers positifs ou nuls, puis on définit le polynôme S par $S(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{\alpha_i}$.

10. À quelle condition sur les coefficients α_i , la matrice compagnon C_S de S est diagonalisable?

• **Application 1**

11. Est-ce que la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$ est diagonalisable?

• **Application 2**

12. On note $B_P = {}^t C_P$ la matrice transposée de C_P .
 a) Justifier que les matrices B_P et C_P ont les mêmes valeurs propres.
 b) Soit λ une valeur propre de B_P . Déterminer une base du sous-espace propre de B associé à λ .
 13. On suppose que le polynôme P admet n racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes. Montrer que B_P est diagonalisable et en déduire que la matrice

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

est inversible.

14. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice E admettant n valeurs propres $\mu_1, \dots, \mu_n$ deux à deux distinctes. Notons φ , l'endomorphisme canoniquement associés à A.
 L'endomorphisme φ est donc diagonalisable et on note $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de φ respectivement associés à $\mu_1, \dots, \mu_n$.
 Soit $u = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$. Montrer que la famille $\mathcal{B}_u = (u, \varphi(u), \dots, \varphi^{n-1}(u))$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
 15. En déduire que A est semblable à une matrice compagnon.

• **Application (3) aux suites récurrentes linéaires d'ordre n**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. On considère une suite u telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+n} = \alpha_0 u_k + \alpha_1 u_{k+1} + \dots + \alpha_{n-1} u_{k+n-1}.$$

16. Déterminer un polynôme P de degré n tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$U_{k+1} = {}^t C_P U_k \quad \text{où} \quad U_k = \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+n-1} \end{bmatrix}.$$

17. On suppose que P a n racines $r_1, \dots, r_n$ deux à deux distinctes. Justifier qu'il existe $\mu_1, \dots, \mu_n$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = \sum_{i=1}^n \mu_i r_i^k.$$

Dans tout le problème x_0 et α désignent deux nombres réels vérifiant strictement positifs.

On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi de Pareto de paramètre (α, x_0) si X , à valeurs dans $[x_0, +\infty[$, admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < x_0 \\ \alpha \frac{x_0^\alpha}{t^{\alpha+1}} & \text{si } t \geq x_0. \end{cases}$$

On note alors $X \hookrightarrow \text{VP}(\alpha, x_0)$.

A. Préliminaires.

18. Soit X une variable aléatoire suivant $\text{VP}(\alpha, x_0)$.
 - a) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
 - b) Déterminer F , la fonction de répartition de X .
19. Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\text{VP}(\alpha, x_0)$. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles X admet une espérance et la calculer dans ce cas.
- **Transformation linéaire et lois de Pareto.**
20. Soient une variable aléatoire X suivant une loi $\text{VP}(\alpha, x_0)$ et un réel strictement positif λ . Reconnaitre la loi de $Y = \lambda X$.
- **Compléments.**
21. Soit une variable aléatoire W qui suit une loi exponentielle de paramètre $\beta > 0$. Soient k un réel strictement supérieur à 1 et x_0 un réel strictement positif. Donner la loi de la variable aléatoire $T = x_0 k^W$.
22. Soit une variable aléatoire X suivant une loi $\text{VP}(\alpha, x_0)$. En déduire la loi de la variable aléatoire $\sqrt{X}$.
- **Simulation.**
23. Proposer un programme qui prend en arguments α , x_0 et simule une loi $\text{VP}(\alpha, x_0)$.

B. Propriété caractéristique de la loi de Pareto.

Soient une variable aléatoire X de densité f , admettant une espérance, et un nombre réel x tel que $\int_x^{+\infty} f(t)dt \neq 0$.

On appelle moyenne de X sur $[x, +\infty[$ le nombre réel $M_X(x)$ défini par

$$M_X(x) = \frac{\int_x^{+\infty} t f(t) dt}{\int_x^{+\infty} f(t) dt}.$$

24. Montrer que $M_X(x) \geq x$.
25. Dans cette question on suppose que la variable X suit une loi $\text{VP}(\alpha, x_0)$ avec $\alpha > 1$. Calculer $M_X(x)$ pour $x \geq x_0$.
26. Réciproquement soient un réel x_0 strictement positif et une variable aléatoire X à valeurs dans $[x_0, +\infty[$, de densité f continue et à valeurs strictement positives sur $[x_0, +\infty[$, admettant une espérance et telle qu'il existe un réel $k > 1$ tel que :

$$\forall x \geq x_0 \quad M_X(x) = kx.$$

On se propose d'établir que X suit une loi de Pareto à deux paramètres.

On pose, pour tout réel $x \geq x_0$, $G(x) = \int_x^{+\infty} f(t)dt$ et $H(x) = \int_x^{+\infty} t f(t)dt$.

- a) Montrer que G et H sont dérivables sur $[x_0, +\infty[$ et calculer leur dérivée.
 - b) Prouver que $G(x) = \frac{1-k}{k} x G'(x)$ pour $x \geq x_0$.
27. a) À l'aide de la fonction $I : x \mapsto x^{\frac{k}{k-1}} G(x)$, donner la valeur de $G(x)$.
 - b) En déduire que X suit une loi de Pareto dont on précisera les paramètres.

C. Courbe de concentration et indice de Gini.

La courbe de concentration est une courbe statistique introduite par Lorentz et développée par Gini pour rendre compte de l'inégalité de la distribution des revenus.

On désigne par F_x la proportion des individus d'une population donnée ayant un revenu inférieur ou égal à x et par Q_x le quotient de la masse des revenus de ces mêmes individus par la masse totale des revenus de la population.

On appelle courbe de concentration la représentation graphique de la fonction donnant Q_x en fonction de F_x .
 Dans toute la suite du problème, X est une variable aléatoire qui représente le revenu d'un individu de cette population.
 Dans la partie C, on montre, dans le cas général, l'existence de la courbe de concentration et on étudie ses propriétés.
 Dans la partie D, on étudie le cas particulier où la variable aléatoire X suit une loi de Pareto.

On désigne par x_0 un nombre réel strictement positif et on suppose que la variable aléatoire X , à valeurs dans $[x_0, +\infty[$, admet une densité f , continue et à valeurs strictement positives sur $[x_0, +\infty[$, et possède une espérance $E(X)$. On note F , la fonction de répartition de X .

On pose, pour $x \geq x_0$,

$$Q(x) = \frac{1}{E(X)} \int_{x_0}^x t f(t) dt.$$

28. Montrer que la restriction de F à $[x_0, +\infty[$ admet une application réciproque notée F^{-1} . Quel est le domaine de définition de F^{-1} ?

29. On pose $C = Q \circ F^{-1}$.

Montrer que C se prolonge en une fonction continue strictement croissante de $[0, 1]$ dans lui-même.

Déterminer $C(0)$ et $C(1)$.

Ainsi la courbe de concentration de X existe bien. C'est la courbe représentative de C dans un repère orthonormé du plan.

30. Prouver que C est dérivable sur $]0, 1[$ et que $C'(t) = \frac{F^{-1}(t)}{E(X)}$ pour $t \in]0, 1[$.

31. a) En déduire que C est convexe.

Que dire sur la courbe de concentration de X et la première bissectrice (droite d'équation $y = x$) ?

b) Déterminer $C'(0)$ et $\lim_{t \rightarrow 1^-} C'(t)$.

c) Tracer l'allure d'une courbe de concentration en précisant les tangentes aux deux extrémités.

D. Application : comparaison de quelques procédures d'imposition des revenus.

On appelle indice d'inégalité de Gini de la variable X le réel $I(X)$ qui est égal à deux fois l'aire située entre la courbe de concentration de X et la première bissectrice. C'est à dire :

$$I(X) = 2 \int_0^1 (t - C(t)) dt.$$

On estime que plus $I(X)$ est grand, plus l'inégalité des revenus est grande.

On suppose, dans toute cette partie, que la variable aléatoire X suit une loi VP (α, x_0) avec $\alpha > 1$.

32. a) Calculer $Q(x)$ pour $x \geq x_0$.

b) Prouver que pour tout $t \in [0, 1]$, $C(t) = 1 - (1 - t)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$.

33. Déterminer α si on sait que 20% des individus ayant les plus hauts revenus se partagent 80% de la masse des revenus. Faire l'application numérique sachant que $\ln(2)/\ln(10) \approx 0.3$.

Dans la suite α n'est plus supposé égal à cette valeur.

34. Vérifier que l'indice d'inégalité de Gini vaut : $I(X) = \frac{1}{2\alpha - 1}$.

• Imposition proportionnelle.

35. On prélève sur tous les revenus un impôt proportionnel au revenu. C'est à dire que, si Y désigne le revenu disponible après imposition, $Y = (1 - \lambda)X$ avec $\lambda \in]0, 1[$.

a) Calculer $I(Y)$ en utilisant le préliminaire.

b) Quel est l'effet de cette imposition sur l'inégalité des revenus ?

• Imposition progressive.

36. On prélève sur tous les revenus un impôt progressif tel que, si T désigne le revenu disponible après imposition, on ait $T = h\sqrt{X}$ où h désigne un réel strictement positif.

a) À l'aide de la partie A, déterminer la loi de T et calculer $I(T)$.

b) Quel est l'effet de cette imposition sur l'inégalité des revenus ?

• Imposition constante.

37. On prélève sur tous les revenus un impôt constant a , c'est à dire que, si Z désigne le revenu disponible après imposition, $Z = X - a$ avec $a \in]0, x_0[$.

Déterminer la loi de Z .

38. On note C_Z la fonction dont le graphe est la courbe de concentration de Z . Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$,

$$t - C_Z(t) = \frac{E(X)}{E(X) - a} (t - C(t)).$$

39. a) En déduire $I(Z)$.

b) Quel est l'effet de cette imposition sur l'inégalité des revenus ?

– FIN –

DS 3 A - solution

Problème I

1. La matrice $M_{a,b,c}$ est symétrique réelle, donc diagonalisable.

2. On a pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$M_{a,b,c} = aM_{1,0,0} + bM_{0,1,0} + cM_{0,0,1}.$$

On en déduit que :

$$E = \text{Vect}(M_{1,0,0}; M_{0,1,0}; M_{0,0,1}).$$

C'est donc bien un espace vectoriel. La famille constituée de $M_{1,0,0}$, $M_{0,1,0}$ et $M_{0,0,1}$ est génératrice et libre. C'est une base de E . D'où

$$\dim E = 3.$$

3.a) La matrice est de rang 2, par la formule du rang

$$\dim E_0(C) = 1.$$

En particulier, 0 est une valeur propre de C .

3.b) Vérifier que

$$C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

On constate que $C^3 = 2C$. Un polynôme annulateur est donné par l'expression

$$x^3 - 2x = x(x^2 - 2) = x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

3.c) À l'aide du polynôme annulateur

$$\text{Sp}(\varphi) = \text{Sp}(C) \subset \{0; -\sqrt{2}; \sqrt{2}\}.$$

Vérifions chaque candidat.

→ On a vu que $\dim E_0(C) = 1$. Donc $0 \in \text{Sp}(C) = \text{Sp}(\varphi)$. On a par exemple

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad CX_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

D'où $E_0(\varphi) = \text{Vect}((1, 1, -1))$.

→ On vérifie ensuite que

$$E_{\sqrt{2}}(\varphi) = \text{Vect}((1, \sqrt{2}, 1))$$

$$E_{-\sqrt{2}}(\varphi) = \text{Vect}((1, -\sqrt{2}, 1)).$$

On a donc l'égalité :

$$\text{Sp}(\varphi) = \{0; -\sqrt{2}; \sqrt{2}\}.$$

3.d) Il suffit de considérer

$$x_1 = (1, 1, -1), \quad x_2 = (1, \sqrt{2}, 1), \quad x_3 = (1, -\sqrt{2}, 1).$$

Comme ces vecteurs sont associés à des valeurs propres distinctes, la famille (x_1, x_2, x_3) est libre. On a donc autant de vecteurs dans la famille que la dimension de $\mathbb{R}^3$. C'est une base de $\mathbb{R}^3$.

4.a) On a

$$CB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = BC.$$

D'où $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Les endomorphismes commutent.

4.b) Rédaction 1.

On peut calculer

$$B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad B \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{et} \quad B \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si X désigne maintenant un vecteur propre de C , il est nécessairement colinéaire à l'un des trois vecteurs dont on a fait le calcul. C'est donc un vecteur propre de B . En traduisant sur les endomorphismes, tout vecteur propre de φ est aussi un vecteur propre de ψ .

Rédaction 2.

On peut remarquer que pour $i \in \{1; 2; 3\}$.

$$\begin{aligned} \varphi(\psi(x_i)) &= \psi(\varphi(x_i)) = \psi(\lambda_i x_i) \\ &= \lambda_i \psi(x_i). \end{aligned}$$

Ainsi $\psi(x_i) \in E_{\lambda_i}(\varphi) = \text{Vect}(x_i)$ (de dimension 1). Donc $\psi(x_i)$ est colinéaire à $x_i \neq 0_E$. C'est un vecteur propre de ψ . On conclut alors en remarquant que tout vecteur propre de φ est colinéaire à l'un des x_i .

4.c) L'endomorphisme ψ admet donc une base de vecteurs propres. Il est donc diagonalisable. En prenant la même base de vecteurs propres pour φ et ψ , ils sont diagonalisables dans une même base.

En reprenant le calcul précédent (rédaction 1)

$$\text{Sp}(\psi) = \text{Sp}(B) = \{-1; 1\}.$$

5.a) On a

$$M_{a,b,c} = aI_3 + bB + cC.$$

5.b) Soit P une matrice de passage qui diagonalise B et C . Par exemple, pour

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

On a

$$P^{-1}BP = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=D_1}, \quad P^{-1}CP = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{=D_2}.$$

Puis

$$P^{-1}M_{a,b,c}P = aP^{-1}I_3P + bP^{-1}BP + cP^{-1}CP \\ = aI_3 + bD_1 + cD_2$$

Soit

$$P^{-1}M_{a,b,c}P = \begin{bmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a+b+\sqrt{2}c & 0 \\ 0 & 0 & a+b-\sqrt{2}c \end{bmatrix}.$$

Ainsi

$$\text{Sp}(M_{a,b,c}) = \{a-b; a+b+\sqrt{2}c; a+b-\sqrt{2}c\}.$$

Problème II

6. Notons que la fonction f est paire. De plus :

- La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$.
- La fonction f est aussi continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
- Soit $A \in [1; +\infty[$

$$\begin{aligned} \int_1^A f(x) dx &= \int_1^A \frac{1}{2x^2} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2x} \right]_1^A \\ &= -\frac{1}{2A} + \frac{1}{2} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit la convergence et l'égalité

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Puis par parité $\int_{-\infty}^{-1} f(x) dx = \frac{1}{2}.$

Comme f est nulle sur $] -1; 1[$. On trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Finalement, f est une densité de probabilité.

7. L'intégrale de Riemann

$$\int_1^{+\infty} x f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x}$$

est divergente, X n'a pas d'espérance.

8.a) On a $Y(\Omega) = \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(\ln(|X|) \leq x) \\ &= P(|X| \leq e^x) \quad (\text{exp. strict. croiss.}) \\ &= P(-e^x \leq X \leq e^x) \\ &= P(-e^x < X \leq e^x) \quad (X \text{ à densité}) \\ &= F_X(e^x) - F_X(-e^x). \end{aligned}$$

8.b) Comme X est à densité, F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. Donc F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ en tout réel x tel que $e^x \neq \pm 1$ et $-e^x \neq \pm 1$ (composée) donc sur $\mathbb{R}^*$. Finalement, Y est à densité. Une densité s'obtient par dérivation $g(x) = F'_Y(x)$ là où c'est possible (ici sur $\mathbb{R}^*$) :

$$g(x) = F'_X(e^x) e^x + F'_X(-e^x) e^x = e^x [f(e^x) + f(-e^x)].$$

→ Pour $x < 0$, $e^x \in]-1, 1[$ et $-e^x$ également donc $g(x) = 0$.

→ Pour $x > 0$ alors $e^x > 1$ et $-e^x < -1$ donc

$$g(x) = e^x \left[\frac{1}{2(e^x)^2} + \frac{1}{2(-e^x)^2} \right] = e^{-x}.$$

On peut poser $g(0) = 1$. On reconnaît une densité d'une loi exponentielle de paramètre 1. Comme la densité caractérise la loi

$$Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1).$$

9.a) Voir exercice du cours.

$$Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1).$$

9.b)

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def simuY():
    u=rd.random()
    return -np.log(1-u)
```

10. Le programme calcule une approximation de $E(Y^2)$. Par la formule de Koenig-Huygens

$$E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2 = 2.$$

Problème III

11. On reconnaît la densité d'une loi gamma $\gamma(n+1)$.

12.a) Soit $A \in \mathbb{R}_*^+$.

$$f(A) - f(0) = \int_0^A f'(t) dt \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f'(t) dt.$$

On en déduit que f admet une limite finie en $+\infty$. Notons ℓ , cette limite. Montrons par l'absurde que $\ell = 0$. En effet si $\ell \neq 0$, alors

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \ell.$$

Or $\int_0^{+\infty} \ell dt$ est divergente (et l'intégrande est de signe constant). Par le critère d'équivalence,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

est divergente. Absurde, finalement

$$f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Ensuite

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} |f'(t)| dt &= - \int_a^{+\infty} f'(t) dt \\ &= - \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) + f(a) = f(a). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^a |f'(t)| dt &= \int_{-\infty}^a f'(t) dt \\ &= f(a) - \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = f(a). \end{aligned}$$

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)| dt = 2f(a).$

12.b) La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ par produit. Pour $x \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{1}{n!} (nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x}) \\ &= \frac{1}{n!} x^{n-1} e^{-x} (n - x). \end{aligned}$$

On en déduit que f_n est croissante sur $]0; n[$ (et aussi sur $] - \infty; n[$) et décroissante sur $[n; +\infty[$. Il vient d'après la question précédente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f'_n(t)| dt = 2f_n(n) = 2 \frac{n^n}{n!} e^{-n}.$$

13. Soit $t \in [0; 1[$.
 $\rightarrow$ Si $t \in [0; \frac{1}{2}]$,

$$|g(t) - g(0)| \leq \sup_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |g'(x)| \cdot t$$

D'où $|g(t)| \leq C \cdot \frac{1}{2}.$

$\rightarrow$ Si $t \in [\frac{1}{2}; 1]$

$$\begin{aligned} |g(t) - g(1)| &\leq \left| \int_t^1 g'(x) dx \right| \\ &\leq \int_t^1 |g'(x)| dx \\ &\leq (1 - t)c. \end{aligned}$$

D'où $|g(t)| \leq \frac{C}{2}.$

14.a) Comme $\text{frac}(X)$ est à valeurs dans $[0; 1[$

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

14.b) Soit $t \in [0; 1[$. Sachant que $([X] = k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est un système complet d'événements, on obtient

$$\begin{aligned} [\text{frac}(X) \leq t] &= [X - [X] \leq t] \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ([X - [X] \leq t] \cap [X] = k) \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ([X - k \leq t] \cap [X] = k) \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ([k \leq X \leq t + k] \cap [X] = k). \end{aligned}$$

Or $[k \leq X \leq t + k] \subset [k \leq X < k + 1] = [X] = k] .$

Ainsi, on peut simplifier

$$[k \leq X \leq t + k] \cap [X] = k] = [k \leq X \leq t + k].$$

D'où l'égalité entre ensemble.

La seconde égalité est une conséquence du fait que l'union est disjointe.

15. Pour $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathbf{P}(k \leq X \leq k + t) = \int_k^{k+t} f(u) du.$$

De plus par la relation de Chasles

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(u) du.$$

Ainsi pour tout $t \in [0; 1[$,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+t} f(u) du - t \int_k^{k+1} f(u) du \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+t} f(u) du - t \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(u) du \\ &\quad \text{(les séries sont convergentes)} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{P}(k \leq X \leq k + t) - t \times 1 \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k(t) &= G(t) - t. \end{aligned}$$

16. Soit $k \in \mathbb{Z}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, on peut donc considérer F une primitive de f . On a donc

$$\forall t \in [0; 1[, \quad g_k(t) = F(k + t) - \underbrace{F(k)}_{\text{cste}} - t \underbrace{\int_k^{k+1} f(u) du}_{\text{cste}}.$$

Comme F est dérivable, par composition $t \mapsto F(k + t)$ l'est aussi et par différence avec une fonction affine, g_k est dérivable sur $[0; 1]$. Pour $t \in [0; 1]$,

$$\begin{aligned} g'_k(t) &= F'(k + t) - \int_k^{k+1} f(u) du \\ &= f(k + t) - \int_k^{k+1} f(u) du. \end{aligned}$$

17.a) Soit $t \in [0; 1]$. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in [0; 1]$ tel que

$$h(1) - h(0) = \frac{h(1) - h(0)}{1 - 0} = h'(c).$$

Ensuite

$$\begin{aligned} |h'(t) - h'(c)| &= \left| \int_c^t h''(u) du \right| \\ &\leq \int_c^t |h''(u)| du \\ &\leq \int_0^1 |h''(u)| du \quad \text{car } c, t \in [0; 1]. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

17.b) Appliquons le résultat précédent à

$$h : t \in [0; 1] \mapsto F(k+t)$$

où F est une primitive de f .

On a bien, h de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0; 1]$, car f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et

$$h(1) - h(0) = F(k+1) - F(k) = \int_k^{k+1} f(u) du$$

$$\forall t \in [0; 1], \quad h'(t) = f(k+t).$$

Le résultat s'en déduit avec la question précédente :

$$\begin{aligned} \left| f(k+t) - \int_k^{k+1} f(u) du \right| &\leq \int_0^1 |h''(u)| du \\ &\leq \int_0^1 |f'(k+u)| du \\ &\leq \int_k^{k+1} |f'(t)| dt \end{aligned}$$

à l'aide du changement de variable affine $t = u + k$.

18. Soit $t \in [0; 1]$. Par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |G(t) - t| &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |g_k(t)| \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} \left| \int_k^{k+1} f'(u) du \right| \end{aligned}$$

où on a appliqué la question 13 avec

$$C = \int_k^{k+1} |f'(u)| du$$

(on vérifie bien que $g_k(0) = g_k(1) = 0$. Par la relation de Chasles,

$$|G(t) - t| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(u)| du.$$

19. Soit $t \in [0; 1]$. En appliquant les résultats précédents (questions 18 et 12.b))

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}(\text{frac}(Z_n) \leq -t) - t| &\leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |f'_n(t)| dt \\ &\leq \frac{n^n}{n!} e^{-n}. \end{aligned}$$

En utilisant l'équivalent de Stirling

$$\frac{n^n}{n!} e^{-n} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On obtient le résultat par encadrement.

20. Prendre $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1])$.

On parlera de convergence en loi.

21. Il suffit de dériver là où c'est possible. Une densité est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x \ln(10)} & \text{si } x \in [1; 10] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

22. On trouve :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y=1) &= \mathbf{P}(1 \leq X \leq 2) = \mathbf{P}(1 < X \leq 2) \\ &= F_X(2) - F_X(1) \\ &= \frac{1}{\ln(10)} (\ln(2) - \ln(1)) = \frac{\ln(2)}{\ln(10)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y \in \{2; 3\}) &= \mathbf{P}(2 \leq X < 4) \\ &= \mathbf{P}(2 < X \leq 4) \\ &= F_X(4) - F_X(2) \\ &= \frac{\ln(4) - \ln(2)}{\ln(10)} = \frac{\ln(2)}{\ln(10)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y \in \{5 \dots 9\}) &= \mathbf{P}(5 < X \leq 10) \\ &= F_X(10) - F_X(5) \\ &= \frac{\ln(10) - \ln(5)}{\ln(10)} = \frac{\ln(2)}{\ln(10)}. \end{aligned}$$

On a bien vérifié les égalités.

23. La variable X est à valeurs dans $[1; 10]$, T est à valeurs dans $[0; 1]$. Si F_T désigne la fonction de répartition de T

$$\begin{aligned} F_T(x) &= 0 & \text{si } x \leq 0 \\ F_T(x) &= 1 & \text{si } x \geq 1 \end{aligned}$$

Si $x \in [0; 1]$

$$\begin{aligned} F_T(x) &= \mathbf{P}\left(\frac{\ln(x)}{\ln(10)} \leq x\right) \\ &= \mathbf{P}(\ln(x) \leq \ln(10) \cdot x) \\ &= \mathbf{P}\left(x \leq e^{\ln(10) \cdot x}\right) \\ &= \frac{\ln}{\ln(10)} \left(e^{\ln(10) \cdot x}\right) = x. \end{aligned}$$

F_T est la fonction de répartition d'une loi uniforme continue sur $[0; 1]$. Comme la fonction de répartition caractérise la loi

$$T \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1]).$$

24.
25.
26.

Problème IV

27. On développe

$$Q(x) = (x^2 - 4x + 4)(x + 1) = x^3 - 3x^2 + 4.$$

On a alors

$$C_Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

28.a) On a $R(x) = -3 + 2x + x^2 = (x-1)(x+3)$.

28.b) Les réels 1 et -3 sont racines de R . De plus pour $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 3 \\ 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda(2+\lambda) - 3 = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = R(\lambda).$$

Or $\lambda \in \text{Sp}(R)$ si et seulement si $\det(C_R - \lambda I_2) = 0$, si et seulement si $R(\lambda) = 0$. Dans ce cas, le spectre de R s'identifie aux racines de C_R .

29. Oui, car la matrice a deux valeurs propres distinctes et qu'elle est de taille $(2, 2)$.

30. Les $n - 1$ premières colonnes de C_P sont linéairement indépendantes, donc

$$\text{rg}(C_P) \geq n - 1.$$

→ Si $a_0 = 0$, alors on constate que

$$C_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i C_i = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

et dans ce cas, la matrice C_P n'est pas inversible.

$$\text{rg}(C_P) = n - 1.$$

→ Si $a_0 \neq 0$, C_n ne peut être combinaison linéaire des $n - 1$ premières colonnes

$$\text{rg}(C_P) = n.$$

31. On a la suite d'équivalences.

0 est valeur propre.

ssi $\text{rg}(C_P - 0 \cdot I_n) < n$

ssi $\text{rg}(C_P) < n$

ssi $a_0 = 0$

ssi $P(0) = 0$.

32. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On

$$C_P - \lambda I_n = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & -\lambda & 0 & -a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & & 1 & -\lambda & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} - \lambda \end{bmatrix}.$$

On constate que les $n - 1$ premières colonnes (ou encore les lignes 2 à n) sont linéairement indépendantes.

Ainsi

$$\text{rg}(C_P - \lambda I_n) \geq n - 1$$

et par la formule du rang

$$\dim(\text{Ker}(C_P - \lambda I_n)) \leq 1.$$

33. Dans cet exemple :

$$\begin{aligned} M_R &= -3I_2 + 2C_R + C_R^2 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

34.a) On constate que pour tout $k \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$

$$E_{k+1} = C_P E_k.$$

Le résultat s'en déduit par récurrence.

34.b) $X = E_1$ convient car $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

35. D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} M_P E_1 &= \sum_{i=0}^n a_i C_P^i E_1 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i C_P^i E_1 + a_n C_P E_n. \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i E_{i+1} + 1 \cdot C_P E_n. \end{aligned}$$

Or on a

$$C_P \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_0 \\ -a_1 \\ \vdots \\ -a_{n-2} \\ -a_{n-1} \end{bmatrix} = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i E_{i+1}.$$

Il vient $M_P E_1 = 0_{n,1}$.

36. Comme M_P et C_P commutent, pour tout $i \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} M_P C_P^i X &= C_P^i M_P X \\ &= C_P^i M_P E_1 \\ &= C_P^i \cdot 0_{n,1} \\ &= 0_{n,1}. \end{aligned}$$

Comme $(X, \dots, C_P^{n-1} X)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, M_P est nulle.

Détaillons ce point. Soit φ l'endomorphisme canoniquement associé à M_P . Alors il existe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \varphi(e_i) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Pour $u \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$ étant une base de $\mathbb{R}^n$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$, puis par linéarité

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{\varphi(e_i)}_{=0_{\mathbb{R}^n}} = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

On en déduit que φ est l'endomorphisme nul, M_P est alors aussi nulle.

37. Le polynôme P est annulateur de C_P . On sait alors que toute valeur propre de C_P est racine de P .

38.a) On a

$$C_P X = \begin{bmatrix} -a_0 x_n \\ x_1 - a_1 x_n \\ x_2 - a_2 x_n \\ \vdots \\ x_{n-2} - a_{n-2} x_n \\ x_{n-1} - a_{n-1} x_n \end{bmatrix}$$

Ainsi $C_P X = \lambda X$ si on a le système linéaire :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} -a_0 x_n &= \lambda x_1 \\ x_1 - a_1 x_n &= \lambda x_2 \\ \vdots & \\ x_{n-1} - a_{n-1} x_n &= \lambda x_n \end{cases}$$

Procédons par récurrence pour établir la propriété

$$\mathcal{P}(k) : x_{n-k} = (a_{n-k} + \lambda a_{n-k+1} + \dots + \lambda^k) x_n$$

→ *Initialisation.* pour $k = 1$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie en regardant directement la dernière ligne de S.

→ *Hérédité.* Soit $k \in \llbracket 1; n-2 \rrbracket$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie. En regardant la ligne L_{n+1-k} du système $\mathcal{S}$, on a

$$x_{n-(k+1)} - a_{n-(k+1)} x_n = \lambda x_{n-k}.$$

À l'aide de $\mathcal{P}(k)$

$$\begin{aligned} x_{n-(k+1)} &= a_{n-(k+1)} x_n + \lambda x_{n-k} \\ &= (a_{n-(k+1)} x_n) \\ &\quad + \lambda (a_{n-k} + \lambda a_{n-k+1} + \dots + \lambda^k) x_n \\ &= (a_{n-(k+1)} + \lambda a_{n-k} + \lambda^2 a_{n-k+1} \\ &\quad + \dots + \lambda^{k+1}) x_n. \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(k+1)$ est ainsi vérifiée.

→ *Conclusion.* Pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

38.b) Commençons par poser $x_n = 1$ et définir x_{n-k} grâce à la relation de récurrence précédente. On a alors pour $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} &x_{n-k} - a_{n-k} x_n \\ &= \lambda a_{n-k+1} + \dots + \lambda^{k-1} a_{n-1} + \lambda^k \\ &= \lambda (a_{n-k+1} + \dots + \lambda^{k-2} a_{n-1} + \lambda^{k-1}) \\ &= \lambda x_{n-(k+1)}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\lambda x_1 \\ &= \lambda (a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda^{n-2} a_{n-1} + \lambda^{n-1}) \\ &= a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n \\ &= P(\lambda) - a_0 \\ &= 0 - a_0 x_n \end{aligned}$$

car $x_n = 1$ et λ est racine de P.

On vient de vérifier que $(x_1, \dots, x_n)$ est solution du système $\mathcal{S}$. Autrement dit X (que est non nul) est un vecteur propre de C_P .

39. Posons $n = \deg S$.

On a vu que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\dim \text{Ker}(C_S - \lambda I_n) \leq 1.$$

Sachant que C_S est diagonalisable si et seulement si

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(C_S)} \dim \text{Ker}(C_S - \lambda I_n) = n,$$

on peut affirmer que C_S est diagonalisable si et seulement si

$$\text{Card Sp}(C_S) = n.$$

Autrement dit, C_S est diagonalisable si et seulement si C_S a exactement n valeurs propres. Or

$$n = \deg S = \sum_{i=1}^k \alpha_i$$

$$k = \text{Card}(\text{Sp}(C_S)) = n.$$

Nécessairement, C_S est diagonalisable si et seulement si tous les α_i valent 1.

40. Oui, car on vérifie que le polynôme associé à cette matrice compagnon a trois racines 1, 2 et 3.

DS 3* - solution

Problème I

1. On a $R(x) = -3 + 2x + x^2 = (x-1)(x+3)$.

Les réels 1 et -3 sont racines de R . De plus pour $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 3 \\ 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda(2+\lambda) - 3 = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = R(\lambda).$$

Or $\lambda \in \text{Sp}(R)$ si et seulement si $\det(C_R - \lambda I_2) = 0$, si et seulement si $R(\lambda) = 0$. Dans ce cas, le spectre de R s'identifie aux racines de C_R .

La matrice est diagonalisable car c'est une matrice de taille (2, 2) avec deux valeurs propres.

2. Les $n-1$ premières colonnes de C_P sont linéairement indépendantes, donc

$$\text{rg}(C_P) \geq n-1.$$

→ Si $a_0 = 0$, alors on constate que

$$C_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i C_i = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

et dans ce cas, la matrice C_P n'est pas inversible.

$$\text{rg}(C_P) = n-1.$$

→ Si $a_0 \neq 0$, C_n ne peut être combinaison linéaire des $n-1$ premières colonnes

$$\text{rg}(C_P) = n.$$

3. On a la suite d'équivalences.

0 est valeur propre.

ssi $\text{rg}(C_P - 0 \cdot I_n) < n$

ssi $\text{rg}(C_P) < n$

ssi $a_0 = 0$

ssi $P(0) = 0$.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On

$$C_P - \lambda I_n = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & -\lambda & 0 & -a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & & 1 & -\lambda & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} - \lambda \end{bmatrix}.$$

On constate que les $n-1$ premières colonnes (ou encore les lignes 2 à n) sont linéairement indépendantes.

Ainsi

$$\text{rg}(C_P - \lambda I_n) \geq n-1$$

et par la formule du rang

$$\dim(\text{Ker}(C_P - \lambda I_n)) \leq 1.$$

- 5.a) On constate que pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$

$$E_{k+1} = C_P E_k.$$

Le résultat s'en déduit par récurrence.

- 5.b) $X = E_1$ convient car $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

6. D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} M_P E_1 &= \sum_{i=0}^n a_i C_P^i E_1 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i C_P^i E_1 + a_n C_P E_n. \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i E_{i+1} + 1 \times C_P E_n. \end{aligned}$$

Or on a

$$C_P \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_0 \\ -a_1 \\ \vdots \\ -a_{n-2} \\ -a_{n-1} \end{bmatrix} = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i E_i.$$

Il vient $M_P E_1 = 0_{n,1}$.

7. Comme M_P et C_P commutent, pour tout $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} M_P C_P^i X &= C_P^i M_P X \\ &= C_P^i M_P E_1 \\ &= C_P^i \cdot 0_{n,1} \\ &= 0_{n,1}. \end{aligned}$$

Comme $(X, \dots, C_P^{n-1} X)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, M_P est nulle.

Détaillons ce point. Soit φ l'endomorphisme canoniquement associé à M_P . Alors il existe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \varphi(e_i) = 0_E.$$

Pour $u \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$ étant une base de $\mathbb{R}^n$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$, puis par linéarité

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{\varphi(e_i)}_{=0_E} = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

On en déduit que φ est l'endomorphisme nul, M_P est alors aussi nulle.

8. Le polynôme P est annulateur de C_P . On sait alors que toute valeur propre de C_P est racine.

9.a) On a

$$C_P X = \begin{bmatrix} -a_0 x_n \\ x_1 - a_1 x_n \\ x_2 - a_2 x_n \\ \vdots \\ x_{n-2} - a_{n-2} x_n \\ x_{n-1} - a_{n-1} x_n \end{bmatrix}$$

Ainsi $C_P X = \lambda X$ si on a le système linéaire :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} -a_0 x_n = \lambda x_1 \\ x_1 - a_1 x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} - a_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

Procédons par récurrence pour établir la propriété

$$\mathcal{P}(k) : x_{n-k} = (a_{n-k} + \lambda a_{n-k+1} + \dots + \lambda^k) x_n$$

→ *Initialisation.* pour $k = 1$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie en regardant directement la dernière ligne de $\mathcal{S}$.

→ *Hérédité.* Soit $k \in \llbracket 1; n-2 \rrbracket$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie. En regardant la ligne L_{n+1-k} du système $\mathcal{S}$, on a

$$x_{n-(k+1)} - a_{n-(k+1)} x_n = \lambda x_{n-k}.$$

À l'aide de $\mathcal{P}(k)$

$$\begin{aligned} x_{n-(k+1)} &= a_{n-(k+1)} x_n + \lambda x_{n-k} \\ &= (a_{n-(k+1)} x_n) \\ &\quad + \lambda (a_{n-k} + \lambda a_{n-k+1} + \dots + \lambda^k) x_n \\ &= (a_{n-(k+1)} + \lambda a_{n-k} + \lambda^2 a_{n-k+1} \\ &\quad + \dots + \lambda^{k+1}) x_n. \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(k+1)$ est ainsi vérifiée.

→ *Conclusion.* Pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

9.b) Commençons par poser $x_n = 1$ et définir x_{n-k} grâce à la relation de récurrence précédente. On a alors pour $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} x_{n-k} - a_{n-k} x_n &= \lambda a_{n-k+1} + \dots + \lambda^{k-1} a_{n-1} + \lambda^k \\ &= \lambda (a_{n-k+1} + \dots + \lambda^{k-2} a_{n-1} + \lambda^{k-1}) \\ &= \lambda x_{n-(k+1)}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= \lambda (a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda^{n-2} a_{n-1} + \lambda^{n-1}) \\ &= a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n \\ &= P(\lambda) - a_0 \\ &= 0 - a_0 x_n \end{aligned}$$

car $x_n = 1$ et λ est racine de P .

On vient de vérifier que $(x_1, \dots, x_n)$ est solution du système $\mathcal{S}$. Autrement dit X (que est non nul) est un vecteur propre de C_P .

10. Posons $n = \deg S$.

On a vu que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\dim \text{Ker}(C_S - \lambda I_n) \leq 1.$$

Sachant que C_S est diagonalisable si et seulement si

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(C_S)} \dim \text{ker}(C_S - \lambda I_n) = n.$$

On a nécessairement

$$\text{Card Sp}(C_S) = n.$$

Autrement dit, C_S est diagonalisable si et seulement si C_S a exactement n valeurs propres. Or

$$n = \deg S = \sum_{i=1}^k \alpha_i$$

$$k = \text{Card}(\text{Sp}(C_S)) = n.$$

Nécessairement, C_S est diagonalisable si et seulement si tous les α_i valent 1.

11. Oui, car on vérifie que le polynôme associé à cette matrice compagnon a trois racines 1, 2 et 3.

12.a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a les équivalences

$$\begin{aligned} \lambda &\in \text{Sp}(B_P) \\ \Leftrightarrow \text{rg}(B_P - \lambda I_n) &< n. \\ \Leftrightarrow \text{rg}({}^t(B_P - \lambda I_n)) &< n \\ \Leftrightarrow \text{rg}({}^t B_P - \lambda {}^t I_n) &< n \\ \Leftrightarrow \text{rg}(C_P - \lambda I_n) &< n \\ \Leftrightarrow \lambda &\in \text{Sp}(C_P). \end{aligned}$$

D'où l'égalité des spectres.

12.b) Vérifier que si

$$\lambda \in \text{Sp}(B_P)$$

alors λ est une racine de P (question 8) et

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{bmatrix}$$

est un vecteur propre de B_P .

13. Si P admet n racines notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors les vecteurs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_n \\ \vdots \\ \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

forment une base de vecteurs propres de B_P . Ainsi V est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

à cette base de vecteurs propres. On sait alors que V est inversible.

14. Soit $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, par linéarité de φ^k

$$\begin{aligned}\varphi^k(u) &= \varphi^k(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n) \\ &= \varphi^k(\varepsilon_1) + \varphi^k(\varepsilon_2) + \dots + \varphi^k(\varepsilon_n).\end{aligned}$$

Sachant que ε_i est vecteur propre pour la valeur propre μ_i

$$\varphi^k(u) = \mu_1^k \varepsilon_1 + \mu_2^k \varepsilon_2 + \dots + \mu_n^k \varepsilon_n.$$

La matrice de la famille $\mathcal{B}_u$ dans la base $\mathcal{E}$ est tV . Comme V est inversible (les μ_i sont deux à deux distincts), tV aussi et la famille $\mathcal{B}_u$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

15. Le vecteur $\varphi^{(n)}(u) \in \mathbb{R}^n$, il s'exprime donc dans la base $\mathcal{B}_u$. Soient $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\varphi^n(u) = a_0 u + a_1 \varphi(u) + \dots + a_{n-1} \varphi^{(n-1)}(u)$$

Si on note

$$P(x) = -a_0 - a_1 x - \dots - a_{n-1} x^{n-1} + x^n,$$

on constate que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_u}(\varphi) = C_P.$$

On conclut par la formule de changement de base

$$\begin{aligned}A &= \text{Mat}_{\text{can}}(\varphi) \\ &= P_{\text{can}, \mathcal{B}_u} \text{Mat}_{\mathcal{B}_u}(\varphi) P_{\mathcal{B}_u, \text{can}} \\ A &= P_{\text{can}, \mathcal{B}_u} C_P P_{\text{can}, \mathcal{B}_u}^{-1}.\end{aligned}$$

16. Si on pose :

$$P(x) = -\alpha_0 - \alpha_1 x - \dots - \alpha_{n-1} x^{n-1} + x^n,$$

on vérifie que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad U_{k+1} = C_P U_k.$$

17. Dans ce cas, question 10, C_P est diagonalisable. Il existe $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $D = \text{diag}(r_1, \dots, r_n)$ telles que

$$C_P = Q D Q^{-1}.$$

Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$V_k = Q^{-1} U_k$$

de sorte que la relation de la question précédente devienne

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad V_{k+1} = D V_k.$$

Par récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad V_k = D^k V_0.$$

Puis

$$U_k = Q V_k = Q D^k V_0.$$

Sachant que

$$D^k = \text{diag}(r_1^k, r_2^k, \dots, r_n^k)$$

on obtient

$$D^k V_0 = \begin{bmatrix} r_1^k v_1 \\ r_2^k v_2 \\ \vdots \\ r_n^k v_n \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad V_0 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

et u_k , le coefficient en position $(1, 1)$ de

$$U_k = Q D^k V_0$$

s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}[Q D^k V_0]_{1,1} &= \sum_{i=1}^n [Q]_{1,i} [D^k V_0]_{i,1} \\ &= \sum_{i=1}^n [Q]_{1,i} v_i \cdot r_i^k \\ &= \mu_i\end{aligned}$$

où μ_i est bien indépendant de k . D'où la conclusion.

Problème II

d'après HEC 1995

18.a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ et positive. De plus,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{x_0}^{+\infty} \alpha \frac{x_0^\alpha}{t^{\alpha+1}} dt = \alpha x_0^\alpha \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+1}} dt.$$

Or pour $A \in [x_0; +\infty[$

$$\int_{x_0}^A \frac{dt}{t^{\alpha+1}} = \int_{x_0}^A t^{-(\alpha+1)} dt = \frac{1}{-\alpha} [t^{-\alpha}]_0^A \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x_0^\alpha}.$$

On en déduit la convergence et l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

La fonction f est donc bien une densité de probabilité.

18.b) Pour $x \leq x_0$, $F(x) = 0$.

Pour $x > x_0$, en reprenant le calcul précédent

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt = x_0^\alpha [-t^{-\alpha}]_{x_0}^x \\ &= 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha.\end{aligned}$$

19. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_{x_0}^{+\infty} t f(t) dt = \alpha x_0^\alpha \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt.$$

On reconnaît une intégrale de Riemann en $+\infty$, il y a donc convergence absolue et existence de l'espérance de X si et seulement si

$$\alpha > 1.$$

Dans ce cas

$$\begin{aligned}E(X) &= \alpha x_0^\alpha \int_{x_0}^{+\infty} t^{-\alpha} dt = \alpha x_0^\alpha \left[\frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1} \right]_{x_0}^{+\infty} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{x_0^\alpha}{x_0^{\alpha+1}} = \frac{\alpha x_0}{\alpha-1}.\end{aligned}$$

20. La variable X est à valeurs dans $[x_0, +\infty[$, ainsi Y est à valeurs dans $[\lambda x_0; +\infty[$.

Pour $x < \lambda x_0$, on a donc $F_Y(x) = 0$.

Pour $x \geq \lambda x_0$

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbf{P}(Y \leq x) = \mathbf{P}(\lambda X \leq x) \\ &= \mathbf{P}(X \leq x/\lambda) \quad \text{car } \lambda > 0 \\ &= 1 - \left(\frac{\lambda x_0}{x}\right)^\alpha \quad \text{question 18.b)} \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi $VP(\alpha, \lambda x_0)$. Comme la fonction de répartition caractérise la loi, on trouve

$$Y = \lambda X \mapsto VP(\alpha, \lambda x_0).$$

21. La variable W est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, ainsi $k^W \geq 1$ et T est à valeurs dans $[x_0; +\infty[$.

Pour $x < x_0$

$$F_T(x) = \mathbf{P}(T \leq x) = 0.$$

Pour $x \geq x_0$

$$\begin{aligned} F_T(x) &= \mathbf{P}(x_0 k^W \leq x) \\ &= \mathbf{P}(k^W \leq x/x_0) \\ &= \mathbf{P}\left(W \leq \frac{\ln(x/x_0)}{\ln(k)}\right) \quad (\ln \text{ strict. croiss.}) \end{aligned}$$

À partir de l'expression de la fonction de répartition d'une loi exponentielle, on poursuit :

$$\begin{aligned} F_T(x) &= 1 - e^{\beta \ln(x/x_0) / \ln(k)} \quad \text{car } \frac{\ln(x/x_0)}{\ln(k)} > 0 \\ &= 1 - \left(e^{\ln(x/x_0)}\right)^{\beta / \ln(k)} \\ F_T(x) &= 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\beta / \ln(k)}. \end{aligned}$$

On en déduit que : $T \mapsto VP\left(\frac{\beta}{\ln(k)}, x_0\right)$.

22. On peut appliquer la démarche précédente via la fonction de répartition.

Donnons ici une seconde méthode qui utilise le résultat précédent.

D'après ce qui précède avec $k = e$, X a la même loi que :

$$T = x_0 e^W \quad \text{où } W \mapsto \mathcal{E}(\alpha).$$

$$\text{Or } \sqrt{T} = \sqrt{x_0} e^{\frac{1}{2}W}.$$

Par transformation linéaire d'une loi exponentielle, on sait que $\frac{1}{2}W \mapsto \mathcal{E}(2\alpha)$ et par la question précédente :

$$\sqrt{T} \mapsto VP(2\alpha, \sqrt{x_0}).$$

Comme la fonction racine carrée est continue, $\sqrt{X}$ et $\sqrt{T}$ ont même loi.

$$\sqrt{X} \mapsto VP(2\alpha, \sqrt{x_0}).$$

23.

```
import numpy.random as rd
import numpy as np
def simuPareto(alp, x0):
    u=rd.exponential(alp)
    # ou on peut aussi écrire
    # -alp*np.log(rd.random())
    return x0* np.exp(u)
```

24. Il suffit de remarquer que :

$$\forall t \in [x; +\infty[\quad t f(t) \geq x f(t).$$

Puis par croissance de l'intégrale :

$$\int_x^{+\infty} t f(t) dt \geq \int_x^{+\infty} x f(t) dt.$$

Ce qui conclut.

25. On a d'après la question 19, l'existence de l'espérance justifie que M_X est bien défini avec pour tout $x < x_0$

$$\int_x^{+\infty} f(t) dt \neq 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} f(t) dt &= 1 - F(x) = (x_0/x)^\alpha \\ \int_x^{+\infty} t f(t) dt &= \alpha x_0^\alpha \int_x^{+\infty} t^{-\alpha} dt \\ &= \alpha x_0 \left[-\frac{1}{\alpha+1} \cdot t^{-(\alpha+1)} \right]_x^{+\infty} \\ &= \frac{\alpha x_0}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{x^{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

Par quotient, on trouve :

$$M_X(x) = \frac{\alpha+1}{\alpha} x_0^{\alpha-1} \cdot x.$$

26.a)• Si F est la fonction de répartition de X alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = 1 - F(x).$$

Comme X a une densité continue sur $[x_0; +\infty[$, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle. La fonction G l'est donc aussi avec

$$\forall x > x_0, \quad G'(x) = -F'(x) = -f(x).$$

• On peut aussi écrire pour $x \geq x_0$

$$\begin{aligned} H(x) &= \mathbf{E}(X) - \int_{-\infty}^x t f(t) dt \\ &= \mathbf{E}(X) - \int_{x_0}^x t f(t) dt - \underbrace{\int_{-\infty}^{x_0} t f(t) dt}_{=0} \end{aligned}$$

Sous cette forme, on reconnaît la fonction

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{x_0}^x t f(t) dt$$

qui est une primitive de la fonction $t \mapsto t f(t)$ continue sur $[x_0; +\infty[$. Par définition d'une primitive, H est de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$\forall x \in [x_0; +\infty[, \quad H'(x) = -x f(x)$$

26.b) La condition sur la moyenne se réécrit :

$$\forall x \in [x_0; +\infty[, \quad kx = \frac{H(x)}{G(x)}.$$

D'où

$$kxG(x) = H(x).$$

Par dérivation

$$k(G(x) + xG'(x)) = -xf(x) = +xG'(x).$$

En réordonnant, on obtient bien le résultat annoncé.

27.a) Par produit, I est dérivable sur $[x_0; +\infty[$ avec pour $x \geq x_0$

$$\begin{aligned} I'(x) &= \frac{k}{k-1} x^{\frac{k}{k-1}-1} \cdot G(x) + x^{\frac{k}{k-1}} G'(x) \\ &= \frac{k}{k-1} x^{\frac{k}{k-1}-1} \left(G(x) + \frac{k-1}{k} xG'(x) \right) \\ I'(x) &= 0. \end{aligned}$$

La fonction I est donc constante sur l'intervalle $[x_0; +\infty[$.
Soit c la constante, pour tout $x \in [x_0; +\infty[$, $I(x) = c$ puis

$$G(x) = \frac{c}{x^{k/(k-1)}}.$$

Sachant que $F(x_0) = 0$, $G(x_0) = 1$, il vient

$$G(x) = \left(\frac{x_0}{x} \right)^{k/(k-1)}.$$

27.b) Résumons : si F désigne la fonction de répartition de X alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_0 \\ 1 - G(x) & \text{si } x \geq x_0 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition de $VP\left(\frac{k}{k-1}, x_0\right)$.

28. La fonction F est strictement croissante sur $[x_0; +\infty[$ car la densité est strictement positive.
De plus, F est continue avec

$$F(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

D'après le théorème de la bijection, F réalise une bijection de $[x_0; +\infty[$ dans $[0; 1[$.

Le domaine de définition de F^{-1} est $[0; 1[$.

29. La fonction Q est croissante strictement (sa dérivée $t \mapsto tf(t)/E(X)$ est strictement positive), F^{-1} l'est aussi (même sens de variation que F sur $[x_0; +\infty[$). Par composition, C est strictement croissante sur $[0; 1[$.

On peut prolonger C par continuité car par composition des limites, on trouve

$$C(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0-1^-} 1.$$

Si on note encore C le prolongement, cela revient à poser

$$C(1) = 1.$$

Le prolongement reste strictement croissant sur $[0; 1]$. Enfin

$$C(0) = Q(F^{-1}(0)) = Q(x_0) = 0.$$

30. La fonction C est dérivable sur $[0; 1[$ par composition car :

→ Q est dérivable sur $[x_0; +\infty[$ avec

$$\forall t \in [x_0; +\infty[, \quad Q'(t) = \frac{tf(t)}{E(X)}.$$

→ La fonction F^{-1} est dérivable sur $[0; 1[$ car F est dérivable sur $[x_0; +\infty[$ avec une dérivée qui ne s'annule pas. On a aussi

$$\forall t \in [0; 1[, \quad (F^{-1})'(t) = \frac{1}{F'(F^{-1}(t))} = \frac{1}{f(F^{-1}(t))}.$$

De plus, pour $t \in [0; 1[$

$$\begin{aligned} C'(t) &= (F^{-1})'(t) \times Q'(F^{-1}(t)) \\ &= \frac{1}{f(F^{-1}(t))} \times \frac{F^{-1}(t) \cdot f(F^{-1}(t))}{E(X)} \\ &= \frac{F^{-1}(t)}{E(X)}. \end{aligned}$$

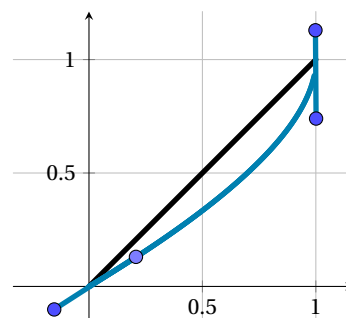
Ce qui conclut.

31.a) La fonction C' est croissante sur l'intervalle $[0; 1[$, la fonction C est donc convexe sur $[0; 1[$. Par continuité de C, la convexité de C s'étend à $[0; 1]$. En particulier, la courbe représentative est située sous la corde passant par les points $(0, C(0))$ et $(1, C(1))$: c'est la première bissectrice.

31.b) On a

$$C'(0) = \frac{F^{-1}(0)}{E(X)} = \frac{x_0}{E(X)} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 1^-} C'(t) = +\infty$$

31.c) On a une tangente verticale en 1.



32.a) Vérifier que :

$$\forall x \in [x_0; +\infty[, \quad Q(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{\alpha-1}.$$

32.b) Soit $t \in [0; 1[$

$$C(t) = Q(F^{-1}(t)) = 1 - \left(\frac{x_0}{F^{-1}(t)} \right)^{\alpha-1}$$

Or on sait aussi que :

$$t = F(F^{-1}(t)) = 1 - \left(\frac{x_0}{F^{-1}(t)} \right)^{\alpha}$$

Ainsi

$$C(t) = 1 - \left(\left(\frac{x_0}{F^{-1}(t)} \right)^{\alpha} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = 1 - (1-t)^{(\alpha-1)/\alpha}.$$

33. Dans ce cas, 80% des individus ayant les revenus les moins hauts se partagent 20% de la masse des revenus. Cela impose :

$$\begin{aligned} C(0,8) &= 0,2 \\ \Leftrightarrow 1 - (1 - 0,8)^{(\alpha-1)/\alpha} &= 0,2 \\ \Leftrightarrow (0,2)^{(\alpha-1)\alpha} &= 0,8. \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha-1}{\alpha} &= \frac{\ln(0,8)}{\ln(0,2)} \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\alpha} &= \frac{\ln(0,8)}{\ln(0,2)} \\ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{\ln(0,8)}{\ln(0,2)}\right)^{-1} &= \alpha. \end{aligned}$$

Application numérique : posons $t = \ln(2)/\ln(10)$.

$$\begin{aligned} \frac{\ln(0,8)}{\ln(0,2)} &= \frac{\ln(8/10)}{\ln(2/10)} = \frac{3\ln(2) - \ln(10)}{\ln(2) - \ln(10)} \\ &= \frac{3t - 1}{t - 1} \simeq \frac{0,9 - 1}{0,3 - 1} = \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

Il vient

$$\alpha \simeq \frac{7}{6} \simeq 1,16.$$

34. On a

$$\begin{aligned} I(X) &= 2 \int_0^1 (t - C(t)) dt \\ &= 2 \int_0^1 \left(t - 1 + (1-t)^{1-\frac{1}{\alpha}}\right) dt \\ &= \dots = 1/(2\alpha - 1). \end{aligned}$$

35. On a vu à la question 23 que

$$Y \hookrightarrow \text{VP}(\alpha, (1-\lambda)x_0).$$

Le paramètre α reste inchangé

$$I(Y) = \frac{1}{2\alpha - 1} = I(X).$$

Ce type d'imposition n'a pas d'effet sur l'inégalité dans la répartition des revenus.

36. En reprenant la question 22

$$T = h\sqrt{X} \hookrightarrow \text{VP}(2\alpha, h\sqrt{x_0})$$

On a alors
$$I(T) = \frac{1}{4\alpha - 1} < I(X).$$

Ce type d'imposition fait diminuer les inégalités de revenus.

37.

38.

39.a)

39.b)