

Sujets de Noël

Exercice 1. ♦ Un exemple de convergence d'un maximum

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1]).$$

On définit ensuite $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $M_n = n(1 - Y_n)$. Justifier qu'il existe une variable aléatoire Y dont on précisera la loi telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$F_{M_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_Y(x).$$

Exercice 2. ♦ Lois de Pareto et produit

Pour $a \in \mathbb{R}_*^+$, on définit la fonction f_a sur $\mathbb{R}$ par

$$f_a(t) = \begin{cases} \frac{a}{t^{a+1}} & \text{si } t \in [1; +\infty[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f_a est une densité de probabilité.

Dans la suite, on dit qu'une variable X suit une loi de Pareto de paramètre a , noté $VP(a)$, si X admet f_a comme densité.

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}_*^+$ avec $a \neq b$ et X et Y deux variables aléatoires indépendantes avec

$$X \hookrightarrow VP(a) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow VP(b).$$

Justifier que le produit XY est une variable à densité, et en donner une densité.

Exercice 3. ♦♦ Quelques propriétés des statistiques d'ordre

Toutes les variables aléatoires qui apparaissent dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Dans tout le problème, on considère une variable aléatoire X de fonction de répartition F_X et admettant une densité f_X . Les solutions éventuelles de l'équation $F_X(x) = \frac{1}{2}$ s'appellent les médianes théoriques de X . Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on considère un n -échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ i.i.d (indépendant, identiquement distribué¹) de la loi de X et on définit la variable aléatoire :

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k,$$

qui est la moyenne empirique de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$.

On admet l'existence de variables aléatoires à densité $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ telles que, pour tout ω de Ω , les réels $Y_1(\omega), Y_2(\omega), \dots, Y_n(\omega)$ constituent un réarrangement par ordre croissant des réels $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)$, de telle sorte que, pour tout ω de Ω :

$$Y_1(\omega) \leq Y_2(\omega) \leq \dots \leq Y_n(\omega).$$

En particulier, $Y_1 = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Plus généralement, pour tout k de $\llbracket 1; n \rrbracket$, il existe une fonction ψ_k définie et continue sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles, telle que $Y_k = \psi_k(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Si n est un entier impair ($n = 2\ell + 1$, avec $\ell \in \mathbb{N}$), alors la variable aléatoire $Y_{\ell+1}$ est appelée la médiane empirique de l'échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Pour tout réel x et tout entier k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note $J_k(x)$ la variable aléatoire de Bernoulli définie par

$$J_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } [X_k \leq x] \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{si } [X_k > x] \text{ est réalisé.} \end{cases}$$

On pose $S_n(x) = \sum_{k=1}^n J_k(x)$.

1. C'est-à-dire, de même loi.

1. a) Montrer que les fonctions f_{Y_1} et f_{Y_n} définies pour tout x réel par :

$$f_{Y_1}(x) = n(1 - F_X(x))^{n-1} f_X(x) \quad \text{et} \quad f_{Y_n}(x) = n(F_X(x))^{n-1} f_X(x)$$

sont des densités de Y_1 et Y_n respectivement.

- b) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $S_n(x)$?
 c) Justifier l'égalité entre événements suivante : $[Y_k \leq x] = [S_n(x) \geq k]$.
 d) Établir la relation : pour tout x réel, $F_{Y_k}(x) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} (F_X(x))^j (1 - F_X(x))^{n-j}$.
 e) En déduire que pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la fonction f_{Y_k} définie pour tout x réel par

$$f_{Y_k}(x) = k \binom{n}{k} (F_X(x))^{k-1} (1 - F_X(x))^{n-k} f_X(x)$$

est une densité de Y_k .

- f) Montrer que si X admet un moment d'ordre r ($r \in \mathbb{N}^*$), alors pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, Y_k admet un moment d'ordre r .

• **Exemple.**

Dans les questions 2 à 4, on suppose que la fonction de répartition F_X est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

2. a) Tracer la courbe représentative de F_X dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Préciser la demi-tangente à droite au point d'abscisse $x = 1$.
 Justifier que X est une variable aléatoire à densité et préciser une densité f_X de X .
 b) Montrer que X n'admet aucun moment.
 c) Établir l'unicité de la médiane théorique M de X . Calculer M .
 d) Expliciter, pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et pour tout x réel l'expression $f_{Y_k}(x)$ d'une densité de Y_k . En déduire un équivalent de $f_{Y_k}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
 3. On suppose dans cette question que $n \geq 3$.
 a) Montrer que pour tout k de $\llbracket 1, n-2 \rrbracket$, Y_k admet une espérance.
 b) En justifiant l'emploi du changement de variable $t = \frac{1}{\sqrt{x}}$, établir pour tout k de $\llbracket 1, n-2 \rrbracket$ la formule :

$$\mathbf{E}(Y_k) = k \binom{n}{k} \int_0^1 t^{n-k-2} (1-t)^{k-1} dt.$$

- c) Pour tout couple (r, s) de $(\mathbb{N}^*)^2$, on pose :

$$I_{r,s} = \int_0^1 t^{r-1} (1-t)^{s-1} dt.$$

Montrer que pour tout couple (r, s) de $(\mathbb{N}^*)^2$, on a : $I_{r,s} = \frac{(r-1)!(s-1)!}{(r+s-1)!}$.

- d) En déduire l'expression de $\mathbf{E}(Y_k)$ pour tout k de $\llbracket 1, n-2 \rrbracket$.
 e) On suppose que n est impair et supérieur ou égal 5, et on pose $n = 2\ell + 1$. Justifier la définition de la médiane empirique $Y_{\ell+1}$ d'un échantillon, et établir l'égalité $\mathbf{E}(Y_{\ell+1}) = 4 + \frac{6}{\ell-1}$. Commenter
 4. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $Z_n = \frac{1}{n^2} \max(X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{Y_n}{n^2}$.
 a) Calculer pour tout x réel, $F_{Z_n}(x)$.
 b) On définit la fonction φ_Z par :

$$\varphi_Z(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

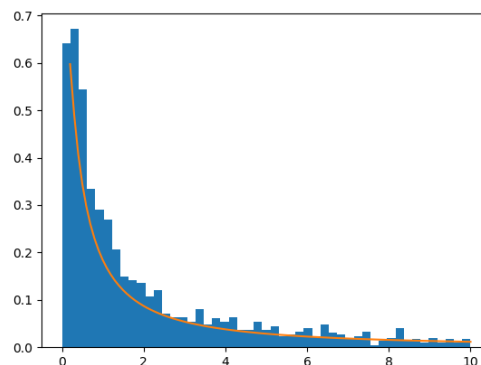
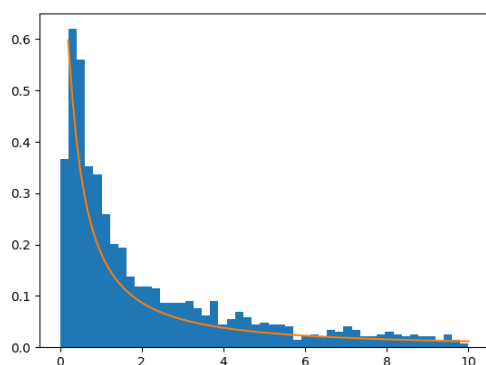
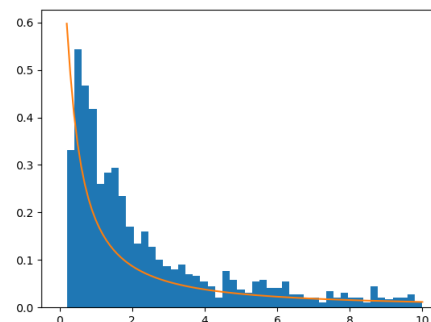
Montrer que φ_Z est la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z à densité.

- c) Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers Z .
C'est-à-dire, sauf éventuellement en quelques points $x \in \mathbb{R}$, $F_{Z_n}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F_Z(x)$.

5. • Simulation

- Vérifier que F_X définit une bijection de $[1; +\infty[$ dans $[0; 1[$. Soit G , la bijection réciproque.
- Soit U , une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $]0; 1[$. En considérant la variable $G(U)$, donner un programme qui permet de simuler la variable X . En déduire un programme **SimuZ** qui prend en argument n et simule la variable Z_n .
- Commenter le code et résultats suivants (pour $n = 2, n = 5, n = 20$).

```
def Mystere(n):
    m=2000
    Ech=np.zeros(m)
    for i in range(m):
        Ech[i]=simuZ(n)
    plt.hist(Ech,bins=np.linspace(0,10,20),density=True)
    x=np.linspace(0,10,100)
    y=(x)**(-3/2)*np.exp(-1/np.sqrt(x))/2
    plt.plot(x,y)
    plt.show()
```



Pour une version plus abordable, on pourra consulter l'exercice 2 : HEC MATHS III 2002 voie E

Exercice 4. ♦♦ Moments de la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$

- L'objectif est de cette question est de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme L_n tel que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_*^+, \quad \left(Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \Rightarrow \mathbf{E}(Y^n) = L_n(\lambda) \right) \quad (\bullet)$$

- Préciser L_1 et L_2 .
- On définit les polynômes $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ par :

$$Q_0 = 1 \quad \text{et pour tout } i \in \mathbb{N}^* \quad Q_i(x) = x(x-1) \cdots (x-i+1).$$

Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha_{0,n}, \alpha_{1,n}, \dots, \alpha_{n,n}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^n = \sum_{i=0}^n \alpha_{i,n} Q_i(x)$.

- Soient $i \in \mathbb{N}$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Préciser $\mathbf{E}(Q_i(Y))$.
- Vérifier que le polynôme défini par $L_n(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_{i,n} x^i$ est solution du problème $(\bullet)$.

2. Relation de récurrence.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que si on pose pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$, $\psi(\lambda) = e^\lambda L_n(\lambda)$ alors pour $\psi(\lambda) = \sum_{i=1}^{+\infty} i^n \frac{\lambda^i}{i!}$.

- b) En admettant que l'on puisse dériver ψ comme une somme finie, montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_*^+, \quad L_{n+1}(\lambda) = \lambda L'_n(\lambda) + \lambda L_n(\lambda).$$

Justifier que la relation précédente est valable pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

- c) En déduire l'égalité : $L_{n+1}(1) = \sum_{i=0}^n i \alpha_{i,n} + L_n(1)$.

3. Moments de la loi $\mathcal{P}(1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit l'endomorphisme : $\Delta : \begin{cases} \mathbb{R}_n[x] & \rightarrow \mathbb{R}_n[x] \\ P & \mapsto P(x+1) - P(x). \end{cases}$

- a) Expliciter $\Delta(x^n)$. Vérifier ensuite que : $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \Delta(Q_i) = i Q_{i-1}$.

- b) Justifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} x^i = \sum_{i=1}^n i \alpha_{i,n} Q_{i-1}(x).$$

En déduire que si $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$, alors $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \mathbf{E}(Y^i) = \sum_{i=0}^n i \alpha_{i,n}$.

- c) Conclure en montrant que

$$\mathbf{E}(Y^{n+1}) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \mathbf{E}(Y^i).$$

- d) Proposer un programme python qui prend en argument un entier n et renvoie la matrice ligne

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{E}(Y) & \mathbf{E}(Y^2) & \dots & \mathbf{E}(Y^n) \end{bmatrix}.$$

On pourra utiliser la commande `sp.binom(i,j)` de la bibliothèque `scipy.special` pour le coefficient $\binom{i}{j}$.

Éléments de solutions

1.a) On sait que si Y suit une loi de Poisson de paramètre λ alors $\mathbf{E}(Y) = \lambda$. De plus, par la formule de Koenig-Huygens

$$\mathbf{E}(Y^2) = \mathbf{V}(Y) + \mathbf{E}(Y)^2 = \lambda^2 + \lambda.$$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$L_1(x) = x \quad \text{et} \quad L_2(x) = x^2 + x$$

1.b) La famille $(Q_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ de $\mathbb{R}_n[x]$ est libre car échelonnée en degré. Comme il y a autant de vecteurs que la dimension de $\mathbb{R}_n[x]$, on a une base de $\mathbb{R}_n[x]$. En particulier, x^n est combinaison linéaire des $(Q_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$.

1.c) Soit $i \in \mathbb{N}$. Pour $k \geq i$

$$\begin{aligned} Q_i(k) \mathbf{P}(Y = k) &= \frac{k(k-1) \cdots (k-i+1)}{k!} e^{-\lambda} \lambda^k \\ &= \frac{\lambda^{k-i}}{(k-i)!} \cdot e^{-\lambda} \lambda^i. \end{aligned}$$

On en déduit la convergence de la série absolue

$$\sum Q_i(k) \mathbf{P}(Y = k)$$

à l'aide des séries exponentielles. Ainsi $Q_i(Y)$ admet une espérance et (théorème de transfert)

$$\mathbf{E}(Q_i(Y)) = \sum_{k \in \mathbb{N}} Q_i(k) \mathbf{P}(Y = k) = \sum_{k \geq i} Q_i(k) \mathbf{P}(Y = k).$$

À l'aide du changement d'indice $j = k - i$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Q_i(Y)) &= e^{-\lambda} \lambda^i \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \\ &= e^{-\lambda} \lambda^i e^{\lambda} = \lambda^i. \end{aligned}$$

1.d) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $Y \hookrightarrow \mathbf{P}(\lambda)$. Par linéarité de l'espérance

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y^n) &= \sum_{i=0}^n \alpha_{i,n} \mathbf{E}(Q_i(Y)) \\ &= \sum_{i=0}^n \alpha_{i,n} = \lambda^n - L_n(\lambda). \end{aligned}$$

Ce qui conclut.

2.a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. Par la formule de transfert

$$\begin{aligned} e^{\lambda} L_n(\lambda) &= e^{\lambda} \mathbf{E}(Y^n) \\ &= e^{\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} i^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \\ e^{\lambda} L_n(\lambda) &= \sum_{i=1}^{+\infty} i^n \frac{\lambda^i}{i!}. \end{aligned}$$

2.b) On a donc pour $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$

$$\begin{aligned} \psi'(\lambda) &= \sum_{i=1}^{+\infty} i^n \frac{\lambda^{i-1}}{i!} \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} i^{n+1} \frac{\lambda^{i-1}}{i!} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{+\infty} i^{n+1} \frac{\lambda^i}{i!}. \end{aligned}$$

Donc
$$\psi'(\lambda) = \frac{1}{\lambda} L_{n+1}(\lambda) e^{\lambda}.$$

Or, à partir de l'expression $\psi(\lambda) = e^{\lambda} L_n(\lambda)$, on a aussi

$$\begin{aligned} \psi'(\lambda) &= e^{\lambda} L_n(\lambda) + e^{\lambda} L_n(\lambda) \\ &= e^{\lambda} (L_n(\lambda) + L_n(\lambda)). \end{aligned}$$

On en déduit la première relation.

En particulier, le polynôme

$$L'_{n+1}(x) - x L'_n(x) - x L_n(x)$$

a une infinité de racines (tous les réels strictement positifs). C'est donc le polynôme nul et la relation s'étend bien à tout réel x .

2.c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$L_{n+1}(1) = L'_n(1) + L_n(1).$$

Or à partir de l'expression de la question 1.d)

$$L'_n(x) = \sum_{i=1}^n i \alpha_{i,n} x^{n-1}$$

D'où
$$L_n(1) = \sum_{i=1}^n i \alpha_{i,n} = \sum_{i=0}^n i \alpha_{i,n}.$$

Ce qui conclut.

3.a) Par la formule du binôme

$$\begin{aligned} \Delta(x^n) &= (x+1)^n - x^n \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i - x^n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} x^i. \end{aligned}$$

De plus, on a pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$\begin{aligned}
(\Delta Q_i)(x) &= Q_i(x+1) - Q_i(x) \\
&= \prod_{k=0}^{i-1} (x+1-k) - \prod_{k=0}^{i-1} (x-k) \\
&= \prod_{\ell=k-1}^{i-2} (x-\ell) - \prod_{k=0}^{i-1} (x-k) \\
&= (x+1) \prod_{k=0}^{i-2} (x-k) - \prod_{k=0}^{i-2} (x-k) \cdot (x-i+1) \\
&= \prod_{k=0}^{i-2} (x-k) (x+1 - (x-i+1)) \\
&= \prod_{k=0}^{i-2} (x-k) \cdot i \\
(\Delta Q_i)(x) &= i Q_{i-1}(x).
\end{aligned}$$

3.b) On a vu que

$$x^n = \sum_{i=0}^n \alpha_{i,n} Q_i(x)$$

par linéarité de Δ :

$$\begin{aligned}
\Delta(x^n) &= \sum_{i=0}^n \alpha_{i,n} \Delta(Q_i)(x) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_{i,n} \Delta(Q_i)(x) \quad (\text{car } \Delta(Q_0) = 0) \\
\Delta(x^n) &= \sum_{i=1}^n \alpha_{i,n} i Q_{i-1}(x).
\end{aligned}$$

D'où la première relation.

En particulier, pour $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} Y^i = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,n} i Q_{i-1}(Y).$$

Puis par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \mathbf{E}(Y^i) &= \sum_{i=1}^n \alpha_{i,n} i \mathbf{E}(Q_{i-1}(Y)) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_{i,n} i 1^{i-1} = \sum_{i=0}^n \alpha_{i,n} \cdot i.
\end{aligned}$$

3.c) D'après la question 2.c)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \mathbf{E}(Y^i) &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \mathbf{E}(Y^i) + \mathbf{E}(Y^n) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \mathbf{E}(Y^i) + L_n(1) \\
&= \sum_{i=0}^n i \alpha_{i,n} + L_n(1). \\
&= L_{n+1}(1) \quad (\text{question 2c})
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \mathbf{E}(Y^i) = \mathbf{E}(Y^{n+1}).$$

3.d) Un code possible :

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.special as sp
import numpy.random as rd

def B(n):
    B=np.ones(n+1)
    for i in range(1,n+1):
        s=0
        for j in range(i+1):
            s+=sp.binom(i-1,j)*B[j]
        B[i]=s
    return B

```