

THÈMES : ALGÈBRE BILINÉAIRE, TRIGONOMÉTRIE

Approche matricielle des séries de Fourier

Dans la suite, E désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodiques. Pour tout $f \in E$, on définit les coefficients de Fourier par :

$$a_0(f) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad b_0(f) = 0,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt.$$

On définit de plus la matrice $\widehat{F}_n(f) = a_n(f) I_2 + b_n(f) J$ où $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Régularité et décroissance des coefficients de Fourier

1. Justifier que l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ par

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2, \quad \varphi(A, B) = \text{Tr}({}^tAB)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

2. On suppose dans cette question que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

a) Montrer que : $a_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $b_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

b) En déduire que $\|\widehat{F}_n(f)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

On admet que ce résultat est encore valable même lorsque f est continue (de classe $\mathcal{C}^0$).

3. Vérifier que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\widehat{F}_n(f') = -nJ\widehat{F}_n(f)$.

4. Comparer $\|\widehat{F}_n(f')\|$ et $\|\widehat{F}_n(f)\|$.

5. En déduire que si f est de classe $\mathcal{C}^p$ (avec $p \in \mathbb{N}^*$) alors $\|\widehat{F}_n(f)\| \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^p}\right)$.

Un produit scalaire sur E

6. a) Vérifier que l'application définie sur E^2 par

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt$$

est un produit scalaire sur E . On note $N(\cdot)$, la norme associée.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, comment interpréter les réels $a_n(f)$ et $b_n(f)$ dans ce cadre ?

7. Notons $\mathcal{P}$ (respectivement $\mathcal{I}$), le sous-espace de E constituée des fonctions paires (respectivement impaires).

a) Vérifier que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires orthogonaux dans E .

b) Que dire des coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ lorsque $f \in \mathcal{P}$? $f \in \mathcal{I}$?

8. a) Justifier que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$.
- b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que la famille $\mathcal{F}_n$ constituée des fonctions $f_0 : t \in \mathbb{R} \mapsto 1/\sqrt{2}$ et $f_k : t \in \mathbb{R} \mapsto \cos(kt)$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
De la même manière, on montre que la famille $\mathcal{G}_n$ constituée des fonctions $g_k : t \in \mathbb{R} \mapsto \sin(kt)$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ est orthonormée.
- c) Vérifier que la concaténation des familles $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{G}_n$ forme une famille orthonormée.

Soit $f \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $S_n(f)$ comme la projection orthogonale de f sur $\text{Vect}(\mathcal{F}_n, \mathcal{G}_n)$. C'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_n(f)(t) = \frac{a_0(f)}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^n a_k(f) \cos(kt) + \sum_{k=1}^n b_k(f) \sin(kt).$$

9. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $N(S_n(f))^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \left\| \widehat{F}_k(f) \right\|^2$.
10. Justifier que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors la suite de terme général $N(S_n(f))$ converge lorsque $n \rightarrow +\infty$.

On peut montrer que si la fonction f est « suffisamment régulière » alors pour tout réel x , $S_n(f)(t)$ tend vers $f(t)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. On peut en déduire que la limite de $\left(N(S_n(f)) \right)_n$ est alors $N(f)$. La preuve est accessible avec les outils de deuxième année mais elle n'est pas dans l'esprit du programme, on propose donc de le vérifier numériquement avec python.

Calculs approchés des coefficients de Fourier

On démontre que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[x]$, on a

$$\int_{\alpha}^{\beta} P(x) dx = \frac{\beta - \alpha}{6} \left[P(\alpha) + 4P\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + P(\beta) \right].$$

Partant de ce constant, pour une fonction continue f , on approxime l'intégrale sur $[\alpha; \beta]$ par

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \simeq I(f, \alpha, \beta) = \frac{\beta - \alpha}{6} \left[f(\alpha) + 4f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + f(\beta) \right] \quad (\bullet)$$

Pour obtenir une meilleure approximation sur un segment $[a; b]$, on partitionne uniformément le segment $[a; b]$ en p sous-segments. Sur chacun sous-segment, on approxime l'intégrale à l'aide de la relation $(\bullet)$. Une approximation d'ordre p est alors donnée par

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{k=0}^{p-1} I(f, a + kh, a + (k+1)h) \quad \text{où} \quad h = \frac{b-a}{p}.$$

11. Compléter la fonction **Approx** qui prend en arguments un entier naturel non nul p , une fonction f , deux réels a, b et renvoie une approximation de $\int_a^b f(x) dx$ à l'aide du schéma décrit ci-dessus.

Editeur

```
def Approx( ... ):
    I=
    h=
    for k in ... :
        alpha= ...
        beta= ...
        I= ...
    return I
```

12. Modifier la fonction précédente pour obtenir une fonction python **an** qui prend en arguments un entier naturel n , une fonction f et renvoie une approximation de $a_n(f)$ (on pourra choisir $p = 20$).

13. En déduire une fonction python **aCoeff** qui prend en arguments un entier naturel N , une fonction f et renvoie une matrice ligne contenant une approximation de

$$\begin{bmatrix} a_0(f) & a_1(f) & \dots & a_N(f) \end{bmatrix}.$$

De même, on admet que l'on dispose d'une fonction **bCoeff** qui prend en arguments un entier naturel N , une fonction f et renvoie une matrice ligne contenant une approximation de $\begin{bmatrix} 0 & b_1(f) & \dots & b_N(f) \end{bmatrix}$.

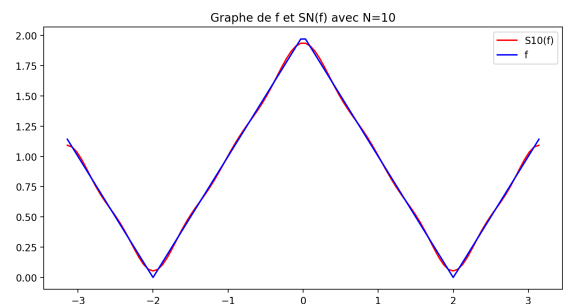
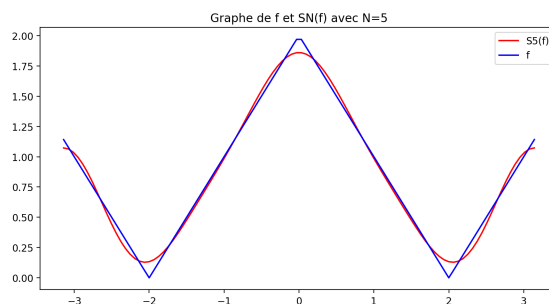
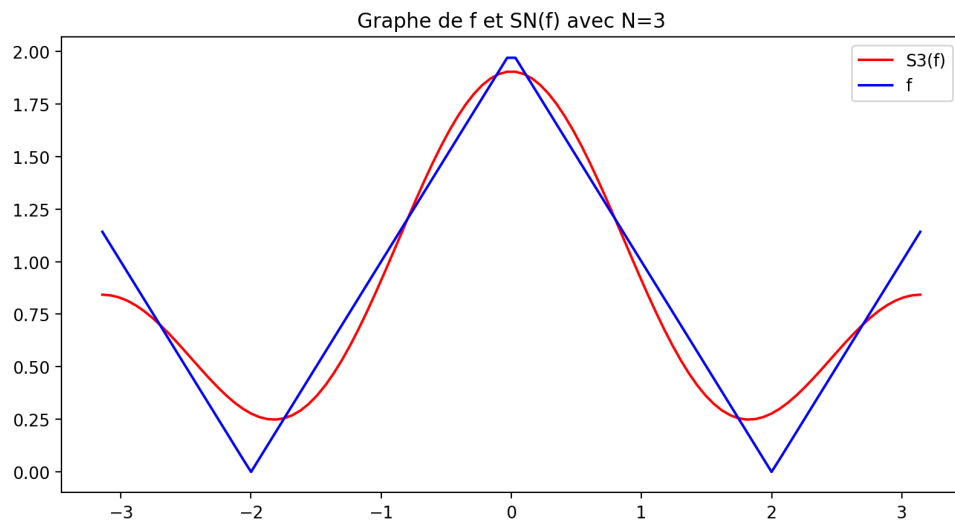
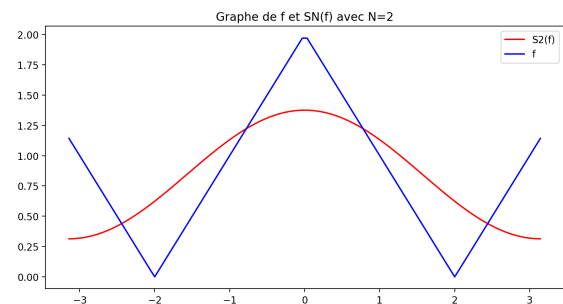
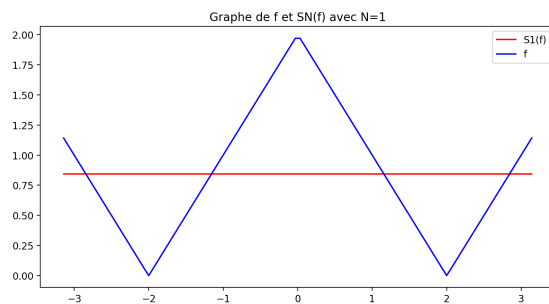
14. Compléter le programme qui permet d'afficher $S_N(f)$ pour la fonction $f \in E$ définie sur $[-\pi; \pi]$ par $f(t) = ||t| - 2|$.

Editeur

```

N=10 # un choix d'une valeur de N
x=np.linspace(-np.pi,np.pi,100)
A=aCoeff(f,N), B=bCoeff(f,N)
Y=np.zeros(100)
for i in range(0,100):
    Y[i]=A[0]/np.sqrt(2)
    for k in range(1,N+1):
        Y[i]= ...
plt.plot(x,Y,'r')
plt.plot(x,f(x),'b')
plt.show()

```



Éléments de solutions

1. Cours.

2.a) On a par intégration par parties avec des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \left[f(t) \left(\frac{1}{n} \sin(nt) \right) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin(nt) dt.$$

On constate que le crochet est nul. De plus, par l'inégalité triangulaire

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin(nt) dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t) \sin(nt)| dt \leq 2\pi \max(|f'|).$$

Précisons que le maximum de $|f'|$ est bien défini puisque que $|f'|$ est continue sur un segment. Par le théorème d'encadrement

$$a_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

De même, on montre que

$$b_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

2.b) Rédaction 1.

On vérifie que si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, alors

$$\|A\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Dans ce cas

$$\|\widehat{F}(f)\| = \sqrt{2a_n(f)^2 + 2b_n(f)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Rédaction 2.

Par l'inégalité triangulaire

$$\|\widehat{F}(f)\| \leq |a_n(f)| \cdot \|I_2\| + |b_n(f)| \cdot \|J\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Procédons par intégrations par parties (les fonctions sont $\mathcal{C}^1$).

$$\begin{aligned} \pi a_n(f') &= \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos(nt) dt \\ &= \underbrace{[f(t) \cos(nt)]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \\ &= n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \\ &= \pi_n b_n(f). \end{aligned}$$

Ainsi $a_n(f') = n b_n(f)$.

De même, on établit que

$$b_n(f') = -n a_n(f).$$

Puis

$$\begin{aligned} -n J \widehat{F}_n(g) &= \begin{bmatrix} 0 & -n \\ n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n(f) & b_n(f) \\ -b_n(f) & a_n(f) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_n(g)n & -n a_n(g) \\ n a_n(g) & b_n(f)n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_n(f') & b_n(f') \\ -b_n(f') & a_n(f') \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

On a bien $\widehat{F}_n(f') = -n J \widehat{F}_n(f)$.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En remarquant que ${}^t J J = I_2$

$$\begin{aligned} \|JA\|^2 &= \text{Tr}((JA)({}^t J A)) = \text{Tr}({}^t(JA)(JA)) \\ &= \text{Tr}({}^t A {}^t J J A) = \text{Tr}({}^t A A) = \|A\|^2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|\widehat{F}_n(f')\| = |-n| \cdot \|J \widehat{F}_n(f)\| = n \|\widehat{F}_n(f)\|.$$

5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Par récurrence sur le résultat précédent

$$n^p \|\widehat{F}_n(f)\| = \|\widehat{F}_n(f^p)\|.$$

Or, en reprenant la première question avec $f^{(p)}$ de classe $\mathcal{C}^0$, on a

$$\|\widehat{F}_n(f^{(p)})\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

D'où le résultat.

6.a) Cours.

6.b) Pour $f \in E, n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n(f) = \langle f, \cos(n \cdot) \rangle \quad \text{et} \quad b_n(f) = \langle f, \sin(n \cdot) \rangle$$

où $\cos(n \cdot)$ et $\sin(n \cdot)$ désignent les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$t \mapsto \cos(nt) \quad \text{et} \quad t \mapsto \sin(nt).$$

7.a) Soit $f \in E$. On a pour tout réel x

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{=p(x)} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{=i(x)}.$$

On vérifie que p est i sont respectivement des fonctions paire et impaire. Il vient

$$E = \mathcal{P} + \mathcal{I}.$$

Ensuite, pour $f \in \mathcal{P}, g \in \mathcal{I}$, la fonction fg est impaire et par intégration sur un segment centré

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt = 0.$$

D'où $\langle f, g \rangle = 0$. On en déduit que les sous-espaces $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont orthogonaux. En particulier, ils sont en somme directe.

On a ainsi montré que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires orthogonaux dans E .

7.b) Le réel $a_n(f)$ est nul si $f \in \mathcal{I}$.
Le réel $b_n(f)$ est nul si $f \in \mathcal{P}$.

8.a) On part des formules trigonométriques :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

En sommant, on obtient la relation de l'énoncé.

8.b) Soient $k, p \in \llbracket 0; n \rrbracket$.
→ Si $k \neq p, k \neq 0, p \neq 0$

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) \cos(pt) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt-pt) + \cos(kt+pt) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((k-p)t)}{k-p} + \frac{\sin((k+p)t)}{k+p} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

→ Pour $k = p, k \neq 0, p \neq 0$

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) \cos(pt) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 + \cos(2kt) dt = \pi + 0 = \pi. \end{aligned}$$

→ Pour $k = p = 0$, on trouve

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_0(t)f_0(t) \cos(pt) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{2} = \pi.$$

→ Si $k = 0, p \neq 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_0(t) \cos(pt) dt = 0.$$

Le résultat s'en déduit

$$\forall p, k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad \langle f_p, f_k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq k \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

8.c) On a

$$\text{Vect}(\mathcal{F}_n) \subset \mathcal{P} \quad \text{et} \quad \text{Vect}(\mathcal{G}_n) \subset \mathcal{I}.$$

Or, on a vu que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont orthogonaux dans E . La concaténation des deux familles orthonormées reste donc orthonormée.

9. Notons que

$$S_n(f) \in \text{Vect}(\mathcal{F}_n, \mathcal{G}_n).$$

Comme on a une base orthonormée de cet espace euclidien

$$N(S_n(f))^2 = \sum_{e \in \mathcal{F}_n \cup \mathcal{G}_n} \langle S_n(f), e \rangle^2.$$

Il vient :

$$N(S_n(f))^2 = \sum_{k=0}^n a_k(f)^2 + \sum_{k=1}^n b_k(f)^2.$$

Or, on a vu à la question 2.b) que

$$\|\widehat{F}_k(f)\|^2 = 2a_k(f)^2 + 2b_k(f)^2.$$

Le résultat s'en déduit (car $b_0(f) = 0$).

10. À l'aide de la question 5 pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$

$$\|\widehat{F}_k(f)\|_{k \rightarrow +\infty} = o\left(\frac{1}{k^1}\right).$$

Par élévation à la puissance

$$\|\widehat{F}_k(f)\|_{k \rightarrow +\infty}^2 = o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Or, la série $\sum 1/k^2$ est une série de Riemann à termes positifs et convergente. Par le critère de négligeabilité, la série

$$\sum \|\widehat{F}_k(f)\|^2$$

est convergente. La suite des sommes partielles est donc convergente. Comme le facteur $1/2$ ne modifie par la convergence, on en déduit que la suite de terme général $N(S_n(f))$ est convergente.

Remarque. On peut démontrer l'égalité de Parseval

$$N(f)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \|\widehat{F}_k(f)\|^2.$$

11.

```
def Approx(p,f,a,b):
    I=0
    h=(b-a)/p
    alpha=a
    beta=a+h
    for k in range(p):
        I+=f(alpha)+4*f((alpha+beta)/2)+f(beta)
        alpha=alpha+h
        beta=beta+h
    return I/(6*h)
```

Cette méthode d'approximation est dite méthode des trapèze. Elle est basée sur la formule de Simpson.

12. On approxime $a_n(f)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi - (-\pi)}{6p} \sum_{k=0}^{p-1} g(\alpha_k) + 4g\left(\frac{\alpha_k + \beta_k}{2}\right) + g(\beta_k)$$

où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = f(t) \cos(nt)$ et

$$h = \frac{2\pi}{p}, \quad \alpha_k = a + kh, \quad \beta_k = a + (k+1)h.$$

Précisons que le coefficient devant la somme est donc $1/(3p)$.

```
def an(f,n):
    p=20
    I=0
    a=-np.pi
    b=np.pi
    h=(b-a)/p
    alpha=a
    beta=a+h
    for i in range(p):
        I+=f(alpha)*np.cos(n*alpha)+4*f((
            alpha+beta)/2)*np.cos(n*(alpha
            +beta)/2)+f(beta)*np.cos(n*
            beta)
        alpha=alpha+h
        beta=beta+h
    if n==0:
        return I/((2)**(1/2)*3*p)
    else : return I/(3*p)

def bn(f,n):
    p=20
    I=0
    a=-np.pi
    b=np.pi
    h=(b-a)/p
    alpha=a
```

```
beta=a+h
for i in range(p):
    I+=f(alpha)*np.sin(n*alpha)+4*f((
        alpha+beta)/2)*np.sin(n*(alpha
        +beta)/2)+f(beta)*np.sin(n*
        beta)
    alpha=alpha+h
    beta=beta+h
return I/(3*p)
```

13.

```
def aCoeff(f,n):
    C=np.zeros(n+1)
    for i in range(0,n):
        C[i]= an(f,i)
    return C

def bCoeff(f,n):
    C=np.zeros(n+1)
    for i in range(0,n):
        C[i]= bn(f,i)
    return C
```

14.

```
def f(t):
    return np.abs(np.abs(t)-2)

N=5
x=np.linspace(-np.pi,np.pi,100)
A=aCoeff(f,N)
B=bCoeff(f,N)
Y=np.zeros(100)
for i in range(0,100):
    Y[i]=A[0]/np.sqrt(2)
    for k in range(1,N+1):
        Y[i]=Y[i]+np.cos(k*x[i])*A[k]+np.
            sin(k*x[i])*B[k]

plt.plot(x,Y,'r')
plt.plot(x,f(x),'b')
plt.show()
```