DS 4 - sujet A

Thèmes : Python, algèbre bilinéaire, calcul différentiel

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Python - Secret Santa

Considérons n participants à un noël canadien. Il y a donc n cadeaux à distribuer. On numérote les personnes et les cadeaux de 1 à n de manière à ce que la personne $i \in [\![1;n]\!]$ offre le i-ème cadeau.
Distribuer les cadeaux revient à attribuer à chaque personne $i \in [\![1;n]\!]$ un cadeau $j \in [\![1;n]\!]$. Autrement dit, une distribution de cadeaux revient à choisir une bijection de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$. Une telle bijection peut être codée par la donnée d'une matrice ligne à n colonnes où les coefficients sont tous distincts.

Par exemple pour $n=4$, la bijection codée par la matrice $M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ correspond à

La personne 1 reçoit le cadeau numéro 2
La personne 2 reçoit le cadeau numéro 4
La personne 3 reçoit le cadeau numéro 1
La personne 4 reçoit le cadeau numéro 3.

Dans la suite, on note $\mathscr{S}_n$, l'ensemble des bijections de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$.

1. *Tirage au hasard d'une bijection.*
   Le programme suivant prend en argument un entier naturel n non nul et renvoie une bijection de $\mathscr{S}_n$ choisie au hasard. Expliquer son fonctionnement.

Editeur

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def bijection(n):
    M=np.arange(n) # M est la matrice ligne [0,1,2,...,n-1]
    NbreTour=400
    for iter in range(NbreTour):
        i=rd.randint(0,n)
        j=rd.randint(0,n)
        c=M[i]
        M[i]=M[j]
        M[j]=c
    return M
```

2. Toutefois, il y a un risque que la bijection f obtenue présente « un point fixe ». C'est-à-dire, un entier i tel que $f(i)=i$.
   a) Pourquoi est-il préférable d'éviter les points fixes ?
   b) Écrire un programme `pointfixe` qui prend en argument une matrice ligne M codant une bijection f de $\mathscr{S}_n$ et renvoie le nombre de points fixes de f.
3. Expliquer chaque ligne de ce programme ainsi que son fonctionnement global :

Editeur

```
def Noel(n):
    M=bijection(n)
    while pointfixe(M)>0:
        M=bijection(n)
    return M

Etudiants=['Victor','Marie','Alan','Simone','Anissa','Raphael','Clement','Baptiste','
    Nisrine', 'Paul','Ethan','Angela','Florian','Nathan','Clara D','Sofian','Angelo',
'Armelle','Charlotte','Alexis','Ulysse','Bryann','Alexandre','Thomas','Melvyn',
'Samuel','Manon','Martins','Rose','Mathis','Maalouf','Soazig','Pablo','Leo','Emma','
    Victoire','Laetitia','Ismael','Joseph','Anael','Alix','Kim','Nael','Clara T','Laura','
    Romeo','Sherine']

n=len(Etudiants)
M=Noel(n)
for i in range(n):
    print(Etudiants[i],'donne à', Etudiants[M[i]])
```

4. On suppose maintenant que les participants sont séparés en deux groupes (les étudiants et les professeurs par exemple). Comment modifier le programme pour éviter que les individus du premier groupe offre un cadeau à un individu du premier groupe?

Problème A - Optimisation

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}^n$ la fonction f_n par

$$\forall\, x = (x_1, \dots, x_n), \qquad f_n(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right).$$

- *Cas* $n = 1$, $f_1(x) = x\exp(-x^2)$

5. Dresser le tableau de variations de la fonction f_1. Préciser les extrema locaux et globaux.

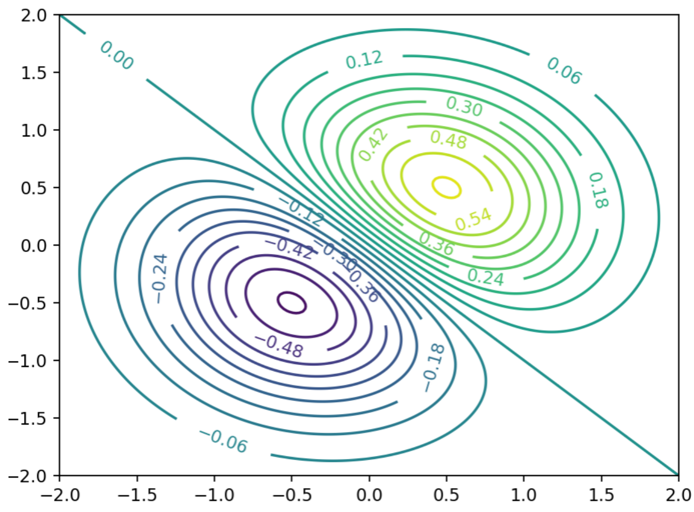
- *Cas* $n = 2$.

6. Vérifier que f_2 est $\mathscr{C}^1$ avec deux points critiques.

7. À partir du code Python suivant, conjecturer la nature des points critiques (minimum? maximum?).

Editeur

```
def f(x,y):
    return (x+y)*np.exp(-x**2-y**2)

x=np.linspace(-2,2,200);
 y=np.linspace(-2,2,200)
X , Y = np.meshgrid(x,y)

graphe = plt.contour(X,Y,f(X,Y),20)
plt.clabel(graphe, inline=1)
plt.show()
```



- *Cas* $n = 3$.

On considère, en admettant pour l'instant son existence, la fonction g définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$g\big((a,b,c)\big) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(a + 2bt^2 + \frac{4c}{3}t^4\right) \mathrm{e}^{-(a^2+b^2+c^2)-t^2}\, \mathrm{d}t.$$

8. Montrer que l'intégrale $\mathrm{I}_k = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ converge pour tout entier naturel k. En déduire la convergence de l'intégrale $g(a,b,c)$ pour tout triplet (a,b,c).

9. En utilisant une densité d'une loi normale $\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$ avec $\sigma = 1/\sqrt{2}$, calculer I_0 et I_2.
10. Vérifier que $I_4 = 3\sqrt{\pi}/4$.
11. En déduire que pour tous réels a, b, c, $g\big((a,b,c)\big) = f_3(a,b,c)$.
12. Donner les dérivées partielles d'ordre 1 de f_3.
13. Déterminer les deux points critiques f_3.
14. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En déduire

$$\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\qquad |x+y+z| \leqslant \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

15. Préciser le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.
16. Vérifier que $\left|f_3(x,y,z)\right| \leqslant \sqrt{3}f_1\left(\left\|(x,y,z)\right\|\right)$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme canonique de $\mathbb{R}^3$.
17. Conclure en précisant g admet des extrema locaux et globaux.

- *Cas $n\in\mathbb{N}^*$*

18. Déterminer les extrema de f_n.

Problème B - Algèbre bilinéaire

On se place dans un espace euclidien E de dimension n, où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Le produit scalaire des vecteurs x et y est noté $\langle x,y\rangle$ et la norme de x est notée $\|x\|$.
On considère un vecteur u de E dont la norme est égale à 1, un réel λ non nul et on note φ_λ l'application qui, à tout vecteur x de E associe $\varphi_\lambda(x) = \lambda\langle x,u\rangle\,u + x$.
19. Rappeler la dimension de $\left(\mathrm{Vect}(u)\right)^\perp$.
20. Montrer que φ_λ est un endomorphisme de E.
21. Montrer que le polynôme $P(x) = x^2-(\lambda+2)x+(\lambda+1)$ est un polynôme annulateur de φ_λ.
22. Vérifier que pour tout $x, y\in E$,

$$\left\langle\varphi_\lambda(x),y\right\rangle = \left\langle x,\varphi_\lambda(y)\right\rangle.$$

a) Déterminer $\varphi_\lambda(u)$ et $\varphi_\lambda(v)$, pour tout vecteur v de $\left(\mathrm{Vect}(u)\right)^\perp$.
b) Établir alors que φ_λ possède deux valeurs propres distinctes et donner les sous-espaces propres associés à ces deux valeurs propres.
23. Vérifier que les sous-espaces propres de φ sont orthogonaux.
24. Est-ce que φ_λ est diagonalisable?
25. Dans cette question on suppose que $\lambda = -1$.
a) Vérifier que φ_{-1} est un projecteur.
b) Montrer plus précisément que φ_{-1} est le projecteur sur $(\mathrm{Vect}(u))^\perp$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(u)$.

Problème C - Famille de polynômes orthogonaux

- *Un espace euclidien*

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note E_n l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On définit de plus la fonction ω sur $]-1;1[$ par

$$\forall\,t\in]-1;1[,\qquad \omega(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}.$$

26. Soit $R\in\mathbb{R}[x]$. Sans calculs, justifier qu'il existe $M\in\mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall\,t\in[-1;1],\qquad \left|R(t)\right| \leqslant M.$$

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} R(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.
27. Justifier que l'application

$$(P,Q)\in {E_n}^2 \mapsto \langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur E_n.

- *Étude d'un endomorphisme*

Soit φ l'application définie sur E_n par :

$$\varphi(P)(x) = \left(x^2-1\right)P''(x) + (2x+1)P'(x).$$

28. Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E}_n)$.
29. Est-ce que l'endomorphisme φ est injectif? surjectif? bijectif?
30. Vérifier que la matrice de φ dans la base canonique $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ de E_n est triangulaire.
31. En déduire que φ est diagonalisable.

- *Un endomorphisme symétrique*

32. Soient $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in {\mathrm{E}_n}^2$. Exprimer à l'aide de $\varphi(\mathrm{P})$ et ω, la dérivée de la fonction u définie sur $[-1;1]$ par :

$$u(t) = -(1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}\,\mathrm{P}'(t).$$

En déduire que
$$\langle \varphi(\mathrm{P}), \mathrm{Q}\rangle = \int_{-1}^{1} (1-t)^{\frac{3}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}'(t)\,\mathrm{d}t$$
puis
$$\langle \varphi(\mathrm{P}), \mathrm{Q}\rangle = \langle \mathrm{P}, \varphi(\mathrm{Q})\rangle.$$

On dit dans ce cas que l'endomorphisme est symétrique et on montrera au second semestre que cela permet de retrouver que φ est un endomorphisme diagonalisable.

- *Une base orthonormée*

33. Rappeler la définition d'une base orthonormée.
34. Justifier qu'il existe $\mathscr{B} = (\mathrm{U}_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$, une base orthonormée de E_n avec pour tout indice k, $\deg(\mathrm{U}_k) = k$.
Dans la suite, on fixe une telle base $\mathscr{B}$.
35. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à $j-1$, on a : $\left\langle \mathrm{Q}, \mathrm{U}_j \right\rangle = 0$.
36. En considérant $\mathrm{Q} = 1$, le polynôme constant, montrer que U_j ne garde pas un signe constant sur l'intervalle $]-1;1[$.
Dans la suite, on exprime le polynôme U_j sous la forme

$$\mathrm{U}_j(x) = \lambda \prod_{i=1}^{r} (x - \alpha_i)^{m_i}\mathrm{R}(x) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \lambda,\ \alpha_i \in \mathbb{R} \\ m_i \in \mathbb{N}^* \\ \mathrm{R} \in \mathbb{R}[x] \quad \text{strictement positif.} \end{cases}$$

37. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que U_j admet j racines réelles toutes situées dans l'intervalle $]-1;1[$.
On pourra utiliser le polynôme V *défini par*

$$\mathrm{V}(x) = \prod_{i \in \mathrm{I}_j} (x - \alpha_i)^{m_i}$$

où l'ensemble I_j est l'ensemble des indices $i \in [\![1;r]\!]$ tel que m_i est impair et $\alpha_i \in [-1;1]$.

- *Une formule de récurrence*

38. Vérifier que pour tout $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in {\mathrm{E}_n}^2$ $\langle x\mathrm{P}(x), \mathrm{Q}(x)\rangle = \langle \mathrm{P}(x), x\mathrm{Q}(x)\rangle$.
39. Justifier que pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$, il existe des réels α_k, β_k tels que

$$x\mathrm{U}_k(x) = \mathrm{U}_{k+1}(x) + \alpha_k \mathrm{U}_k(x) + \beta_k \mathrm{U}_{k-1}.$$

On pourra commencer par expliciter les cordonnées de $x\mathrm{U}_k(x)$ dans la base $\mathscr{B}$.

– FIN –

DS 4 - sujet *

THÈME : PYTHON, ALGÈBRE BILINÉAIRE, CALCUL DIFFÉRENTIEL

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Python - Secret Santa

Considérons n participants à un noël canadien. Il y a donc n cadeaux à distribuer. On numérote les personnes et les cadeaux de 1 à n de manière à ce que la personne $i \in [\![1;n]\!]$ offre le i-ème cadeau.
Distribuer les cadeaux revient à attribuer à chaque personne $i \in [\![1;n]\!]$ un cadeau $j \in [\![1;n]\!]$. Autrement dit, une distribution de cadeaux revient à choisir une bijection de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$. Une telle bijection peut être codée par la donnée d'une matrice ligne à n colonnes où les coefficients sont tous distincts.
Par exemple pour $n=4$, la bijection codée par la matrice $M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ correspond à

La personne 1 reçoit le cadeau numéro 2
La personne 2 reçoit le cadeau numéro 4
La personne 3 reçoit le cadeau numéro 1
La personne 4 reçoit le cadeau numéro 3.

Dans la suite, on note $\mathscr{S}_n$, l'ensemble des bijections de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$.

1. *Tirage au hasard d'une bijection.*
Le programme suivant prend en argument un entier naturel n non nul et renvoie une bijection de $\mathscr{S}_n$ choisie au hasard. Expliquer son fonctionnement.

Editeur

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def bijection(n):
    M=np.arange(n) # M est la matrice ligne [0,1,2,...,n-1]
    NbreTour=400
    for iter in range(NbreTour):
        i=rd.randint(0,n)
        j=rd.randint(0,n)
        c=M[i]
        M[i]=M[j]
        M[j]=c
    return M
```

2. Toutefois, il y a un risque que la bijection f obtenue présente « un point fixe ». C'est-à-dire, un entier i tel que $f(i)=i$.

a) Pourquoi est-il préférable d'éviter les points fixes?

b) Écrire un programme `pointfixe` qui prend en argument une matrice ligne M codant une bijection f de $\mathscr{S}_n$ et renvoie le nombre de points fixes de f.

3. Expliquer chaque ligne de ce programme ainsi que son fonctionnement global :

Editeur

```
def Noel(n):
    M=bijection(n)
    while pointfixe(M)>0:
        M=bijection(n)
    return M
```

Editeur

```python
Etudiants=['Victor','Marie','Alan','Simone','Anissa','Raphael','Clement','Baptiste','
    Nisrine', 'Paul','Ethan','Angela','Florian','Nathan','Clara D','Sofian','Angelo',
'Armelle','Charlotte','Alexis','Ulysse','Bryann','Alexandre','Thomas','Melvyn',
'Samuel','Manon','Martins','Rose','Mathis','Maalouf','Soazig','Pablo','Leo','Emma','
    Victoire','Laetitia','Ismael','Joseph','Anael','Alix','Kim','Nael','Clara T','Laura','
    Romeo','Sherine']

n=len(Etudiants)
M=Noel(n)
for i in range(n):
    print(Etudiants[i],'donne à', Etudiants[M[i]])
```

4. On suppose maintenant que les participants sont séparés en deux groupes (les étudiants et les professeurs par exemple). Comment modifier le programme pour éviter que les individus du premier groupe offre un cadeau à un individu du premier groupe ?

Exercice : calcul différentiel

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{xy}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}$.

Pour faciliter les calculs, on pourra remarquer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(-x,-y) = -f(x,-y) = -f(-x,y) = f(x,y)$.

5. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ et déterminer son gradient.

6. Vérifier que f admet cinq critiques du type :

$$(0,0), \quad (\alpha,\beta), \quad (-\alpha,\beta), \quad (\alpha,-\beta) \quad \text{et} \quad (-\alpha,-\beta)$$

où $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_*^+$.

7. Donner la nature du point critique $(0,0)$ (minimum ? maximum ?).

- *Nature du point critique* (α,β).

8. Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un polynôme de degré 2 $x \mapsto \mathrm{P}(x,y)$ tel que

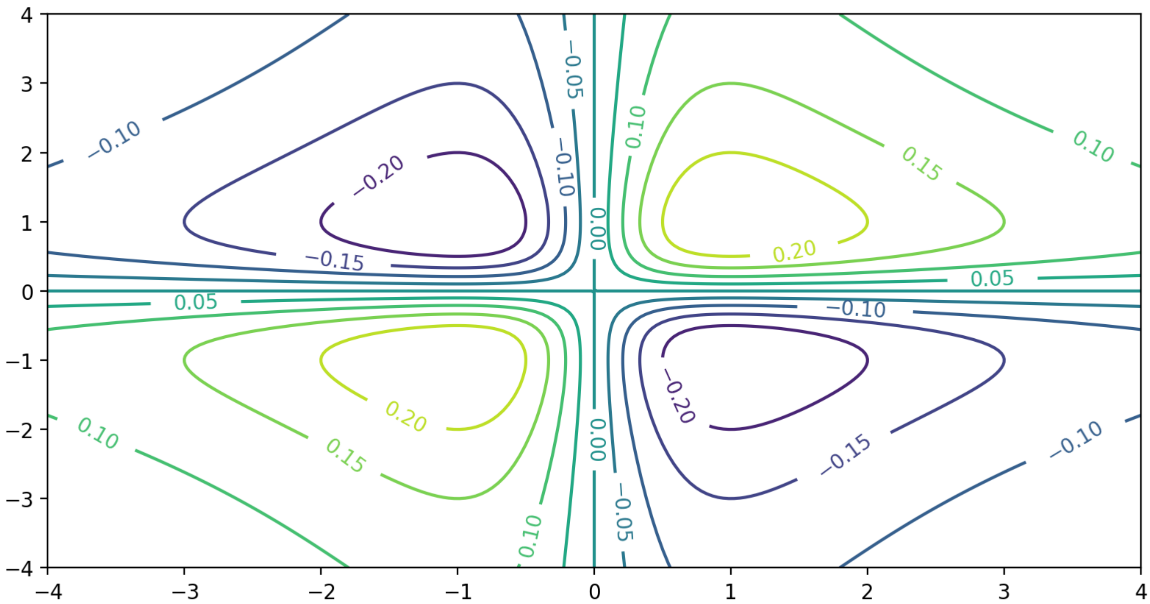
$$f(x,y) - f(\alpha,\beta) = \frac{\mathrm{P}(x,y)}{4\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}.$$

9. Soit $\Delta(y)$ le discriminant du polynôme $x \mapsto \mathrm{P}(x,y)$. Donner le signe de $\Delta(y)$.

10. En déduire la nature du point critique (α,β).

11. Déterminer de même la nature des trois autres points critiques.

- *Quelques lignes de niveau pour tester la cohérence de vos résultats.*



Problème A - Formes bilinéaires non dégénérées, nilpotence

- *Formes bilinéaires symétriques.*
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. Soit φ, une forme bilinéaire symétrique sur E. Autrement dit, φ est une application $E \times E \to \mathbb{R}$ telle que :

  - linéaire à droite
  $$\forall\, u,\, v,\, w \in E, \quad \forall \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(u\,,\, \lambda v + \mu w) = \lambda\varphi(u,v) + \mu\varphi(u,w).$$
  - linéaire à gauche
  $$\forall\, u,\, v,\, w \in E, \quad \forall \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(\lambda v + \mu w\,,\, u) = \lambda\varphi(v,u) + \mu\varphi(w,u).$$
  - symétrique
  $$\forall\, u,\, v, \in E, \qquad \varphi(u,v) = \varphi(v,u).$$

- *Définition de l'orthogonal*

12. Soit G une partie de E. On définit l'orthogonal de G par l'ensemble : $G^{\perp} = \left\{ y \in E \,|\, \forall x \in G,\ \varphi(x,y) = 0 \right\}$.
Vérifier que $G^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

- *Forme bilinéaire non dégénérée*
On suppose maintenant que φ est une forme non dégénérée, c'est-à-dire : $E^{\perp} = \left\{ 0_E \right\}$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p < n$. On considère une base $\left(e_1, e_2, \ldots, e_p\right)$ de F et on note, pour $k \in [\![1;p]\!]$, L_k l'application linéaire définie sur E par :
$$\forall y \in E, \qquad L_k(y) = \varphi\left(e_k, y\right).$$

13. Démontrer que les sous-espaces $\mathrm{Ker}\left(L_k\right)$ sont de dimension $n-1$.

14. Montrer que $F^{\perp} = \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(L_k)$.

15. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ des réels tels que
$$\forall\, y \in E, \quad \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \varphi(y, e_k) = 0.$$
Montrer que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k = 0_E$. En déduire que $(L_1, L_2, \ldots, L_p)$ est une famille libre dans l'espace vectoriel E^* constitué des formes linéaires sur E.

Dans la suite de cette partie, on définit l'application :
$$f = \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \longmapsto & \left(L_1(x), \ldots, L_p(x)\right) \end{array} \right.$$

On tiendra pour acquis que l'application f est linéaire.

16. Démontrer que : $\mathrm{Ker}\, f = \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(L_k)$.

17. On suppose dans cette question que l'application f n'est pas surjective.
  a) Que peut-on dire de la dimension m de $\mathrm{Im}\, f$?
  b) En complétant une base $(e_1, \ldots, e_m)$ de $\mathrm{Im}\, f$ en une base de $\mathbb{R}^p$, démontrer que $\mathrm{Im}\, f$ est inclus dans un hyperplan H de $\mathbb{R}^p$.
  c) En déduire que la famille $\left(L_1, \ldots, L_p\right)$ est liée dans E^*.

18. On suppose dans cette question que la famille $\left(L_1, \ldots, L_p\right)$ est libre dans l'espace vectoriel E^*.
  a) Justifier que f est surjective.
  b) Démontrer que : $\dim\left(\bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(L_k)\right) = n - p$.

19. Conclure en montrant que $\dim F^{\perp} = n - p$.

- *Application aux matrices nilpotentes*
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice nilpotente. C'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_n$.
On admet dans la suite que toute matrice nilpotente est de trace nulle.
On définit sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la forme bilinéaire symétrique φ par
$$\forall\, M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(M,N) = \mathrm{Tr}(MN).$$

20. Vérifier que φ est non dégénérée.
Les notions d'orthogonalité définies dans la suite sont relatives à cette forme bilinéaire symétrique.

21. Est-ce que φ est un produit scalaire ?

On définit maintenant l'endomorphisme
$$f_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA. \end{array} \right.$$

22. Pour $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, comparer $\varphi\big(f_A(M), N\big)$ et $\varphi\big(M, f_A(N)\big)$.

23. Montrer que $\operatorname{Im} f_A \subset \big(\operatorname{Ker} f_A\big)^{\perp}$. En utilisant le résultat de la question 19, justifier qu'il y a même égalité.

24. Justifier que si C commute avec A, alors AC est une matrice nilpotente. En déduire que $A \in \big(\operatorname{Ker} f_A\big)^{\perp}$.

25. Conclure en montrant qu'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = AB - BA$.

Problème B - Une famille de polynômes orthogonaux

On rappelle que l'on définit la fonction Γ sur $\mathbb{R}_*^+$ avec
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Partie I - un produit scalaire

Dans la suite, on définit pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, le polynôme e_i par $e_i(x) = x^{i-1}$. En particulier, e_1 est le polynôme constant égal à 1. Ainsi, $(e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[x])^2$, on pose $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, dt$.

26. Démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire bien posé sur $\mathbb{R}[x]$. On notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne correspondante.

27. Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^{*2}$, donner $\left\langle e_i \mid e_j \right\rangle$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la matrice M_n de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ par
$$\forall\, i, j \in [\![1; n+1]\!], \qquad [M_n]_{i,j} = \left\langle e_i \mid e_j \right\rangle$$
où $[M_n]_{i,j}$ désigne le coefficient en position (i, j) de M_n.

28. À tout polynôme $P_n = \sum\limits_{i=1}^{n+1} a_i e_i \in \mathbb{R}_n[x]$, on fait correspondre sa matrice dans la base canonique
$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{bmatrix}$$

Justifier que $\|P_n\|^2 = {}^tAM_nA$.

29. Est-ce que M_n est diagonalisable ?

30. **a)** Justifier que les valeurs propres de M_n sont toutes strictement positives.

b) Est-ce que M_n est inversible ?

Partie II - un problème de minimisation

On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(t^3 - x - yt - zt^2\right)^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

31. Exprimer $f(x,y,z)$ comme un polynôme en x, y, z.

32. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et montrer qu'elle possède un seul point critique.
On pourra s'appuyer sur ce programme python pour limiter les calculs :

Editeur

```
import numpy as np

A=np.array
    ([[1,1,2],[1,2,6],[1,3,12]])
X=np.array([[6],[-18],[9]])
r=np.linalg.matrix_rank(A)
# pour un calcul de rang
```

```
>>> np.dot(A,X)
[[ 6]
 [24]
 [60]]

>>> r
3
```

Partie III - une base orthonormée

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$h_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^n \mathrm{e}^{-t} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \mathrm{L}_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^t {h_n}^{(n)}(t). \end{array} \right.$$

33. Expliciter $\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2$.

34. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathrm{L}_n \in \mathbb{R}[x]$ avec $\deg(\mathrm{L}_n) = n$ et de coefficient dominant $(-1)^n$.

35. Montrer que si h et g sont deux fonctions $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, avec $n \in \mathbb{N}$, on a, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^x h^{(n)}(t) g(t)\,\mathrm{d}t = \left[\sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p h^{(n-1-p)} g^{(p)}\right]_a^x + (-1)^n \int_a^x h(t) g^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

36. En déduire $\left\langle \mathrm{L}_i, t^k \right\rangle$ pour $(i,k) \in \mathbb{N}^2$. *On pourra distinguer trois cas : $i < k$, $i = k$, $i > k$.*

37. En déduire $\left\langle \mathrm{L}_i, \mathrm{L}_j \right\rangle$ pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$.

38. Montrer que $\left(\frac{\mathrm{L}_i}{i!}\right)_{i \in [\![0;n]\!]}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[x]$.

- *Retour sur le problème de minimisation.*

39. On définit les polynômes e_4, P_0 et $\mathrm{P}_{x,y,z}$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}$ par

$$e_4(t) = t^3, \quad \mathrm{P}_0 = \sum_{i=0}^{2} \frac{\langle e_4, \mathrm{L}_i \rangle}{(i!)^2} \mathrm{L}_i \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_{x,y,z}(t) = zt^2 + yt + x.$$

a) Vérifier que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = \left\| e_4 - \mathrm{P}_{x,y,z} \right\|^2.$$

b) En déduire que

$$f(x,y,z) = \| e_4 - \mathrm{P}_0 \|^2 + \left\| \mathrm{P}_0 - \mathrm{P}_{x,y,z} \right\|^2.$$

40. Conclure en montrant que f admet un minimum global.

– FIN –

DS 2 A - solution

Bonus à chaque cokille trouvée!

Python

1. Le programme part de la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{bmatrix}$$

et répète 400 fois la procédure suivante :
→ On choisit au hasard deux indices i, j et on échange les coefficients $M[i]$ et $M[j]$ de la matrice M. Si n est « suffisamment » petit par rapport à 400, le mélange est efficace et on peut espérer avoir une bijection pris « au hasard ».

2.a) Il faut éviter qu'une personne s'offre son propre cadeau.

2.b)

```
def pointfixe(M):
    n=len(M)
    Compteur=0
    for i in range(n):
        if M[i]==i :
            Compteur+=1
    return Compteur
```

3. Le programme choisit au hasard une bijection grâce au programme de la question 1. Tant que la bijection tirée comporte un point fixe, on continue avec un nouveau tirage aléatoire d'une bijection.
Une fois une bijection sans point fixe obtenue, le programme affiche les correspondances :

```
Victor donne à Mathis
Marie donne à Simon
Alan donne à Angelo
Simone donne à Thomas
Anissa donne à Clara T
...
```

4. Il suffit de placer le premier groupe contenant p personnes et de modifier la fonction `pointfixe` en une fonction (ici notée `groupe`) qui compte le nombre de fois où un individus du premier groupe donne à un individu du premier groupe.
Le reste est pratiquement inchangé.

```
def groupe(M,p):
    n=len(M)
    Compteur=0
    for i in range(p):
        if M[i]<p :
            Compteur+=1
    return Compteur
```

```
def Noel(n):
    M=bijection(n)
    while pointfixe(M)>0:
        M=bijection(n)
    return M

def Noel2(n,p):
    M=bijection(n)
    r=pointfixe(M)
    c=groupe(M,p)
    while r+c>0:
        M=bijection(n)
        r=pointfixe(M)
        c=groupe(M,p)
    return M
```

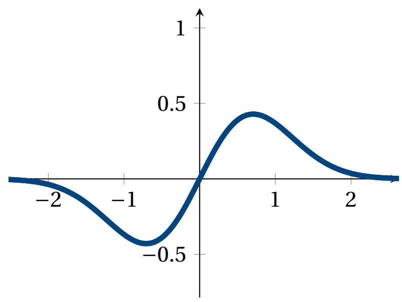
```
Etudiants=['Victor',...,'Sherine']
Profs=['Fiszka','Munier','Kermenn','
    Boisgrollier', 'Corbet', 'Le louarne',
     'Baduel','Albert']

n=len(Etudiants)
p=len(Profs)
L=Profs+Etudiants
M=Noel2(n+p,p)
for i in range(n+p):
     print(L[i],'donne à', L[M[i]])
```

Problème A

5. La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f_1'(x) = \left(1-2x^2\right)e^{-x^2} = (1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)e^{-x^2}.$$

On en déduit les variations :



croissante sur $[-1/\sqrt{2}; +1/sqrt2]$ et décroissante sur $]-\infty; -1/\sqrt{2}]$ et $[1/\sqrt{2}; +\infty[$. On a un maximum en $f(1/\sqrt{2})$ et un minimum en $f(-1/\sqrt{2})$ (la fonction est aussi impaire).

6. La fonction f_n est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ par produit de fonctions $\mathscr{C}^1$.
→ $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$ est $\mathscr{C}^1$ car polynomiale.

→ $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$ est $\mathscr{C}^1$ car polynomiale et par composition avec $\exp : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, la fonction $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \exp(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. On a de plus :

$$\begin{aligned}\partial_1 f_2(x,y) &= e^{-x^2-y^2} + (x+y)(-2x)e^{-x^2-y^2}\\ &= \left(-2x^2-2xy+1\right)e^{-x^2-y^2}.\end{aligned}$$

Par symétrie

$$\partial_2 f_2(x,y) = \left(-2y^2-2xy+1\right)e^{-x^2-y^2}.$$

Le point (x,y) est critique si et seulement si

$$\begin{cases} -2x^2-2xy+1=0\\ -2y^2-2xy+1=0\end{cases}$$
$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} -2x^2-2xy+1=0\\ 2\left(x^2-y^2\right)=0.\end{cases}$$

On a donc $x=y$ ou $x=-y$. Le second cas est impossible puisque avec L_1, on obtiendrait

$$0 = -2x^2-2xy+1 = 1.$$

On a donc $x=y$ et

$$0 = -2x^2-2x^2+1 = -4x^2+1.$$

Soit $x = \pm 1/2$. Finalement, on a deux points critiques donnés par :

$$a_0 = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad b_0 = \left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right).$$

7. Par l'étude des lignes de niveau :
→ $f(a_0)$ semble être un maximum local (même global) ;
→ $f_2(b_0)$ semble être un minimum.

8. Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^k e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on a une intégrale généralisée en $\pm\infty$.
À l'aide des croissances comparées

$$t^{k+2}e^{-t^2} = \left(t^2\right)^{\frac{k+2}{2}} e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a donc

$$t^k e^{-t^2} = o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Par le critère de negligeabilité et celui de Riemann, l'intégrale I_k est convergente.

9. Une densité de $\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$ avec $\sigma = 1/\sqrt{2}$ est :

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$$

avec convergence et l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1.$$

On en déduit que

$$I_0 = \sqrt{\pi}.$$

Sachant que la loi $\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$ a un moment d'ordre 2 donné par

$$\mathbf{E}\left(X^2\right) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{E}(X)^2 = \sigma^2 + 0^2 = \sigma^2 = \frac{1}{2}.$$

On a par la formule de transfert

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}.$$

D'où $\qquad I_2 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}.$

10. Soient $A, B \in \mathbb{R}$, $A < B$. Procédons par intégration par parties sachant que les fonctions étudiées sont $\mathscr{C}^1$

$$\begin{aligned}\int_A^B t^4 e^{-t^2}\,dt &= \int_{-A}^{B} t^3 \cdot t e^{-t^2}\,dt\\ &= \left[t^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-t^2}\right]_A^B + \int_A^B \frac{3}{2}t^2 e^{-t^2}\,dt\\ &\underset{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}{\longrightarrow} 0 + \frac{3}{2}I_2.\end{aligned}$$

Il vient $\qquad I_4 = \dfrac{3}{4}\sqrt{\pi}.$

11. Soient a, b, $c \in \mathbb{R}$. Par linéarité, l'intégrale

$$g(a,b,c) = \left(\frac{a}{\sqrt{\pi}}I_0 + \frac{2b}{\sqrt{\pi}}I_2 + \frac{4c}{3\sqrt{\pi}}I_4\right)e^{-\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

est convergente. Avec les valeurs de I_0, I_2 et I_4 calculées précédemment

$$\begin{aligned}g(a,b,c) &= (a+b+c)e^{-\left(a^2+b^2+c^2\right)}\\ &= f_3(a,b,c).\end{aligned}$$

12. La fonction f_3 est de classe $\mathscr{C}^1$ (voir question 6) et

$$\partial_1 f_3(x,y,z) = \big(1+(x+y+z)(-2x)\big)e^{-x^2-y^2-z^2}.$$

Par symétrie des rôles entre x, y et z

$$\begin{aligned}\partial_2 f_3(x,y,z) &= \big(1+(x+y+z)(-2y)\big)e^{-x^2-y^2-z^2}\\ \partial_3 f_3(x,y,z) &= \big(1+(x+y+z)(-2z)\big)e^{-x^2-y^2-z^2}.\end{aligned}$$

13. Le point (x,y,z) est critique si et seulement si

$$\begin{cases} 1-2x\cdot s=0\\ 1-2y\cdot s=0\\ 1-2z\cdot s=0\end{cases} \quad \text{où } s = x+y+z.$$

Notons que $s \neq 0$ (sinon $1=0$..). En effectuant (L_1-L_2), (L_1-L_3), on obtient $x=y=z$. Puis $s=3x$ et enfin le système est équivalent à

$$\begin{cases} x=y=z\\ 1-6x^2=0\end{cases} \iff \left\{x=y=z=\pm\sqrt{\frac{1}{6}}\right..$$

On obtient alors deux points critiques :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \quad \text{et} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

14. Cours.
Dans le cas de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique, on obtient :

$$\forall X = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall Y = \left(y_1,y_2,\cdots,y_n\right) \in \mathbb{R}^n$$
$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}.$$

En particulier pour $n = 3$ avec

$$X = (x_1, x_2, x_3) \quad \text{et} \quad Y = (1,1,1)$$

on obtient le résultat demandé.

15. Il y a égalité si et seulement si X et Y sont colinéaires. Dit autrement, toutes les coordonnées de X sont identiques : $x = y = z$.

16. Soient $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\left|f(x,y,z)\right| &= |x+y+z|\mathrm{e}^{-x^2-y^2-z^2}\\ &\leqslant \sqrt{3}\cdot\|X\|\mathrm{e}^{-\|X\|^2}\\ &\leqslant \sqrt{3}f_1\left(\|X\|\right).\end{aligned}$$

17. En reprenant la question 5, on sait que f_1 a un maximum donné par $\mathrm{e}^{-1/2}/\sqrt{2}$ et un minimum par $-\mathrm{e}^{-1/2}/\sqrt{2}$ atteint respectivement en $1/\sqrt{2}$ et $-1/\sqrt{2}$. On obtient donc pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

$$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-1/2} \leqslant g(a,b,c) \leqslant \frac{\sqrt{3}\cdot\mathrm{e}^{-1/2}}{\sqrt{2}}.$$

Avec égalité si et seulement si $\|(a,b,c)\| = \pm 1/\sqrt{2}$ et $a = b = c$. Avec le choix

$$a = b = c = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

on obtient $\qquad g(a,b,c) = \sqrt{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-1/2}$

et pour le choix

$$a = b = c = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$g(a,b,c) = -\sqrt{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-1/2}.$$

On a donc un maximum et un minimum global pour la fonction $f_3 = g$.

18. En considérant le produit scalaire (et norme) canonique sur $\mathbb{R}^n$, on montre par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que pour $X = (x_1, \ldots, x_n)$

$$\begin{aligned}f_n(X) &\leqslant \sqrt{n}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^n {x_i}^2}\exp(-\sum_{i=1}^n {x_i}^2)\\ &\leqslant \sqrt{n}f_1(\|X\|)\\ &\leqslant \sqrt{n}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-1/2}}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

avec égalité si

$$X = \left(\frac{1}{\sqrt{2n}}, \frac{1}{\sqrt{2n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2n}}\right).$$

On a donc bien un maximum global.
Et par symétrie de $f(-X) = -f(X)$, on a aussi un minimum global atteint en

$$-\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}, \frac{1}{\sqrt{2n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2n}}\right).$$

Problème B

Voir EDHEC 2010

Problème C

26. La fonction $|R|$ est continue sur le segment $[-1;1]$, elle admet donc un maximum. On peut donc faire le choix de

$$M = \max_{t\in[-1;1]} |R(t)|.$$

On en déduit que pour tout $t \in]-1;1[$

$$0 \leqslant |R(t)\omega(t)| \leqslant \frac{\sqrt{2}M}{(1+t)^{1/2}}.$$

Or l'intégrale de Riemann généralisée en -1 :

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^{1/2}}$$

est convergente ($1/2 < 1$). Par le critère de comparaison, on en déduit l'absolue convergence (et donc la convergence) de

$$\int_{-1}^1 R(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t.$$

27. On a prouvé que l'application était bien posée à la question précédente. Le reste est du cours.

28. Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. $\varphi(P)$ est encore un polynôme et

$$\deg\left(\left(x^2-1\right)P''(x)\right) \leqslant \deg P, \quad \deg\left((2x+1)P'(x)\right) \leqslant \deg P.$$

Par somme $\qquad \deg(\varphi(P)) \leqslant \deg P \leqslant n.$

D'où $\qquad \varphi(P) \in \mathbb{R}_n[x].$

La linéarité de φ est une conséquence de la linéarité de la dérivation. Finalement $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[x])$.

29. On a $\varphi(1) = 0$ et $1 \neq 0_{\mathbb{R}_n[x]}$. Ainsi $\operatorname{Ker}\varphi \neq \{0\}$ et φ n'est pas injectif (et donc non bijectif).
En tant qu'endomorphisme de dimension finie φ n'est pas surjectif.

30. On a $\varphi(1) = 0$ et $\varphi(x) = 2x^2 + x$.
Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$

$$\begin{aligned}\varphi\left(x^k\right)(x) &= \left(x^2-1\right)k(k-1)x^{k-2} + (2x+1)kx^{k-1}\\ &= k(k-1)x^k + 2kx^k + kx^{k-1} + k(k-1)x^{k-2}\\ &= k(k+1)x^k + \underbrace{\cdots}_{\deg\leqslant k-1}\end{aligned}$$

On en déduit que la matrice de φ dans la base canonique est triangulaire avec pour diagonale

$$0, 2, \ldots, k(k+1), \ldots, n(n+1).$$

On constate que l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_n[x]$ a $n+1 = \dim\mathbb{R}_n[x]$ valeurs propres. On sait alors que φ est diagonalisable.

32. La fonction u est dérivable sur $]-1;1[$ par produit et :

$$\begin{aligned} u'(t) =& \frac{3}{2}(1+t)\omega(t)\mathrm{P}'(t) \\ & -\frac{1}{2}(1-t)\omega(t)\mathrm{P}'(t) \\ & -(1-t)(1+t)\omega(t)\mathrm{P}''(t) \\ =&(1+2t)\omega(t)\mathrm{P}'(t)+\left(t^2-1\right)\omega(t)\mathrm{P}''(t) \\ u'(t) =& \varphi(\mathrm{P})(t)\omega(t). \end{aligned}$$

Soient A, B avec $-1 < \mathrm{A} < \mathrm{B} < 1$. Intégrons par partie sachant que les fonctions considérées sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\mathrm{A};\mathrm{B}]$.

$$\begin{aligned} &\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \varphi(\mathrm{P})(t)\mathrm{Q}(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t \\ =& \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} u'(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t = \left[u(t)\mathrm{Q}(t)\right]_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} - \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} u(t)\mathrm{Q}'(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Or $$u(t)\mathrm{Q}(t) \underset{t\to\pm1}{\longrightarrow} u(t)\mathrm{Q}(1)=0$$

car la fonction u est continue sur $[-1;1]$.
Le crochet est donc convergent lorsque $\mathrm{A}\to-1$ et $\mathrm{B}\to1$ avec

$$\left[u(t)\mathrm{Q}(t)\right]_{-1}^{1} = 0.$$

Le résultat s'en déduit. Par symétrie des rôles

$$\begin{aligned} \langle\varphi(\mathrm{P}),\mathrm{Q}\rangle &= \int_{-1}^{1}(1-t)^{\frac{3}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1}(1-t)^{\frac{3}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{Q}'(t)\mathrm{P}'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \langle\mathrm{P},\varphi(\mathrm{Q})\rangle. \end{aligned}$$

33. Cours.

34. Il suffit de faire le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à partir de la base canonique puisqu'on a une base orthonormée et aussi

$$\forall\, k\in[\![0;n]\!],\quad \mathrm{Vect}(1,x,\ldots,x^k)=\mathrm{Vect}(\mathrm{U}_1,\mathrm{U}_2,\ldots,\mathrm{U}_k).$$

35. Soit $j\in[\![1;n]\!]$. La famille $\left(\mathrm{U}_0,\mathrm{U}_1,\ldots,\mathrm{U}_{j-1}\right)$ est une famille de polynômes de degré échelonné. On en déduit que la famille est libre. Puis, c'est une base de $\mathbb{R}_{j-1}[x]$ car elle contient le bon nombre de vecteurs. Or, U_j est orthogonal à chaque vecteur de cette base, donc

$$\mathrm{U}_j\in\mathbb{R}_{j-1}[x]^{\perp}.$$

C'est-à-dire, pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à $j-1$,

$$\left\langle \mathrm{Q},\mathrm{U}_j\right\rangle = 0.$$

36. Raisonnons par l'absurde en supposant que U_j ne change pas de signe. De plus, la fonction polynomiale $t\in]-1;1[\mapsto \mathrm{U}_j(t)\omega(t)$ est continue et

$$0=\left\langle \mathrm{U}_j,1\right\rangle = \int_{-1}^{1}\mathrm{U}_j(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit que la fonction $\mathrm{U}_j\cdot\omega$ est nulle sur $]-1;1[$. Comme ω ne s'annule pas, on en déduit que U_j a une infinité de racines (tout les réels de $]-1;1[$). C'est donc le polynôme nul. Absurde, il est de norme 1.
Il y a donc un changement de signe.

37. Raisonnons par l'absurde en supposant que U_j n'a pas j racines ou qu'elles ne sont pas toutes dans $[-1;1]$. On en déduit que

$$\deg(\mathrm{V})<j,\quad \text{i.e}\quad \mathrm{V}\in\mathrm{R}_{j-1}[x].$$

D'après ce qui précède, on en déduit que

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{V}(t)\mathrm{U}_j(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t = \left\langle \mathrm{V},\mathrm{U}_j\right\rangle = 0.$$

Or, sous ces conditions la fonction

$$t\mapsto \mathrm{V}(t)\mathrm{U}_j(t)\omega(t)$$

est de signe constant et continue. On aurait donc la fonction serait nulle sur $]-1;1[$. Ce qui est absurde.
Finalement, U_j admet j racines réelles toutes situées dans l'intervalle $]-1;1[$.

38. Soient $\mathrm{P},\mathrm{Q}\in\mathrm{E}_n$. On a

$$\begin{aligned} \langle x\mathrm{P}(x),\mathrm{Q}(x)\rangle &= \int_{-1}^{1} t\mathrm{P}(t)\cdot\mathrm{Q}(t)\omega(t) \\ &= \int_{-1}^{1}\mathrm{P}(t)\cdot t\mathrm{Q}(t)\omega(t) \\ &= \langle \mathrm{P}(x),x\mathrm{Q}(x)\rangle. \end{aligned}$$

39. Soit $k\in[\![1;n-1]\!]$. Le polynôme U_k appartient à E_n, il s'exprime à l'aide de la base orthonormée $\mathscr{B}$ par

$$x\mathrm{U}_k(x)=\sum_{i=0}^{n}\left\langle x\mathrm{U}_k(x),\mathrm{U}_i\right\rangle \mathrm{U}_i.$$

Comme le polynôme $x\mathrm{U}_k(x)$ est de degré $k+1$, le nombre de termes se simplifie

$$x\mathrm{U}_k(x)=\sum_{i=0}^{k+1}\left\langle x\mathrm{U}_k(x),\mathrm{U}_i\right\rangle \mathrm{U}_i.$$

Ensuite pour $i<k-1$, on a d'après le résultat précédent

$$\left\langle x\mathrm{U}_k(x),\mathrm{U}_i\right\rangle = \left\langle \mathrm{U}_k,x\mathrm{U}_i(x)\right\rangle.$$

En utilisant maintenant le résultat de la question 35 avec $x\mathrm{U}_i(x)\in\mathbb{R}_{k-1}[x]$, on a

$$\left\langle \mathrm{U}_k,x\mathrm{U}_i(x)\right\rangle = 0.$$

En résumé, la somme

$$x\mathrm{U}_k(x)=\sum_{i=0}^{k+1}\left\langle x\mathrm{U}_k(x),\mathrm{U}_i\right\rangle \mathrm{U}_i.$$

se réduit aux termes pour $i=k-1$, $i=k$, $i=k+1$. Le résultat s'en déduit.

DS 2 * - solution

Bonus à chaque cokille trouvée!

Python
Voir sujet A

Exercice 1

5. En tant que quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas, f est sur $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. En remarquant que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{y}{1+y^2},$$

on a $$\partial_1 f(x,y) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{y}{1+y^2}$$

et par symétrie des rôles

$$\partial_2 f(x,y) = \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2} \cdot \frac{x}{1+x^2}.$$

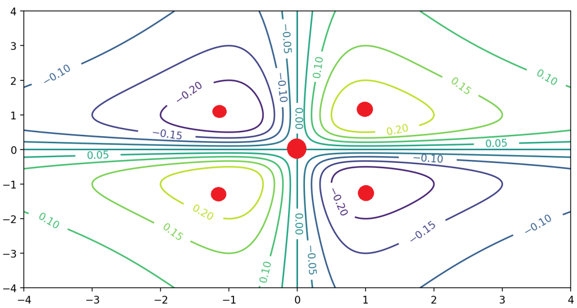
6. Le point (x, y) est critique si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(1-x^2\right) y = 0 \\ \left(1-y^2\right) x = 0 \end{array} \right.$$

On obtient cinq points critiques

$$(0,0); (1,1); (1,-1); (-1,1); (-1,-1).$$

Calcul que l'on peut vérifier avec les lignes de niveau :



7. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$f(x,-x) = \frac{-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} < 0 \text{ et } f(x,x) = \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2} > 0$$

$f(0,0) = 0$ n'est ni un maximum, ni un minimum. Le point $(0,0)$ est un point selle.

8. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(1,1) &= \frac{xy}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{4xy - \left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)} \end{aligned}$$

On convient donc de poser

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(x,y) &= 4xy - \left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right) \\ &= 4xy - \left(1+x^2+y^2+x^2y^2\right) \\ &= -x^2 \underbrace{\left(1+y^2\right)}_{\neq 0} + 4xy - 1 - y^2. \end{aligned}$$

On a bien un polynôme de degré 2 en x.

9. Son discriminant est

$$\begin{aligned} \Delta(y) &= (4y)^2 + 4\left(1+y^2\right) \cdot \left(-1-y^2\right) \\ &= (4y)^2 - \left(2(1+y^2)\right)^2 \\ &= \underbrace{(4y+2+2y^2)}_{>0} \underbrace{(-4y+2+2y^2)}_{\geqslant 0}. \end{aligned}$$

Car $-4y+2+2y^2 = 2(y-1)^2 > 0$.
On en déduit que $\Delta(y) \leqslant 0$.

10. Le polynôme est alors de signe constant (donné par son coefficient dominant). En résumé, on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \mathrm{P}(x,y) \leqslant 0$$

puis $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) - f(1,1) \leqslant 0.$$

On a donc un maximum global.

11. En utilisant le résultat précédent, on montre que

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(-1,-1) &= f(x,y) - f(1,1) \leqslant 0 \\ f(x,y) - f(-1,1) &= -(f(-x,y) - f(1,1)) \geqslant 0 \\ f(x,y) - f(1,-1) &= -(f(-x,y) - f(1,1)) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Résumons :
→ $f(1,1) = f(-1,-1)$ est un maximum global.
→ $f(-1,1) = f(1,-1)$ est un minimum global.

Problème A

12. Pour tout $x \in G$
$$\varphi(0_E, x) = \varphi(0 \cdot 0_E, x) = 0 \cdot \varphi(0_E, x) = 0.$$
Ainsi $0_E \in G^\perp$ qui est donc non vide.
Soient $y_1, y_2 \in G^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x \in G$. Par linéarité à gauche de φ
$$\begin{aligned}\varphi(y_1 + \lambda y_2, x) &= \varphi(y_1, x) + \lambda\varphi(y_2, x)\\ &= 0\end{aligned}$$
On en déduit que $y_1 + \lambda y_2 \in G^\perp$.
En conclusion, $G^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

13. Comme L_k est une formule linéaire non nulle,
$$\mathrm{Im}(L_k) = \mathbb{R}.$$
Le rang de L_k est donc 1. Par la formule du rang
$$\dim \mathrm{Ker}(L_k) = n - 1.$$

14. Raisonnons par double inclusion.

$\rightharpoonup$ Soit $y \in \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(L_k)$.
Soit $x \in F$. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que :
$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i.$$
D'où par bilinéarité de φ
$$\begin{aligned}\varphi(y, x) &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \varphi(y, e_i)\\ &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \underbrace{L_i(y)}_{=0} = 0.\end{aligned}$$
Ce résultat étant valable pour tout $x \in F$, on en déduit que $y \in F^\perp$.

$\rightharpoonup$ Soit $y \in F^\perp$. Comme $e_k \in F$, on a par définition de l'orthogonal, $L_k(y) = \varphi(e_k, y) = 0$. D'où $y \in \mathrm{Ker}(L_k)$. Ceci étant vrai pour tout $k \in [\![1;p]\!]$,
$$y \in \prod_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(L_k).$$
Ce qui donne l'inclusion réciproque et l'égalité est prouvée.

15. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que
$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k L_k = 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{R})}.$$
C'est-à-dire, pour tout $y \in E$
$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \varphi(e_k, y) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k L_k(y) = 0.$$
Par linéarité de φ à gauche
$$\varphi\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k, y\right) = 0.$$
En particulier pour $y = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k \in E$, on a
$$\varphi\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k\right) = 0.$$
Or, φ étant non dégénérée
$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k = 0.$$
Puis par liberté de la famille $(e_1, \dots, e_p)$ (c'est une base), on obtient
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots \lambda_p = 0.$$
La famille $(L_1, \dots, L_p)$ est libre.

Les questions 16 à 18 sont directement extraites de la fin de sujet EMlyon de l'année dernière. Je vous recommande sa recherche pour faire le point sur les formes linéaires.

16. Soit $x \in E$. Raisonnons par équivalence
$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker} f &\iff f(x) = (0, 0, \dots, 0)\\ &\iff \forall k \in [\![1;p]\!], \quad L_k(x) = 0\\ &\iff \forall k \in [\![1;p]\!], \quad x \in \mathrm{Ker}(L_k)\\ &\iff x \in \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(L_k).\end{aligned}$$
D'où l'égalité demandée.

17.a) Si f n'est pas surjective :
$$\mathrm{Im} f \subsetneq \mathbb{R}^p.$$
D'où $\qquad m = \dim \mathrm{I}_m(f) < p.$

17.b) Soit $(e_{m+1}, \dots e_p)$ des vecteurs tels que
$$(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_p)$$
soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^p$ pour le produit scalaire canonique. On a alors
$$e_1, \dots, e_m \in \mathrm{Vect}(e_p)^\perp$$
puis $\qquad \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Vect}(e_p)^\perp.$

Ainsi $H = \mathrm{Vect}(e_p)^\perp$ convient.

17.c) Si on note $H^\perp$ l'orthogonal de H pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^p$, on sait que H est de dimension 1. Soit a un vecteur non nul de $H^\perp$. Notons
$$a = (a_1, \dots, a_p).$$
Ainsi pour tout $y = (y_1, \dots, y_p) \in H$
$$\sum_{i=1}^{p} a_i y_j = (a|y) = 0.$$
Soit maintenant $x \in E$. On sait que
$$(L_1(x), \dots, L_p(x)) \in \mathrm{Im} f \subset H.$$

On en déduit que

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \mathrm{L}_j(x) = 0.$$

Ce résultat étant valable pour tout $x \in \mathrm{E}$,

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \mathrm{L}_j = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathbb{R})}.$$

La famille est liée car le vecteur a est non nul, et ses composantes a_i ne sont pas tous nulles.

18.a) Cet énoncé est la contraposée du résultat de la question 17.

18.b) Par la formule du rang

$$\dim \ker(f) + \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{E}).$$

Comme l'application est surjective, son image est $\mathbb{R}^p$ et f est de rang p. On a donc bien

$$\dim \ker(f) = n - p.$$

19. C'est une conséquence directe des questions 14 et 18.b).

20. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $\mathrm{N} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{MN}) = \varphi(\mathrm{M},\mathrm{N}) = 0.s$$

En particulier, pour $\mathrm{N} = {}^t\mathrm{M}$, on obtient

$$\mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}\,{}^t\mathrm{M}\right) = 0.$$

En reprenant la preuve sur le produit scalaire usuel sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{M} = 0_n$. La forme bilinéaire φ est non dégénérée.

21. Non. Par exemple, pour M vérifiant $\mathrm{M} \neq 0$, $\mathrm{M}^2 = 0$ (matrice nilpotente)

$$0 = \mathrm{Tr}(\mathrm{M}\cdot\mathrm{M}) = \varphi(\mathrm{M},\mathrm{M}).$$

22. Soient $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\varphi\left(f_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}),\mathrm{N}\right) &= \varphi(\mathrm{AM}-\mathrm{MA},\mathrm{N})\\
&= \mathrm{Tr}((\mathrm{AM}-\mathrm{MA})\mathrm{N})\\
&= \mathrm{Tr}(\mathrm{AMN}) - \mathrm{Tr}(\mathrm{MAN})\\
&= \mathrm{Tr}(\mathrm{NAM}) - \mathrm{Tr}(\mathrm{ANM})\\
&= \mathrm{Tr}((\mathrm{NA}-\mathrm{AN})\mathrm{M})\\
&= -\mathrm{Tr}(\mathrm{M}(\mathrm{AN}-\mathrm{NA}))\\
\varphi\left(f_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}),\mathrm{N}\right) &= -\varphi\left(\mathrm{M}, f_{\mathrm{A}}(\mathrm{N})\right).
\end{aligned}$$

23. Soit $f_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) \in \mathrm{Im}\, f_{\mathrm{A}}$. Soit $\mathrm{N} \in \mathrm{Ker}(f_{\mathrm{A}})$. On a :

$$\begin{aligned}
\varphi\left(f_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}),\mathrm{N}\right) &= -\varphi\left(\mathrm{M}, f_{\mathrm{A}}(\mathrm{N})\right)\\
&= -\varphi(\mathrm{M},0) = 0.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve la première inclusion.
On a aussi par la formule du rang et la question 19

$$\begin{aligned}
\dim \mathrm{Im}\, f_{\mathrm{A}} &= \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \mathrm{Ker}\, f_{\mathrm{A}}\\
&= \dim\left(\mathrm{Ker}\, f_{\mathrm{A}}\right)^{\perp}.
\end{aligned}$$

L'inclusion et l'égalité des dimensions donne bien l'égalité.

$$\mathrm{Im}\, f_{\mathrm{A}} = \left(\mathrm{Ker}\, f_{\mathrm{A}}\right)^{\perp}.$$

24. Comme les matrices commutent, on montre par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (\mathrm{AC})^k = \mathrm{A}^k\mathrm{C}^k.$$

Ainsi $\mathrm{A}^k = 0_n$ implique $(\mathrm{AC})^k = 0_n$. La matrice AC est nilpotente.
Soit $\mathrm{C} \in \mathrm{Ker}(f_{\mathrm{A}})$. On a donc $\mathrm{AC} = \mathrm{CA}$ et la matrice AC est nilpotente. En particulier, la matrice est de trace nulle

$$\varphi(\mathrm{AC}) = 0.$$

Ainsi la matrice A est orthogonal à tout vecteur de $\mathrm{Ker}\, f_{\mathrm{A}}$, c'est par définition $\mathrm{A} \in \left(\mathrm{Ker}\, f_{\mathrm{A}}\right)^{\perp}$.

25. Concluons :

$$\mathrm{A} \in \left(\mathrm{Ker}\, f_{\mathrm{A}}\right)^{\perp} = \mathrm{Im}\, f_{\mathrm{A}},$$

Il existe donc $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathrm{A} = f_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \mathrm{AB} - \mathrm{BA}.$$

Problème B

26. Cours. Attention, il ne faut pas oublier de justifier que l'intégrale est convergente.

27. Sachant que $e_i = x^{i-1}$ et $e_j = x^{j-1}$, il vient

$$\left\langle e_i, e_j \right\rangle = \int_0^{+\infty} t^{i-1+j-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

À l'aide des propriétés de la fonction Gamma

$$\left\langle e_i, e_j \right\rangle = \Gamma(i+j-1) = (i+j-2)!$$

28. On a par définition du produit matriciel

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{P}_n\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i ; \sum_{j=1}^{n+1} a_j e_j \right\rangle\\
&= \sum_{i,j=1}^{n+1} a_i a_j \left\langle e_i, e_j \right\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n+1} a_i \left(\sum_{j=1}^{n+1} [\mathrm{M}_n]_{ij} [\mathrm{A}]_{j,1} \right)\\
&= \sum_{i=1}^{n+1} a_i [\mathrm{M}_n\mathrm{A}]_{i,1}\\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \left[{}^t\mathrm{A}\right]_{1i} [\mathrm{M}_n\mathrm{A}]_{i,1}\\
&= \left[{}^t\mathrm{A}\mathrm{M}_n\mathrm{A}\right]_{1,1} = {}^t\mathrm{A}\mathrm{M}_n\mathrm{A}.
\end{aligned}$$

29. La matrice est symétrique réelle, donc oui, la matrice est diagonalisable.

30.a) Soit X un vecteur propre associé à une valeur propre λ de A. Si on note

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}),$$

on peut associer le polynôme $P_n = \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i$ et avoir

$$\|P_n\|^2 = {}^t X M_n X.$$

Mais on a aussi

$$\|P_n\|^2 = \lambda\, {}^t XX = \lambda N(X)$$

où $N(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} > 0$ car X n'est pas le vecteur nul. Dès lors

$$\lambda = \frac{\|P_n\|^2}{N(X)} > 0.$$

30.b) Oui car aucune valeur propre n'est nulle.

31. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} &f(x,y,z)\\ &= \int_0^{+\infty} \left(t^3 - x - yt - zt^2\right)^2 e^{-t}\,dt\\ &= \int_0^{+\infty} \left(t^6 + x^2 + y^2t^2 + z^2t^4 + 2\left(-xt^3 - yt^4 - zt^5 + xyt + xzt^2 + yzt^3\right)\right) e^{-t}\,dt\\ &= 6! + x^2 + y^2 2! + z^2 4! + 2(-x3! - y4! - z5! + xy + xz2! + yz3!\\ &= x^2 + 2y^2 + 24z^2 + 2xy + 4xz + 12yz - 12x - 48y - 240z + 720 \end{aligned}$$

32. La fonction f est $\mathscr{C}^1$ car polynomiale. Vérifier que

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,y,z) &= 2x + 2y + 4z - 12\\ \partial_2 f(x,y,z) &= 2x + 4y + 12z - 48\\ \partial_3 f(x,y,z) &= 4x + 12y + 48z - 240. \end{aligned}$$

Soient A, la matrice donnée par le programme python et

$$B = \begin{bmatrix} 6\\ 24\\ 60 \end{bmatrix}.$$

Alors (x, y, z) est un point critique de f si et seulement si

$$AX = B \quad \text{où} \quad X = \begin{bmatrix} x\\ y\\ z \end{bmatrix}.$$

Or la matrice A est inversible (son rang est 3), il y a donc une unique solution X. Et cette solution est donnée par la matrice colonne X donnée par le programme.
Résumons : $(6, -18, 9)$ est l'unique point critique de f.

33.

$$\begin{aligned} L_0(t) &= e^t e^{-t} = 1\\ L_1(t) &= e^t h_1'(t) = -t + 1\\ L_2(t) &= e^t h_2''(t)\\ &= e^t \left(\left(t^2 - 4t + 2\right) e^{-t}\right) = t^2 - 4t + 2. \end{aligned}$$

34. Les fonctions $e_{n+1} : t \to t^n$ et $g : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(-t)$ sont de classe $\mathscr{C}^n$, en utilisant la formule de Leibniz, il vient

$$\begin{aligned} L_n &= e^t \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e_{n+1})^{(n-k)}(t) g^{(k)}(t)\\ &= e^t \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} t^k (-1)^k e^{-t}\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} (-1)^k t^k. \end{aligned}$$

On vérifie que le terme devant t^n est $(-1)^n$, il est non nul et L_n est bien polynomiale de degré n.

35. Cette formule se démontre par récurrence sur n à l'aide de l'intégration par parties.

36. En utilisant le résultat précédent et sachant que la dérivée i d'un polynôme est nulle dès que i est strictement supérieur au degré du polynôme, on montre que

$$\langle L_i, t^k\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i > k\\ (-1)^i (i!)^2 & \text{si } i = k\\ (-1)^i \frac{(k!)^2}{(k-i)!} & \text{si } i < k \end{cases}$$

37. Par symétrie, on peut supposer $i \geqslant j$.
→ Pour $i > j$. Si les α_k désignent les coefficients de la décomposition dans la base canonique de L_j,

$$L_j = \sum_{k=0}^{j} \alpha_k t^k$$

On en déduit que

$$\left\langle L_i, L_j \right\rangle = \left\langle L_i, \sum_{k=0}^{j} \alpha_k t^k \right\rangle = \sum_{k=0}^{j} b_k \underbrace{\left\langle L_i, t^k \right\rangle}_{=0} = 0.$$

Dit autrement, la famille $(L_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est orthogonale :

$$\left\langle L_i, L_j \right\rangle = 0 \text{ si } i \neq j,$$

→ $i = j$. On écrit

$$L_i = (-1)^i t^i + Q(t) \quad Q \in \mathbb{R}_{i-1}[x].$$

Il vient

$$\begin{aligned} \left\langle L_i, L_i \right\rangle &= (-1)^i \left\langle L_i, t^i \right\rangle + \left\langle L_i, Q \right\rangle\\ &= (-1)^i \left\langle L_i, t^i \right\rangle. \end{aligned}$$

Et avec le calcul précédent :

$$\left\langle L_i, L_i \right\rangle = (-1)^i \cdot (-1)^i (i!)^2 = (i!)^2.$$

38. D'après ce qui précède, la famille est orthogonale. Pour montrer qu'elle est orthonormée, il suffit de vérifier que les vecteurs sont normés. Or

$$\|L_i\| = \sqrt{\langle L_i, L_i \rangle} = i!.$$

Donc le vecteur

$$\frac{L_i}{\|L_i\|} = \frac{L_i}{i!}$$

est bien normé.

39.a) On a

$$\begin{aligned} &\left\|e_4 - P_{x,y,z}\right\|^2\\ &= \langle e_4 - P_{x,y,z}, e_4 - P_{x,y,z} \rangle\\ &= \int_0^{+\infty} \left(e_4(t) - P_{x,y,z}(t)\right)^2 e^{-t}\,dt\\ &= \int_0^{+\infty} (t^3 - x - yt - zt^2)^2 e^{-t}\,dt\\ &= f(x,y,z). \end{aligned}$$

39.b) Tout d'abord

$$\begin{aligned}
&\left\|e_4 - \mathrm{P}_{x,y,z}\right\|^2\\
&= \left\|\left(e_4 - \mathrm{P}_0\right) + \left(\mathrm{P}_0 - \mathrm{P}_{x,y,z}\right)\right\|^2\\
&= \|e_4 - \mathrm{P}_0\|^2 + \left\|\mathrm{P}_0 - \mathrm{P}_{x,y,z}\right\|^2 + 2\left\langle e_4 - \mathrm{P}_0, \mathrm{P}_0 - \mathrm{P}_{x,y,z}\right\rangle.
\end{aligned}$$

Or, en reprenant la question 38, on sait que les 4 polynômes

$$\frac{\mathrm{L}_i}{(i!)} \quad \text{avec} \quad i \in [\![0;3]\!]$$

forment une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[x]$. Comme $e_4 \in \mathbb{R}_3[x]$, il vient

$$e_4 = \sum_{i=0}^{3} \frac{\left\langle e_4, \mathrm{L}_i\right\rangle}{(i!)^2} \mathrm{L}_i.$$

Puis,

$$e_4 - \mathrm{P}_0 = \frac{\langle e_4, \mathrm{L}_3\rangle}{(3!)^2} \mathrm{L}_3 \in \mathrm{Vect}(\mathrm{L}_3).$$

Enfin la question 36 donne $\mathrm{L}_3 \in \mathbb{R}_2[x]^{\perp}$. Comme $\mathrm{P}_0 - \mathrm{P}_{x,y,z} \in \mathbb{R}_2[x]$, il vient :

$$\left\langle e_4 - \mathrm{P}_0, \mathrm{P}_0 - \mathrm{P}_{x,y,z}\right\rangle = 0.$$

En revenant au calcul initial, on a bien

$$\left\|e_4 - \mathrm{P}_{x,y,z}\right\|^2 = \|e_4 - \mathrm{P}_0\|^2 + \left\|\mathrm{P}_0 - \mathrm{P}_{x,y,z}\right\|^2.$$

40. Il existe (x_0, y_0, z_0) tel que

$$\mathrm{P}_{x_0,y_0,z_0} = \mathrm{P}_0.$$

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la relation précédente se réécrit sous la forme

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &= f(x_0, y_0, z_0) + \left\|\mathrm{P}_0 - \mathrm{P}_{x,y,z}\right\|^2\\
&\geqslant f(x_0, y_0, z_0).
\end{aligned}$$

Ce calcul montre que $f(x_0, y_0, z_0)$ est un minimum global pour f. Ce qui conclut ce sujet.