

DM 6 - sujet *

THÈME : ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES

Exponentielle d'un endomorphisme symétrique et décomposition polaire

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, un espace euclidien de dimension n . Dans la suite, on note :

- $\mathcal{S}(E)$: l'ensemble des endomorphismes symétriques de E .
- $\mathcal{S}(E)^{++}$: l'ensemble des endomorphismes symétriques de E définis positifs. C'est-à-dire

$$\varphi \in \mathcal{S}(E)^{++} \iff \varphi \in \mathcal{S}(E) \text{ et } \text{Sp}(\varphi) \subset \mathbb{R}_*^+.$$

- $\mathcal{O}(E)$: l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E :

$$s \in \mathcal{O}(E) \iff \forall u, v \in E, \quad \langle s(u), s(v) \rangle = \langle u, v \rangle.$$

- $\mathcal{S}_n^{++}$: l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives.
- $\mathcal{O}_n$: l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Préliminaires

1. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $s \in \mathcal{L}(E)$.

a) Justifier que $s \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si, pour tous $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\langle s(e_i), s(e_j) \rangle = \delta_{i,j}$.

b) En déduire que $s \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$ est orthogonale.

• Définition de l'exponentielle d'un endomorphisme

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(E)$.

2. Justifier qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ constituée de vecteurs propres de φ et des réels $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ tels que la matrice de φ dans $\mathcal{B}$ soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
On définit alors $\exp(\varphi)$ comme l'unique endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est $\text{diag}(\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n))$.
3. Montrer que φ et $\exp(\varphi)$ ont les mêmes espaces propres et que l'on définit bien ainsi un unique endomorphisme indépendamment du choix de la base $\mathcal{B}$.

• Propriétés de l'exponentielle

4. Justifier que $\exp(\varphi) \in \mathcal{S}(E)^{++}$. En déduire que $\exp(\varphi)$ est bijectif et que son application réciproque est $\exp(-\varphi)$.
5. a) Soit $s \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que $\psi = s \circ \varphi \circ s^{-1} \in \mathcal{S}(E)$.
b) Justifier que la famille image $\mathcal{B}_s = (s(e_1), \dots, s(e_n))$ est une base orthonormée de vecteurs propres pour ψ .
c) En déduire que $\exp(\psi) = s \circ \exp(\varphi) \circ s^{-1}$.

On pourra regarder la matrice de ces deux endomorphismes dans la base $\mathcal{B}_s$.

• Étude d'une application

On pose maintenant :

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{S}(E) & \rightarrow & \mathcal{S}(E)^{++} \\ \varphi & \mapsto & \exp(\varphi). \end{cases}$$

6. Justifier que Φ est surjective.
7. En considérant les espaces propres respectifs de φ et de $\exp(\varphi)$, montrer que Φ est injective.

• Décomposition polaire

Soient f , un isomorphisme de E et M sa matrice dans une base orthonormée $\mathcal{C}$ de E .

8. Vérifier que ${}^t M M \in \mathcal{S}_n^{++}$, puis justifier qu'il existe une unique matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ telle que ${}^t M M = S^2$.
9. On pose $O = M S^{-1}$. Vérifier que $O \in \mathcal{O}_n$.
10. En déduire l'existence et l'unicité d'un couple $(O, S) \in \mathcal{O}_n \times \mathcal{S}_n^{++}$ tel que $M = OS$.
11. Conclure en montrant qu'il existe un unique couple (ψ, φ) tel que :

$$\psi \in \mathcal{O}(E), \quad \varphi \in \mathcal{S}(E) \quad \text{et} \quad f = \psi \circ \exp(\varphi).$$

• Bonus :

Les questions sont indépendantes

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\exp(n \cdot \varphi)$ à l'aide uniquement de n et $\exp(\varphi)$.
13. Vérifier de plus que ${}^t M M$ est la matrice, dans la base canonique, de $\exp(2 \cdot \varphi)$.
14. Justifier qu'il existe un polynôme P tel que $\exp(\varphi) = P(\varphi)$.
Indication. On pourra s'aider des polynômes de Lagrange.

DM 6 - sujet A

THÈME : ENDOMORPHISMES ANTISYMMÉTRIQUES

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n , dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. L'objectif du problème est d'étudier les endomorphismes φ de E tels que

$$\forall x \in E, \quad \langle \varphi(x), x \rangle = 0.$$

Les endomorphismes vérifiant cette propriété sont appelés endomorphismes antisymétriques. On note $\mathcal{A}(E)$, l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de E .

- *Caractérisation matricielle*

Soit φ un endomorphisme de E .

1. Pour tout couple (x, y) de E^2 , développer $\langle \varphi(x+y), x+y \rangle$. En déduire l'équivalence entre :

$$\textbf{i)} \quad \varphi \in \mathcal{A}(E) \qquad \textbf{ii)} \quad \forall (x, y) \in E^2, \quad \langle \varphi(x), y \rangle = -\langle x, \varphi(y) \rangle.$$

2. On suppose dans cette question que la dimension n de E est non nulle. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E , et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice associée à φ relativement à la base $\mathcal{B}$.

a) Montrer : $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, m_{i,j} = \langle e_i, \varphi(e_j) \rangle$.

b) En déduire que φ est un endomorphisme antisymétrique si, et seulement si, la matrice M associée à φ relativement à la base $\mathcal{B}$ vérifie ${}^tM = -M$.

3. Justifier que $\mathcal{A}(E)$ est un espace vectoriel, préciser sa dimension.

- *Généralités*

Soit φ un endomorphisme antisymétrique non nul de E .

4. Soit λ un nombre réel. Montrer que si λ est valeur propre de φ , alors $\lambda = 0$.
5. Montrer que $\text{Im}(\varphi)$ et $\text{Ker}(\varphi)$ sont orthogonaux et supplémentaires dans E . En déduire que $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\varphi^2)$.
6. Montrer que φ^2 est un endomorphisme symétrique de E et que toute valeur propre de φ^2 est négative ou nulle.
7. a) Montrer que φ^2 admet au moins une valeur propre non nulle.
Soient x un vecteur propre de φ^2 associé à une valeur propre non nulle, et F le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x, \varphi(x))$.
b) Montrer que F est un plan vectoriel stable par φ .
c) Montrer que $F^\perp$, le supplémentaire orthogonal de F , est stable par φ .
d) On munit $F^\perp$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ défini pour tout couple (x, y) d'éléments de $F^\perp$ par $\langle x, y \rangle_1 = \langle x, y \rangle$.
On définit l'endomorphisme φ_1 de $F^\perp$ par :

$$\forall x \in F^\perp, \quad \varphi_1(x) = \varphi(x).$$

Montrer que φ_1 est un endomorphisme antisymétrique de $F^\perp$ et que $\text{Im}(\varphi) = F \oplus \text{Im}(\varphi_1)$.

8. Montrer que le rang d'un endomorphisme antisymétrique est pair.
On pourra faire une récurrence sur la dimension de E .
9. Peut-on exhiber un endomorphisme antisymétrique bijectif dans $\mathbb{R}^3$?

DM 6 - éléments de solution

Sujet A

1. Raisonnons par double implication.

→ Supposons **i)** vrai.Soient $x, y \in E$. Par bilinéarité du produit scalaire

$$0 = \langle \varphi(x+y), x+y \rangle = \langle \varphi(x), x \rangle + \langle \varphi(y), x \rangle \\ + \langle \varphi(y), y \rangle + \langle \varphi(x), y \rangle$$

Il reste :

$$0 = \langle \varphi(y), x \rangle + \langle \varphi(x), y \rangle.$$

L'énoncé **ii)** est vrai.→ Supposons **ii)**. En considérant $y = x$, on a

$$\langle \varphi(x), x \rangle = -\langle x, \varphi(x) \rangle = -\langle \varphi(x), x \rangle.$$

D'où $\langle \varphi(x), x \rangle = 0$. Finalement **i)** est vraie.2.a) Dans le cas d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ orthonormée, on sait que :

$$\forall u \in E, \quad \varphi(u) = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle e_i.$$

En particulier, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^n \langle \varphi(e_j), e_i \rangle e_i.$$

La i -ème coordonnée de $\varphi(e_j)$ est donc

$$\langle \varphi(e_j), e_i \rangle.$$

C'est aussi, par définition de la matrice de φ relativement à $\mathcal{M}$, le coefficient m_{ij} . D'où l'égalité

$$m_{i,j} = \langle \varphi(e_j), e_i \rangle.$$

2.b) On montre à partir de **ii)** que φ est antisymétrique si et seulement si

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \langle \varphi(e_i), e_j \rangle = -\langle e_i, \varphi(e_j) \rangle.$$

C'est-à-dire, si et seulement si :

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad m_{ji} = -m_{ij}$$

si et seulement si $M = {}^t M$.

3.

— $\mathcal{A}(E) \subset \mathcal{L}(E)$.— L'endomorphisme nul appartient à $\mathcal{A}(E)$;— Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\varphi, \psi \in \mathcal{A}(E)$. Pour tous $x, y \in E$

$$\langle (\lambda\varphi + \mu)(x), x \rangle \\ = \lambda \underbrace{\langle \varphi(x), x \rangle}_{=0} + \mu \underbrace{\langle \psi(x), x \rangle}_{=0} = 0.$$

D'où $\lambda\varphi + \mu\psi \in \mathcal{A}(E)$.On en déduit que $\mathcal{A}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, c'est un espace vectoriel.

On montre que l'application suivante est un isomorphisme.

$$\begin{cases} \mathcal{A}(E) & \longrightarrow & \mathcal{A}_n \\ \varphi & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \end{cases}$$

où $\mathcal{A}_n$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}$ une b.o.n de E .

On en déduit que

$$\dim \mathcal{A}(E) = \dim \mathcal{A}_n.$$

Or on montre que la famille de $\binom{n}{2}$ matrices :

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad i < j \quad E_{ij} - E_{ji}$$

est une base de $\mathcal{A}_n$. Concluons :

$$\dim \mathcal{A}(E) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

4. Soit x un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ .

$$\varphi(x) = \lambda x \quad \text{et} \quad x \neq 0_E.$$

Dès lors

$$0 = \langle \varphi(x), x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle \\ = \lambda \|x\|^2.$$

Comme $\|x\| \neq 0$, on a nécessairement $\lambda = 0$.5. Soient $y \in \text{Im } \varphi$ et $x \in \text{Ker } \varphi$. Il existe donc $z \in E$ tel que $y = \varphi(z)$. Avec la condition **ii)** de la question 1.

$$\langle y, x \rangle = \langle \varphi(z), x \rangle = -\langle z, \varphi(x) \rangle = \langle z, 0_E \rangle = 0.$$

On en déduit que $\text{Im } \varphi$ et $\text{Ker } \varphi$ sont bien orthogonaux. En particulier, ils sont en somme directe.

De plus, par la formule du rang :

$$\dim \text{Im } \varphi + \dim \text{Ker } \varphi = \dim E.$$

On sait alors que $\text{Im } \varphi$ et $\text{Ker } \varphi$ sont orthogonaux.

- On a toujours l'inclusion

$$\text{Ker } \varphi \subset \text{Ker } \varphi^2$$

car si $\varphi(x) = 0_E$ alors $\varphi \circ \varphi(x) = \varphi(0_E) = 0_E$.

- Établissons la réciproque. Soit $x \in \text{Ker } \varphi^2$. On a donc

$$\varphi(x) \in \text{Ker}(\varphi) \cap \text{Im}(\varphi).$$

Or cette intersection est réduite à $\{0_E\}$. Donc $\varphi(x) = 0_E$.

Finalement, on a bien l'égalité $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \varphi^2$.

6. Soient $x, y \in E$, avec la condition ii)

$$\begin{aligned}\langle \varphi^2(x), y \rangle &= -\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle \\ &= +\langle x, \varphi^2(y) \rangle.\end{aligned}$$

On en déduit que φ^2 est symétrique.

Si x est un vecteur propre de φ pour la valeur propre λ

$$\begin{aligned}\lambda \|x\|^2 &= \lambda \langle x, x \rangle = \langle \varphi^2(x), x \rangle \\ &= -\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = -\|\varphi(x)\|^2\end{aligned}$$

Comme $\|x\|^2 > 0$, on a bien $\lambda < 0$.

7.a) D'après le théorème spectral, on sait que le spectre n'est pas vide et que φ est diagonalisable. Si 0 est la seule valeur propre de φ , on en déduit que la matrice de φ dans une base de vecteurs propres est la matrice nulle. L'endomorphisme φ est alors nul alors que ce cas est exclu par hypothèse.

7.b) Soit $u \in \text{Vect}(x, \varphi(x))$. Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$u = \alpha x + \beta \varphi(x)$$

D'où

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \alpha \varphi(x) + \beta \varphi^2(x) \\ &= \alpha \varphi(x) + \beta \lambda x \in \text{Vect}(x, \varphi(x)).\end{aligned}$$

L'espace $\text{Vect}(x, \varphi(x))$ est bien stable par φ .

Justifions que F est bien un plan. Si tel n'est pas le cas, comme x est non nul, on en déduirait que $\varphi(x)$ est colinéaire à x . Autrement dit, x serait vecteur propre pour φ . Or, on a montré à la question 4 que la seule valeur propre est 0. On a ainsi $\varphi(x) = 0_E$, puis $\varphi^2(x) = 0_E$. Cas exclu par l'énoncé.

7.c) On recopie la preuve du cours : Rappelons que

$$F^\perp = \{v \in E \mid \forall u \in F, \langle u, v \rangle = 0\}.$$

Soit $v \in F^\perp$, montrons que $\varphi(v) \in F^\perp$.

Soit $u \in F$. L'endomorphisme φ étant antisymétrique

$$\langle \varphi(v), u \rangle = -\langle v, \varphi(u) \rangle = 0$$

car $v \in F^\perp$ et $\varphi(u) \in F$. Ainsi, pour tout $u \in F$, $\varphi(v)$ est orthogonal à u , c'est-à-dire $\varphi(v) \in F^\perp$. En conclusion, $F^\perp$ est stable par φ .

7.d) Soit $x \in F^\perp$. Comme $\varphi \in \mathcal{A}(E)$

$$\langle x, \varphi_1(x) \rangle_1 = \langle x, \varphi(x) \rangle = 0$$

Dès lors $\varphi_1 \in \mathcal{A}(F^\perp)$.

On a $E = F \oplus F^\perp$. Soit $z \in \text{Im } \varphi$. Il existe donc $y \in E$ tel que $z = \varphi(y)$. Ensuite, il existe $y_1 \in F$, $y_2 \in F^\perp$ tels que $y = y_1 + y_2$. D'où

$$\begin{aligned}z &= \varphi(y_1 + y_2) = \varphi(y_1) + \varphi(y_2) \\ &= \varphi(y_1) + \varphi_1(y_2)\end{aligned}$$

On a $\varphi(y_1) \in F$ (stabilité de F par φ) et $\varphi_1(y_2) \in \text{Im } \varphi_1$. On en déduit que

$$\text{Im } \varphi \subset F + \text{Im } \varphi_1.$$

Réciproquement, si $z \in F + \text{Im } \varphi_1$, il existe $y \in F$ et $\varphi_1(y_2) \in \text{Im } \varphi_1$ tels que

$$z = y + \varphi_1(y_2) = y + \varphi(y_2)$$

Or il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $y = \alpha x + \varphi(x)$.

Comme x est vecteur propre pour cette valeur propre non nulle

$$x = \varphi^2(x/\lambda) \quad (\lambda \neq 0)$$

et

$$y = \varphi\left(\frac{\alpha}{\lambda} \varphi(x) + x\right)$$

et

$$z = \varphi\left(\frac{\alpha}{\lambda} \varphi(x) + x + y_2\right) \in \text{Im } \varphi.$$

On a prouvé l'inclusion

$$F + \text{Im } \varphi_1 \subset \text{Im } \varphi.$$

Par double inclusion

$$F + \text{Im } \varphi_1 = \text{Im } \varphi.$$

De plus $\text{Im } \varphi_1 \subset F^\perp$ et $F, F^\perp$ sont en somme directe donc

$$F \oplus \text{Im } \varphi_1 = \text{Im } \varphi.$$

8. Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "pour tout endomorphisme antisymétrique de E , de dimension inférieure à n , le rang est pair" est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

→ *Initialisation*. Pour $n = 1$, le seul endomorphisme de E qui soit antisymétrique est l'endomorphisme nul. Qui est de rang 0. $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

→ *Hérédité*. Supposons $\mathbf{P}(n)$ vraie. Soit φ est endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de dimension $n + 1$. Si φ est l'endomorphisme nul, le résultat est clair. Sinon, on peut considérer une valeur propre non nulle et d'après ce qui précède, on dispose d'une décomposition du type

$$E = F \oplus F^\perp$$

où F est un plan. La restriction φ_1 de φ à $F^\perp$ est donc un endomorphisme antisymétrique de $F^\perp$. Comme $\dim F^\perp = n - 1 \leq n$, on peut affirmer par hypothèse de récurrence que le rang de φ_1 est pair. Or

$$\text{rg}(\varphi) = \dim(F) + \text{rg}(\varphi_1)$$

est donc aussi un entier pair.

$\mathcal{P}(n + 1)$ est vérifiée.

→ *Conclusion*. Tout endomorphisme antisymétrique d'un espace euclidien est de rang pair.

9. Non car dans ce cas $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}^3$ et le rang est impair. Impossible.