DS 5 - sujet A

THÈMES : VECTEURS ALÉATOIRES, VARIABLES À DENSITÉ

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Problème I : Théorème de Weierstrass dans le cas $\mathscr{C}^1$

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$.

1. Justifier qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $(x,y) \in [0;1]^2$, $\quad \left|f(x)-f(y)\right| \leqslant M|x-y|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction P_n par

$$P_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) t^k (1-t)^{n-k}. \end{cases}$$

Soient $p \in [0;1]$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires de même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ et indépendantes.

2. a) Rappeler la loi de $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Préciser son espérance et sa variance.

b) Vérifier que si on note $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$, alors $\mathbf{V}\left(\overline{X}_n\right) \leqslant \dfrac{1}{4n}$.

3. Montrer que $\mathbf{E}\left(f\left(\overline{X}_n\right)\right) = P_n(p)$. En déduire que

$$P_n(p) - f(p) = \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(p)\right)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$. On note :

- $A_{1,\varepsilon}$ l'ensemble des entiers $k \in [\![0;n]\!]$ tels que $|k/n - p| < \varepsilon/M$;
- $A_{2,\varepsilon}$ l'ensemble des entiers $k \in [\![0;n]\!]$ tels que $|k/n - p| \geqslant \varepsilon/M$.

En particulier, on obtient $P_n(p) - f(p) = S_{1,\varepsilon} + S_{2,\varepsilon}$ où

$$\forall i \in \{1;2\}, \quad S_{i,\varepsilon} = \sum_{k \in A_{i,\varepsilon}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(p)\right)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

4. Démontrer que $\left|S_{1,\varepsilon}\right| \leqslant \varepsilon$. Vérifier ensuite que $\left|S_{2,\varepsilon}\right| \leqslant 2M\mathbf{P}\left(\left|\overline{X}_n - p\right| \geqslant \varepsilon/M\right)$.

5. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \mathbf{P}\left(\left|\overline{X}_n - p\right| \geqslant \varepsilon/M\right) \leqslant M^2/(4n\varepsilon^2)$.

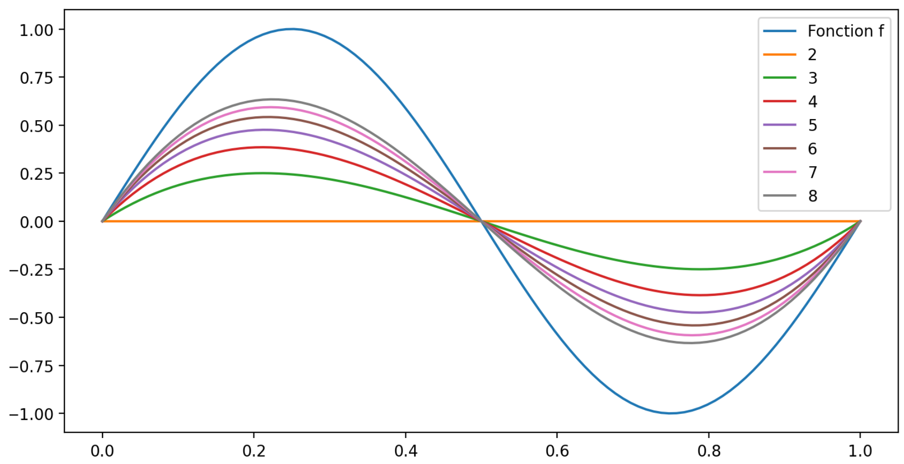
6. Donner les variations de la fonction sur $]0;1[$, $\varphi : t \mapsto t + M^2/(4n^2t^2)$. Avec un bon choix de ε, conclure en montrant que

$$\sup_{x \in [0;1]} \left|f(x) - P_n(x)\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- *Illustration avec Python*

7. Écrire un programme qui prend en arguments un réel t, un entier naturel n, une fonction f définie sur $[0;1]$ et renvoie $P_n(t)$ où P_n est défini à la question 1.
On pourra utiliser la commande **sp.binom(i,j)** *de la bibliothèque* **scipy.special** pour le coefficient $\binom{i}{j}$.

8. Proposer un code pour afficher sur le même graphe, la courbe de $f : t \in [0;1] \mapsto \sin(2\pi t)$, et les courbes de P_i pour $i \in [\![2;8]\!]$.



Problème II : Sommes et maxima de variables aléatoires

Dans tout le problème, λ désigne un réel strictement positif. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mutuellement indépendantes, suivant toutes la même loi exponentielle de paramètre λ.
Pour tout p de $\mathbb{N}^*$, on définit les variables aléatoires M_p et S_p par :

$$M_p = \max(X_1,\dots,X_p) \quad \text{et} \quad S_p = \sum_{k=1}^{p} X_k.$$

Le problème est composé de 5 parties. Les parties I, II et III sont indépendantes. Les parties IV et V utilisent les résultats de la partie III.

Partie I : simulations

9. Écrire un programme qui prend en arguments le paramètre λ et un entier naturel non nul p et simule les variables M_p et S_p.
On rappelle que la commande `rd.exponential(a,m)` *renvoie une matrice ligne avec* `m` *simulations d'une loi exponentielle d'espérance* `a`.

10. Proposer un programme qui prend en arguments λ, p et donne une approximation de la probabilité $\mathbf{P}(2M_p > S_p)$.

Partie II : loi de M_p

- *Exemple avec* M_2

11. **a)** Expliciter une densité f_θ d'une loi exponentielle de paramètre $\theta \in \mathbb{R}_*^+$.
b) Démontrer que la variable aléatoire M_2 est à densité et vérifier qu'une densité est donnée par $2f_\lambda - f_{2\lambda}$.

12. En déduire que la variable aléatoire M_2 admet une espérance que l'on calculera.

13. Rappeler le moment d'ordre 2 d'une loi exponentielle. En déduire l'existence de la variance $\mathrm{Var}(M_2)$ et la calculer.
On pourra utiliser la 11.b pour limiter les calculs.

- *Application du théorème de sommation*

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \times \mathbb{R}$.

14. Démontrer que la variable aléatoire $aX_2 + b$ admet une densité définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad h_{a,b}(t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{a} e^{-\frac{\lambda}{a}(t-b)} & \text{si } t \geqslant b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

15. On note $T = X_1 + aX_2 + b$.
a) Rappeler l'énoncé du théorème de sommation de deux variables aléatoires à densité.
b) Démontrer que T admet une densité définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_T(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{1-a}\left(e^{-\lambda(x-b)} - e^{-\frac{\lambda}{a}(x-b)}\right) & \text{si } x \geqslant b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

16. **a)** Soient $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ avec $r_1 \neq r_2$. Posons $g_i : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \exp(r_i t)$. Montrer que la famille $(g_1; g_2)$ est une famille libre de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

b) En déduire que $(1/2;0)$ est l'unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \times \mathbb{R}$ tel que M_2 et T suivent la même loi.

- *Généralisation*
  Considérons la variable aléatoire :
$$T_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} X_k.$$

17. Calculer $\mathbf{E}(T_p)$ et $\mathbf{V}(T_p)$. En déduire la nature (convergence ou divergence) des suites $(\mathbf{E}(T_p))_p$ et $(\mathbf{V}(T_p))_p$.

18. Démontrer que T_p admet une densité définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_{T_p}(x) = \begin{cases} \lambda p e^{-\lambda x}\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{p-1} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

19. Justifier que T_p et M_p ont même loi.

Partie III : préliminaires

- *Résultat préliminaire 1*
  Soient X et Y deux variables aléatoires à densité, indépendantes, dont les densités respectives f_X et f_Y sont nulles sur $]-\infty;0[$ et continues sur $[0;+\infty[$. On note F_X et F_Y leurs fonctions de répartition respectives.

20. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_X(t) f_Y(t)\,dt$ est convergente.

On admet dans la suite l'égalité :
$$\mathbf{P}(X \leqslant Y) = \int_0^{+\infty} F_X(t) f_Y(t)\,dt.$$

- *Résultat préliminaire 2*

21. Dans cette question, x désigne un nombre réel strictement compris entre -1 et 1.

a) Justifier la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 1} x^k/k$.

b) Vérifier, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0,1[$, l'égalité : $\dfrac{1}{1-t} = \dfrac{t^m}{1-t} + \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} t^k$.

c) Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{t^m}{1-t}\,dt$ tend vers 0 quand l'entier m tend vers l'infini.

d) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} x^k/k = -\ln(1-x)$.

22. Montrer que : $\forall x \in]-1;1[, \qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\ln(1-x)$.
On pourra commencer par déterminer deux réels a, b tels que $1/\big(n(n+1)\big) = a/n + b/(n+1)$.

Partie IV : Comparaison entre M_n et S_n

Soient U et V deux autres variables aléatoires à densité, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, admettant des densités continues sur $\mathbb{R}^+$ et telles que les variables X_1, U, V sont mutuellement indépendantes.

23. Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{P}(X_1 > u+v) = \mathbf{P}(X_1 > u)\,\mathbf{P}(X_1 > v)$.

24. **a)** À l'aide du préliminaire 1, calculer $\mathbf{P}(X_1 \leqslant U)$. En déduire que
$$\mathbf{P}(X_1 > U) = \mathbf{E}\left(e^{-\lambda U}\right).$$

b) Calculer cette probabilité si l'on suppose que U suit la loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$.

25. Montrer : $\mathbf{P}(X_1 > U+V) = \mathbf{P}(X_1 > U)\,\mathbf{P}(X_1 > V)$.

26. En déduire l'égalité : $\mathbf{P}(2X_1 > S_n) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

27. Montrer que les événements $[2X_1 > S_n]$, $[2X_2 > S_n]$, ..., $[2X_n > S_n]$ sont deux à deux incompatibles.

28. En déduire la valeur de $\mathbf{P}(2M_n > S_n)$.

Partie V

Dans la suite on considère une autre variable aléatoire Y, suivant elle-aussi la loi exponentielle de paramètre λ, indépendante des variables aléatoires X_n, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
On définit ensuite la variable aléatoire N égale au plus petit entier n tel que $X_n > Y$, et on pose $N = 0$ si un tel entier n n'existe pas.

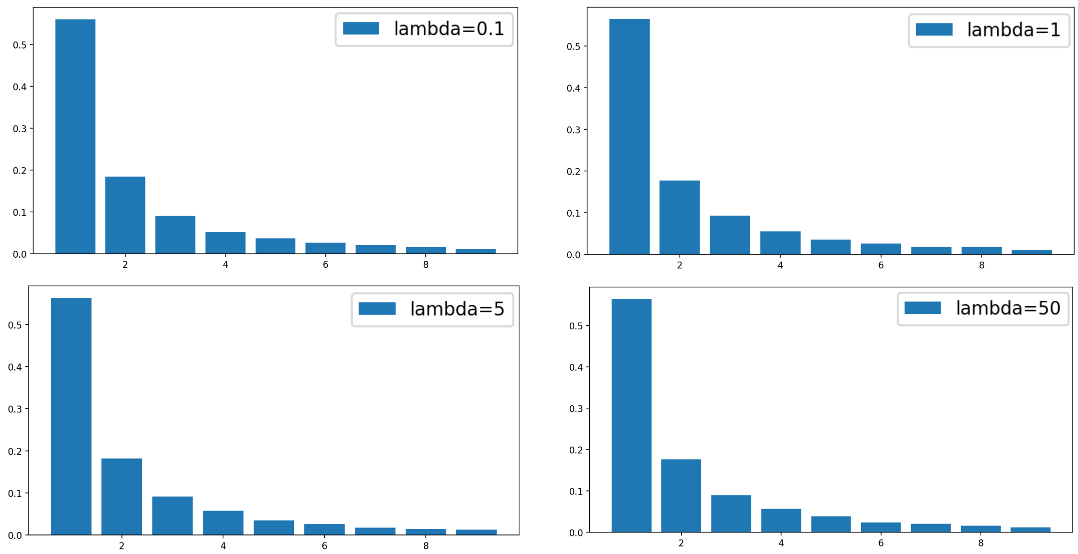
- *Simulation*

29. Compléter la fonction suivante qui permet de simuler la variable N.

Editeur
```
def simuN(lbda):
    n=1
    Y= ...
    X= ...
    while ... :
        n= ...

        X= ...
    return ...
```

30. Voici de nouveaux tests pour différentes valeurs du paramètre λ. Que peut-on conjecturer sur la loi de N ? Prouver votre conjecture.
On pourra utiliser le fait que si $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ *alors* $\lambda X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$.



- *Loi de* N

31. Justifier que $[N = 0] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} [M_n \leqslant Y]$.

32. Rappeler la fonction de répartition de M_n. En utilisant le préliminaire, déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(M_n \leqslant Y) = 1/(n+1)$.

33. En déduire $\mathbf{P}(N = 0)$.

34. **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer l'événement $[N > n]$ à l'aide d'événements faisant intervenir M_n et Y. En déduire $\mathbf{P}(N > n)$.
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(N = n) = \frac{1}{n(n+1)}$.
c) La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

- *La variable* X_N

Dans la suite du sujet, on s'intéresse à la variable aléatoire X_N, définie pour tout ω de Ω par : $X_N(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$.

35. Soient $t \in \mathbb{R}_*^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Justifier : $\mathbf{P}\big([N = n] \cap [X_N \leqslant t]\big) = \mathbf{P}(M_{n-1} \leqslant Y < X_n \leqslant t)$.
b) On admet que

$$\mathbf{P}(M_{n-1} \leqslant Y < X_n \leqslant t) = \int_{x=0}^{t} \left(\int_{y=0}^{x} \left(\int_{m=0}^{y} f_{M_{n-1}}(m)\mathrm{d}m \right) f_Y(y)\mathrm{d}y \right) f_{X_n}(x)\mathrm{d}x,$$

où $f_{M_{n-1}}$, f_Y et f_{X_n} désignent une densité respectivement de M_{n-1}, Y et X_n. Vérifier alors que

$$\mathbf{P}\big([N = n] \cap [X_N \leqslant t]\big) = \frac{1}{n(n+1)}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^{n+1}.$$

36. À l'aide du préliminaire 2, déduire la fonction de répartition de X_N.

37. Montrer ensuite que X_N est une variable aléatoire à densité et donner une densité de X_N.

38. Justifier que l'espérance de X_N existe et la calculer.

39. Proposer un programme Python permettant de vérifier la cohérence de votre résultat.

– FIN –

DS 5 - sujet *

THÈMES : VECTEURS ALÉATOIRES, VARIABLES À DENSITÉ

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

PROBLÈME : CAUCHY, CAUCHY ET ENCORE CAUCHY !

L'objectif de ce problème est d'établir quelques résultats classiques autour des lois de Cauchy. Les parties

Préliminaires

- *La fonction arctangente*

1. Rappeler la définition de la fonction arctangente. Donner son graphe avec l'équation de la tangente en 0.

2. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$. Que dire de cette expression si $x \in \mathbb{R}_*^-$?

3. Justifier le développement suivant lorsque $x \to +\infty$: $\quad \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

- *Loi de Cauchy*

4. Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_a par : $f_a(x) = \dfrac{a}{\pi\left(a^2 + x^2\right)}$. Montrer que f_a est une densité de probabilité.

Dans la suite, X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ admettant f_a pour densité. On dit alors que X suit une loi de Cauchy de paramètre a et on écrit $X \hookrightarrow \mathscr{C}(a)$.

5. Donner la fonction de répartition de X. Est-ce que X possède une espérance ?

6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. Reconnaître la loi de λX lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{C}(a)$. Que dire si $\lambda \in \mathbb{R}_*^-$?

Partie I. Maximum et exemple de convergence en loi

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Cauchy de paramètre 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les variables aléatoires :

$$M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad N_n = n{M_n}^{-1}.$$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, préciser $\mathbf{P}(N_n \leqslant 0)$. Vérifier ensuite que pour tout $t \in \mathbb{R}_*^+$

$$\mathbf{P}\big([N_n \leqslant t] \cap [M_n \geqslant 0]\big) = 1 - \frac{1}{\pi^n}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{n}{t}\right)\right)^n.$$

8. Conclure en montrant que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$F_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} G(x),$$

où F_n et G désignent respectivement la fonction de répartition de N_n et d'une loi exponentielle dont on précisera le paramètre θ.

9. Utiliser la question 6, pour reprendre la question précédente en supposant maintenant que les variables $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ suivent une loi de Cauchy $\mathscr{C}(a)$ avec $a \in \mathbb{R}_*^+$.

Partie II. Sommes de lois de Cauchy, stabilité au sens de Lévy

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ avec

$$X \hookrightarrow \mathscr{C}(1) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathscr{C}(b) \quad \text{où } b \in \mathbb{R}_*^+.$$

10. Soient x et t deux réels. On pose $c = \left(x^2 + (b+1)^2\right)\left(x^2 + (b-1)^2\right)$. Montrer que :

$$\frac{c}{\left((t-x)^2+1\right)\left(t^2+b^2\right)} = x\left(\frac{2t}{t^2+b^2} - \frac{2(t-x)}{(t-x)^2+1}\right) + \frac{x^2+b^2-1}{(t-x)^2+1} + \frac{x^2-b^2+1}{t^2+b^2}$$

11. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\int_{-A}^{A} \frac{2t}{t^2+b^2} - \frac{2(t-x)}{(t-x)^2+1}\,\mathrm{d}t \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+b^2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{b}.$$

12. En déduire que $X+Y \hookrightarrow \mathscr{C}(1+b)$

13. Généraliser en montrant que si X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ avec $X \hookrightarrow \mathscr{C}(\alpha)$, $Y \hookrightarrow \mathscr{C}(\beta)$ alors
$$X+Y \hookrightarrow \mathscr{C}(\alpha+\beta).$$

- *Stabilité au sens de Lévy*
Une variable aléatoire est dite L-stable si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et toutes variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n$ suivant la même loi que X, il existe des réels a_n (avec $a_n > 0$) et b_n tels que $\sum_{k=1}^{n} X_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suive la même loi que $a_n X + b_n$.

14. Justifier que si $X \hookrightarrow \mathscr{C}(\alpha)$ alors X est une variable L-stable.

Quotient de deux lois normales

Soient N et N′ deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, suivant une loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0;1)$.

15. Montrer que la variable aléatoire $Z = \ln|N|$ est une variable aléatoire à densité, et en déterminer une densité. Quelle est une densité de la variable aléatoire $-Z$?

16. Montrer qu'une densité h de la variable aléatoire $\ln|N/N'|$ est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad h(x) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$.

17. **a)** En déduire que la fonction de répartition de $U = |N/N'|$ est donnée par $F_U(x) = 2\arctan(x)/\pi \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$.
b) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}(N/N' = x) = 0$. En remarquant que N et −N ont même loi, en déduire que $G(x) + G(-x) = 1$ où G désigne la fonction de répartition de N/N′.
c) Conclure en montrant que $N/N' \hookrightarrow \mathscr{C}(1)$.

- *Simulation*

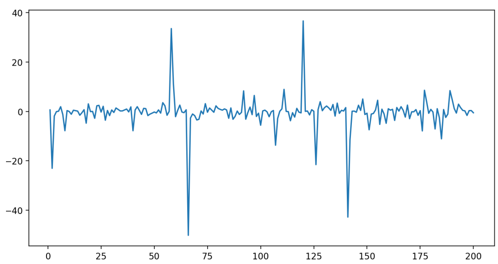
18. **a)** En déduire une fonction python `Cauchy` qui simule une variable de Cauchy $\mathscr{C}(1)$.
Pour rappel, la commande `rd.normal(0,1)` *renvoie une réalisation d'une loi normale centrée réduite.*
b) Comment modifier la fonction `Cauchy` pour prendre en arguments $m \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et renvoyer m simulation d'une loi de Cauchy $\mathscr{C}(\lambda)$?

19. Proposer un programme python qui permet de vérifier la stabilité par somme de la question 13.

20. Qu'illustre le code suivant ?

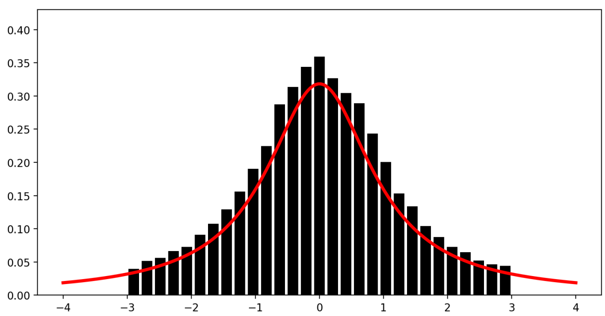
Editeur
```
m=200
M=np.zeros(m)
for n in range(m):
    M[n]=np.mean(Cauchy(1,(n+1)**2))

plt.plot(np.linspace(1,m,m),M)
plt.show()
```



21. **a)** À l'aide du code suivant, que peut-on conjecturer sur la loi de $1/X$ si $X \hookrightarrow \mathscr{C}(1)$?

Editeur
```
plt.clf()
X=np.zeros(50000)
for iter in range(50000):
    X[iter]=1/Cauchy()
plt.hist(X,np.linspace(-3,3,30),density=
    True,rwidth=0.8,color='k')
x=np.linspace(-4,4,200)
plt.plot(x,1/(np.pi*(1+x**2)),linewidth=3,
    color='r')
plt.show()
```



b) Prouver la conjecture.

Étude de $\ln(|X|)$ où $X \hookrightarrow \mathscr{C}(a)$

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{C}(a)$. On pose $Z = \ln|X|$. D'après ce qui précède, on montre que Z est une variable aléatoire à densité et une densité est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h_a(x) = \frac{2a}{\pi}\,\frac{e^x}{e^{2x}+a^2}.$$

22. Justifier que Z a une espérance et en posant $t = e^x$, montrer que

$$\mathbf{E}(Z) = \frac{2a}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+a^2}\,dt.$$

23. À l'aide d'un changement de variable, vérifier que

$$\int_0^1 \frac{\ln v}{v^2+1}\,dv = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln w}{w^2+1}\,dw.$$

En déduire que $\mathbf{E}(Z) = \ln a$.

24. À l'aide de la question 19, retrouver le fait que $\mathbf{E}\big(\ln(|S|\big) = 0$ où $S \hookrightarrow \mathscr{C}(1)$ puis $\mathbf{E}(Z) = \ln a$.

Calcul de $\zeta(2) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

- Soient X et Y sont deux variable aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ toutes deux suivants une loi de Cauchy de paramètre 1. On pose $T = \ln|XY|$ et $h = h_1$.

25. Justifier que T est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction g dont la restriction sur $\mathbb{R}^*$ est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad g(x) = \frac{4x}{\pi^2\,(e^x - e^{-x})}.$$

On pourra faire le changement de variable $y = e^{2t}$ *et remarquer que* $\frac{1}{(y+1)(y+e^{2x})} = \frac{1}{e^{2x}-1}\left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+e^{2x}}\right)$.

26. Vérifier que g est prolongeable par continuité en 0 et donner $g(0)$.

27. À partir de l'égalité $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 1$, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt = \frac{\pi^2}{4} \quad \text{puis} \quad \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt = \frac{\pi^2}{8}.$$

Pour tout $x \in \,]0;1[$, $\varphi(x) = \dfrac{x\ln x}{x-1}$.

28. Montrer que φ est prolongeable par continuité sur $[0;1]$. On note encore φ, le prolongement. Vérifier ensuite que

$$\int_0^1 t^{2n+1}\frac{\varphi(t)}{t+1}\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

29. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \,]0;1[$. Vérifier que :

$$\frac{\ln t}{t^2-1} = -\sum_{k=0}^{n}\left(t^{2k}\ln t\right) + \frac{\varphi(t)\,t^{2n+1}}{t+1}.$$

En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

30. En regroupant les termes d'indices pairs et impairs, en déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Médiane d'un échantillon de loi de Cauchy

On suppose que $X \hookrightarrow \mathscr{C}(1)$. Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_{2n+1})$, $(2n+1)$ variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi que X. On admet l'existence de $(2n+1)$ fonctions $g_1, g_2, \ldots, g_{2n+1}$ continues sur $\mathbb{R}^{2n+1}$ à valeurs réelles, telles que les variables aléatoires réelles $\widehat{X}_1,$, $\widehat{X}_2$, …, $\widehat{X}_{2n+1}$ définies par :

$$\forall\forall k \in [\![1;2n+1]\!], \qquad \widehat{X}_k = g_k(X_1, X_2, \ldots, X_{2n+1}).$$

Soient des variables aléatoires à densité et que pour tout $\omega \in \Omega$, les réels $\widehat{X}_1(\omega), \widehat{X}_2(\omega), \ldots, \widehat{X}_{2n+1}(\omega)$ soient un réarrangement par ordre croissant de $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, …, $X_{2n+1}(\omega)$:

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad \widehat{X}_1(\omega) \leqslant \widehat{X}_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant \widehat{X}_{2n+1}(\omega).$$

Dans ce cas, on dit que la variable aléatoire $\widehat{X}_{n+1}$ est la médiane empirique de l'échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_{2n+1})$.

Pour tout réel x et tout entier k de $[\![1;n]\!]$, on note $N_k(x)$ la variable aléatoire de Bernoulli définie par

$$N_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } [X_k \leqslant x] \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{si } [X_k > x] \text{ est réalisé.} \end{cases}$$

31. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} N_k(x)$?

32. Justifier l'égalité entre événements suivante : $[\widehat{X}_k \leqslant x] = [S_n(x) \geqslant k]$.

33. Établir la relation : pour tout x réel,

$$F_{\widehat{X}_k}(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F_X(x))^j (1 - F_X(x))^{n-j}.$$

34. Montrer que $\widehat{X}_{n+1}$ admet une densité $f_{\widehat{X}_{n+1}}$ donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_{\widehat{X}_{n+1}}(x) = (n+1)\binom{2n+1}{n} (F_X(x))^n (1 - F_X(x))^n f_X(x).$$

35. Établir l'équivalent :

$$f_{\widehat{X}_{n+1}}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} (n+1)\binom{2n+1}{n} \frac{1}{\pi^{n+1}} \times \frac{1}{x^{n+2}}.$$

36. En déduire l'existence de l'espérance $\mathbf{E}(\widehat{X}_{n+1})$ de la variable aléatoire $\widehat{X}_{n+1}$.

37. Calculer $\mathbf{E}(\widehat{X}_{n+1})$.

38. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose :

$$W_{n+1} = \frac{2\sqrt{2n+1}}{\pi} \widehat{X}_{n+1}.$$

On note $f_{W_{n+1}}$ la densité continue sur $\mathbb{R}$ de W_{n+1}. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*, \qquad f_{W_{n+1}}(x) = \frac{n+1}{2\sqrt{2n+1}} \binom{2n+1}{n} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \left(\arctan\left(\frac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}} \right) \right)^2 \right]^n \times \left(1 + \frac{\pi^2 x^2}{4(2n+1)} \right)^{-1}.$$

39. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a :

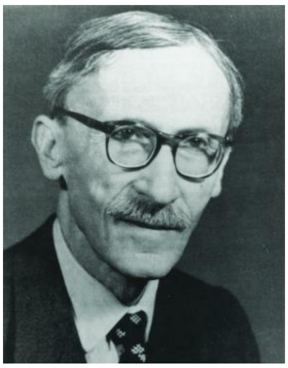
$$f_{W_{n+1}}(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} \right).$$

Ce résultat implique ce qu'on appellera la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(W_{n+1})_{n \geqslant 2}$ vers une variable aléatoire T qui suit la loi normale centrée réduite.

40. **a)** Écrire un programme qui prend en arguments $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoie une simulation de $\widehat{X}_{n+1}$.
Indication. On pourra utiliser la commande `np.sort(A)` *qui prend en argument une matrice ligne et renvoie une matrice mais avec les coefficients de* `A` *ordonnés par ordre croissant.*

b) Écrire un programme qui prend en argument n construit un histogramme associé à 2000 réalisations de W_{n+1} et superpose une densité de la loi normale centrée réduite.

Bonus Reconnaître Augustin Cauchy et Paul Lévy. L'un des deux a été étudiant à Saint-Louis, lequel ?



– FIN –

DS 5 A - solution

Bonus à chaque cokille trouvée!

Problème 1

1. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, f' est continue sur le segment $[0;1]$ et la quantité

$$\mathrm{M} = \max_{t\in[0;1]} |f'(t)| \in \mathbb{R}^+$$

est bien définie. La suite résulte de l'inégalité des accroissements finis.

2.a) Comme les variables X_i sont indépendantes et suivent toutes une même loi $\mathscr{B}(p)$, on sait que

$$\mathrm{S}_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n;p).$$

En particulier

$$\mathbf{E}(\mathrm{S}_n) = np \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathrm{S}_n) = np(1-p).$$

2.b) On a

$$\begin{aligned}\mathbf{V}\left(\overline{\mathrm{X}}_n\right) &= \frac{1}{n^2}\mathbf{V}(\mathrm{S}_n)\\ &= \frac{1}{n^2}\mathbf{V}(\mathrm{S}_n) = \frac{p(1-p)}{n}.\end{aligned}$$

Or on sait que pour tout $p\in[0;1]$, $p(1-p)\leqslant \frac{1}{4}$, car

$$\frac{1}{4} - p(1-p) = \frac{1}{4} - p + p^2 = \left(\frac{1}{2}-p\right)^2 \geqslant 0.$$

D'où le résultat.

3. On a

$$\mathbf{E}\left(f\left(\overline{\mathrm{X}}_n\right)\right) = \mathbf{E}\left(f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right) = \mathbf{E}\left(g(\mathrm{S}_n)\right)$$

où on a posé pour $t\in[0;1]$, $g(t) = f(t/n)$. Par la formule de transfert

$$\mathbf{E}\left(g(\mathrm{S}_n)\right) = \sum_{k=0}^{n} g(k)\mathbf{P}(\mathrm{S}_n = k) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbf{P}(\mathrm{S}_n = k).$$

Le résultat s'en déduit car $\mathrm{S}_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n;p)$.

- Comme $([\mathrm{S}_n = k])_{k\in[\![0;n]\!]}$ est un système complet d'événements, on sait que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(\mathrm{S}_n = k) = 1.$$

(on peut aussi utiliser la formule du binôme). Dès lors

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(p)\right)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} - f(p)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= \mathrm{P}_n(p) - f(p).\end{aligned}$$

4. À partir de l'inégalité triangulaire et de la question 1

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{S}_{1,\varepsilon}\right| &\leqslant \sum_{k\in\mathrm{A}_{1,\varepsilon}} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(p)\right|\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &\leqslant \sum_{k\in\mathrm{A}_{1,\varepsilon}} \mathrm{M}\left|\frac{k}{n} - p\right|\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &\leqslant \sum_{k\in\mathrm{A}_{1,\varepsilon}} \varepsilon\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ \left|\mathrm{S}_{1,\varepsilon}\right| &\leqslant \varepsilon\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \varepsilon\times 1.\end{aligned}$$

- On a aussi

$$\left|\mathrm{S}_{2,\varepsilon}\right| \leqslant \sum_{k\in\mathrm{A}_{2,\varepsilon}} \mathrm{M}\left|\frac{k}{n} - p\right|\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Or $\left(\left[\overline{\mathrm{X}}_n = k/n\right]\right)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est un système complet d'événements

$$\begin{aligned}\left[\left|\overline{\mathrm{X}}_n - p\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}\right] &= \bigsqcup_{k=0}^{n}\left[\left|\overline{\mathrm{X}}_n - p\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}\right]\cap\left[\overline{\mathrm{X}}_n = \frac{k}{n}\right]\\ &= \bigsqcup_{k=0}^{n}\left[\left|\frac{k}{n} - p\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}\right]\cap\left[\overline{\mathrm{X}}_n = \frac{k}{n}\right]\\ &= \bigsqcup_{k\in\mathrm{A}_{2,\varepsilon}}\left[\overline{\mathrm{X}}_n = \frac{k}{n}\right].\end{aligned}$$

On en déduit par union disjointe :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\left|\overline{\mathrm{X}}_n - p\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}\right) &= \sum_{k\in\mathrm{A}_{2,\varepsilon}}\mathbf{P}\left(\overline{\mathrm{X}}_n = \frac{k}{n}\right).\\ &= \sum_{k\in\mathrm{A}_{2,\varepsilon}}\mathbf{P}(\mathrm{S}_n = k).\end{aligned}$$

De plus, en majorant

$$\left|\frac{k}{n} - p\right| \leqslant \left|\frac{k}{n}\right| + p \leqslant 2,$$

on obtient bien

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{S}_{2,\varepsilon}\right| &\leqslant 2\mathrm{M}\sum_{k\in\mathrm{A}_{2,\varepsilon}}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &\leqslant 2\mathrm{M}\sum_{k\in\mathrm{A}_{2,\varepsilon}}\mathbf{P}(\mathrm{S}_n = k).\\ &\leqslant 2\mathrm{M}\quad\mathbf{P}\left(\left|\overline{\mathrm{X}}_n - p\right| \geqslant \varepsilon/\mathrm{M}\right).\end{aligned}$$

5. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\mathbf{P}\left(\left|\overline{X}_n - p\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{M}\right) \leqslant \frac{\mathbf{V}\left(\overline{X}_n\right)}{(\varepsilon/M)^2}$$

car $p = \mathbf{E}\left(\overline{X}_n\right)$. D'où

$$\mathbf{P}\left(\left|\overline{X}_n - p\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{M}\right) \leqslant \frac{M^2}{4n\varepsilon^2}.$$

6. En regroupant les résultats :

$$\begin{aligned}\left|P_n(p) - f(p)\right| &\leqslant \left|S_{1,\varepsilon}\right| + \left|S_{2,\varepsilon}\right| \\ &\leqslant \varepsilon + \frac{M^2}{4n\varepsilon^2} \qquad (\bullet)\end{aligned}$$

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et étudions la fonction

$$\varphi : t \mapsto t + \frac{M^2}{4n^2} \cdot \frac{1}{t^2}.$$

La fonction est dérivable sur $]0;1[$ avec

$$\varphi'(t) = 1 + \frac{M^2}{4n^2}\frac{(-2)}{t^3} = 1 - \frac{M^2}{2n^2} \cdot \frac{1}{t^3}.$$

On en déduit que φ est croissante sur $]0;t_0[$, décroissante sur $]t_0, 1[$ où

$$t_0 = \left(\frac{M^2}{2n^2}\right)^{1/3}$$

On a donc un maximum atteint en t_0 valant

$$\begin{aligned}\varphi(t_0) &= t_0\left(1 + \frac{M^2}{4n^2} \cdot \frac{1}{t_0^3}\right) = t_0\left(1 + \frac{M^2}{4n^2} \cdot \frac{2n^2}{M^2}\right) \\ &= \frac{3}{2}t_0 = \text{Cst} \cdot \frac{1}{n^{2/3}}.\end{aligned}$$

En revenant à $(\bullet)$ avec $\varepsilon = t_0$, on obtient

$$\forall p \in [0;1], \left|P_n(p) - f(p)\right| \leqslant \text{Cst} \cdot \frac{1}{n^{2/3}}.$$

Soit

$$\sup_{p\in[0;1]} \left|P_n(p) - f(p)\right| \leqslant c\frac{1}{n^{2/3}}$$

et le résultat s'en déduit par encadrement.

7.

```
def Pn(t,n,f):
    s=0
    for k in range(n+1):
        s+=sp.binom(n,k)*f(k/n)*t**k*(1-t)
            **(n-k)
    return s
```

8.

```
def f(t):
    return np.sin(2*np.pi*t)

t=np.linspace(0,1,100)
y=f(t)
plt.plot(t,y,label='Fonction f')

for k in range(2,9):
    y=np.zeros(100)
    for iter in range(100):
        y[iter]=Pn(t[iter],k,f)
    plt.plot(t,y,label=str(k))
plt.legend()
plt.show()
```

9.

```
def MpSp(lbda,p):
    ech=rd.exponential(1/lbda,p)
    # le paramètre est l'inverse de l'espé
        rance
    Mp=np.max(ech)
    Sp=np.sum(ech)
    return Mp,Sp
```

10.

```
def approx(lbda,p):
    Compteur=0
    m=10000
    for i in range(m):
        Mp,Sp=MpSp(lbda,p)
        if 2*Mp>Sp:
            Compteur=+1
    return Compteur/m
```

Problème II

11.a) Une densité est :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_\theta(t) = \begin{cases} \theta\exp(-\theta t) & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

11.b) Notons F_2 la fonction de répartition de M_2. Comme M_2 est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on a

$$\forall t < 0, \qquad F_2(t) = 0.$$

Soit $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}F_2(t) &= \mathbf{P}(M_2 \leqslant t) \\ &= \mathbf{P}([X_1 \leqslant t] \cap [X_2 \leqslant t]) \\ &= \mathbf{P}(X_1 \leqslant t)\,\mathbf{P}(X_2 \leqslant t) \quad \text{(indépendance)} \\ &= \mathbf{P}(X_1 \leqslant t)^2 \quad \text{(même loi)} \\ F_2(t) &= F(t)^2\end{aligned}$$

où F est la fonction de répartition de $\mathscr{E}(\lambda)$. Comme F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, continue sur $\mathbb{R}$, il en va de même pour F_2 par produit. Ainsi M_2 est une variable à densité et une densité est obtenue par dérivation (sur $\mathbb{R}^*$ et étendue à 0). Or

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \qquad F_2'(t) = 2F'(t)F(t) = 2f_\lambda(t)F(t).$$

Pour $t \in \mathbb{R}_*^+$

$$\begin{aligned}F_2'(t) &= 2\left(\lambda e^{-\lambda t}\right)\left(1 - e^{-\lambda t}\right) \\ &= 2\lambda e^{-\lambda t} - (2\lambda)e^{-(2\lambda)t} \\ &= 2f_\lambda(t) - f_{2\lambda}(t).\end{aligned}$$

Pour $t < 0$

$$2f_\lambda(t) - f_{2\lambda}(t) = 0 = F_2'(t).$$

D'où le résultat.

12. On sait que la loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$ admet une espérance valant $1/\lambda$. D'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_\lambda(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}.$$

On a aussi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{2\lambda}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\lambda}.$

Par linéarité, on en déduit l'absolue convergence et l'égalité :

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty} t\big(2f_\lambda(t)-f_{2\lambda}(t)\big)\,\mathrm{d}t\\ =&2\int_{-\infty}^{+\infty} t f_\lambda(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{2\lambda}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\lambda}-\frac{1}{2\lambda}.\end{aligned}$$

Finalement, M_2 a une espérance et

$$\mathbf{E}(\mathrm{M}_2) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\lambda}.$$

13. Si $\mathrm{X}\hookrightarrow\mathscr{E}(\lambda)$. Par la formule de Koenig-Huygens

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\mathrm{X}^2\right) &= \mathbf{V}(\mathrm{X})+\mathbf{E}(\mathrm{X})^2\\ &= \frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

Comme précédemment

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_\lambda(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\lambda^2}.$$

On a aussi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{2\lambda}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{(2\lambda)^2}=\frac{1}{2\lambda^2}.$$

Par linéarité, on déduit la convergence absolue et l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\big(2f_\lambda(t)-f_{2\lambda}(t)\big)\,\mathrm{d}t = \frac{4}{\lambda^2}-\frac{1}{2\lambda^2}.$$

Puis $\mathbf{E}\left(\mathrm{M}_2{}^2\right) = \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{\lambda^2}.$

Comme M_2 a un moment d'ordre 2, M_2 a une variance et de nouveau par la formule de Koenig-Huygens

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\mathrm{M}_2) &= \mathbf{E}\left(\mathrm{M}_2{}^2\right)-\mathbf{E}(\mathrm{M}_2)^2\\ &= \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{\lambda^2}-\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{\lambda^2}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

14. Soit H la fonction de répartition de $a\mathrm{X}_2+b$ et F celle de X_2. Soit $t\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(t) &= \mathbf{P}(a\mathrm{X}_2+b\leqslant t)\\ &= \mathbf{P}(\mathrm{X}_2\leqslant (t-b)/a)\\ \mathrm{H}(t) &= \mathrm{F}\big((t-b)/a\big).\end{aligned}$$

Par composition H est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\{b\}$. Ainsi $a\mathrm{X}_2+b$ est à densité et une densité est donné par :

$$\forall t\in\mathbb{R}\setminus\{b\},\qquad h(t)=\frac{1}{a}\mathrm{F}'\left(\frac{t-b}{a}\right)=\frac{1}{a}f_\lambda\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

D'où le résultat en étendant la relation à $t=b$.

15.a) Cours.

15.b) Par le lemme des coalitions X_1 et $a\mathrm{X}_2+b$ sont indépendantes.
Soient $x,\ t\in\mathbb{R}$

$$f_\lambda(x-t)h_{a,b}(t)\neq 0 \iff \left\{\begin{array}{l} x-t\geqslant 0\\ t\geqslant b.\end{array}\right. \qquad (\bullet)$$

Distinguons deux cas.
→ Si $x\geqslant b$. La condition $(\bullet)$ devient $t\in[b;x]$ et

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty} f_\lambda(x-t)h_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t = \int_b^x f_\lambda(x-t)h_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t\\ =&\int_b^x \lambda\mathrm{e}^{-\lambda(x-t)}\cdot\frac{\lambda}{a}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{a}(t-b)}\,\mathrm{d}t\\ =&\frac{\lambda^2}{a}\mathrm{e}^{-\lambda x+\frac{b\lambda}{a}}\int_b^x \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{a}(1-a)t}\,\mathrm{d}t\\ =&\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x+\frac{b\lambda}{a}}\left[-\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{a}(1-a)t}}{1-a}\right]_b^x\\ =&\frac{\lambda}{1-a}\mathrm{e}^{-\lambda\left(x-\frac{b}{a}\right)}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{a}(1-a)b}-\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{a}(1-a)x}\right)\\ =&\frac{\lambda}{1-a}\left(\mathrm{e}^{-\lambda(x-b)}-\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{a}(x-b)}\right).\end{aligned}$$

Si maintenant $x<b$ alors la condition $(\bullet)$ n'est jamais vérifiée et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\lambda(x-t)h_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

Résumons, les variables sont indépendantes et le produit de convolution est toujours défini. Le théorème de sommation s'applique et une densité est donnée par le produit de convolution. On retrouve bien l'expression de f_T de l'énoncé.

16.a) Soient λ, μ deux réels tels que $\lambda g_{r_1}+\mu g_{r_2}=\mathbf{0}$ (l'application nulle). Dit autrement,

$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad \lambda g_{r_1}(t)+\mu g_{r,2}(t)=0.$$

C'est-à-dire

$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad \lambda\exp\big(r_1 t\big)+\mu\exp\big(r_2 t\big)=0.$$

En multipliant par $\exp\big(-r_1 t\big)\neq 0$,

$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad \lambda+\mu\exp((r_2-r_1)t)=0.$$

En passant à la limite $t\to+\infty$ ou $t\to-\infty$ suivant le signe de r_1-r_2, on trouve $\lambda=0$, puis $\mu=0$. La famille $(g_{r_1};g_{r_2})$ est bien libre.

16.b) Comme $2f_\lambda-f_{2\lambda}$ s'annule uniquement sur $]-\infty;0[$, nécessairement $b=0$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}_*^+,\qquad f_\mathrm{T}(x) &= \frac{\lambda}{1-a}\left(\mathrm{e}^{-\lambda x}-\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{a}x}\right).\\ f_{\mathrm{M}_2}(x) &= 2\lambda\left(\mathrm{e}^{-\lambda x}-\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{a}x}\right).\end{aligned}$$

On en déduit les fonctions de répartition sur $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}\mathrm{F}_\mathrm{T}(x) &= 1-\frac{1}{1-a}\left(\mathrm{e}^{-\lambda x}-a\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{a}x}\right).\\ \mathrm{F}_{\mathrm{M}_2}(x) &= 1-2\left(\mathrm{e}^{-\lambda x}-a\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{a}x}\right).\end{aligned}$$

Les fonctions de répartition sont toujours identiques sur $\mathbb{R}^-$. Les variables ont même loi si et seulement si, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $\mathrm{F}_\mathrm{T}(x)=\mathrm{F}_{\mathrm{M}_2}(x)$, soit

$$\frac{1}{1-a}\left(\mathrm{e}^{-\lambda x}-a\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{a}x}\right)=2\left(\mathrm{e}^{-\lambda x}-a\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{a}x}\right)$$

C'est-à-dire

$$\left(\frac{1}{1-a}-2\right)g_{-\lambda}(x)+\left(2a-\frac{a}{1-a}\right)g_{-\lambda/a}=0$$

Comme $a\neq 1$, $\lambda\neq\lambda/a$, le fait que la famille soit libre impose $\frac{1}{1-a}-2=0$, c'est-à-dire $a=\frac{1}{2}$.

17. Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, par linéarité

$$\mathbf{E}(\mathrm{T}_p)=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\mathbf{E}(\mathrm{X}_k)=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}.$$

Et par indépendance des variables

$$\mathbf{V}(\mathrm{T}_p)=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2}\mathbf{V}(\mathrm{X}_k)=\frac{1}{\lambda^2}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2}.$$

Les séries de Riemann

$$\sum\frac{1}{k}\quad\text{et}\quad\sum\frac{1}{k^2}$$

sont respectivement divergente et convergente. On en déduit que $\left(\mathbf{E}(\mathrm{T}_p)\right)_p$ diverge et $\left(\mathbf{V}(\mathrm{T}_p)\right)_p$ converge.

17. Procéder par récurrence sur la propriété $\mathscr{P}(p)$: T_p est à densité et une densité est

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad f_{\mathrm{T}_p}(x)=\begin{cases}\lambda p\mathrm{e}^{-\lambda x}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^{p-1} & \text{si } x\geqslant 0,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

18. En reprenant la question 11.b), on montre que M_p est à densité de une densité est donnée par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad f_{\mathrm{M}_p}(t)=pf_\lambda(t)\mathrm{F}(t)^{p-1}.$$

En remplaçant, on constate que

$$f_{\mathrm{M}_p}=f_{\mathrm{T}_p}.$$

On en déduit que M_p et T_p ont même loi.

19. La fonction $t\mapsto\mathrm{F}_\mathrm{X}(t)f_\mathrm{Y}(t)$ est continue sur $[0;+\infty[$. On a donc une intégrale généralisée en $+\infty$. Or

$$\forall t\in\mathbb{R}^+,\qquad 0\leqslant\mathrm{F}_\mathrm{X}(t)f_\mathrm{Y}(t)\leqslant f_\mathrm{Y}(t)$$

et $\displaystyle\int_0^{+\infty}f_\mathrm{Y}(t)\,\mathrm{d}t$ converge (f_Y est une densité). Par le critère de comparaison, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\mathrm{F}_\mathrm{X}(t)f_\mathrm{Y}(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

20. Soit $\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}&=\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)x^{n+1}\\ &=x\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{x^{n+1}}{n+1}\\ &=x\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=2}^{\mathrm{N}+1}\frac{x^n}{n}\\ &=x\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\mathrm{N}+1}\frac{x^n}{n}+x.\end{aligned}$$

Or on vient de montrer que

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{x^n}{n}\xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{}-\ln(1-x).$$

On en déduit la convergence et l'égalité

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}&=-x\ln(1-x)+\ln(1-x)+x\\ &=x+(1-x)\ln(1-x).\end{aligned}$$

22. Pour tout $t\in\mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathrm{X}_1>t)&=1-\mathbf{P}(\mathrm{X}_1\leqslant t)\\ &=1-\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)=\mathrm{e}^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

Soient u, $v\in\mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathrm{X}_1>u)\mathbf{P}(\mathrm{X}_1>v)&=\mathrm{e}^{-\lambda u}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda v}\\ &=\mathrm{e}^{-\lambda(u+v)}\\ &=\mathbf{P}(\mathrm{X}_1>u+v).\end{aligned}$$

24.a) On a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathrm{X}_1\leqslant\mathrm{U})&=\int_0^{+\infty}\mathrm{F}_{\mathrm{X}_1}(t)f_\mathrm{U}(t)\,\mathrm{d}t\\ &=\int_0^{+\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)f_u(t)\,\mathrm{d}t\\ &=\int_0^{+\infty}f_u(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}f_u(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

par linéarité d'intégrales convergentes. Or f_U est une densité

$$\int_0^{+\infty}f_\mathrm{U}(t)\,\mathrm{d}t=1$$

et par le théorème de transfert

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}f_u(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}f_\mathrm{U}(t)\,\mathrm{d}t=\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{U}}\right).$$

D'où $\qquad\mathbf{P}(\mathrm{X}_1\leqslant\mathrm{U})=1-\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{U}}\right).$

Il vient

$$\mathbf{P}(x_1>\mathrm{U})=1-\mathrm{P}(\mathrm{X}_1\leqslant\mathrm{U})=\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{U}}\right).$$

24.b) Par le théorème de transfert

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{U}}\right)&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}f_\mu(t)\,\mathrm{d}t\\ &=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mu\mathrm{e}^{-\mu t}\,\mathrm{d}t\\ &=\mu\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}\,\mathrm{d}t=\frac{\mu}{\lambda+\mu}.\end{aligned}$$

25. À l'aide des questions précédentes

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathrm{X}_1>\mathrm{U}+\mathrm{V})&=\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda(\mathrm{U}+\mathrm{V})}\right)\\ &=\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{U}}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{V}}\right)\\ &=\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{U}}\right)\cdot\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{V}}\right)\end{aligned}$$

car parle lemme des coalitions les variables $\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{U}}$ et $\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{V}}$ sont indépendantes.
Ensuite, question 24.a),

$$\mathbf{P}(\mathrm{X}_1>\mathrm{U}+\mathrm{V})=\mathbf{P}(\mathrm{X}_1>\mathrm{U})\mathbf{P}(\mathrm{X}_1>\mathrm{V}).$$

26. Par récurrence, on montre que si $U_1, \dots, U_n$ sont mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et à densité continue sur $\mathbb{R}^+$. On a

$$\mathbf{P}\left(X_1 > \sum_{k=1}^{n} U_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_1 > U_k).$$

On en déduit que

$$\mathbf{P}(2X_1 > S_n) = \mathbf{P}\left(X_1 > \sum_{\substack{k=1\\k\neq 1}}^{n} X_k\right) = \prod_{k=2}^{n} \mathbf{P}(X_1 > X_k).$$

En reprenant le calcul du 23.b), on a

$$\mathbf{P}(X_1 > X_k) = \frac{\lambda}{\lambda+\lambda} = \frac{1}{2}.$$

Le résultat s'en déduit.

27. Supposons

$$[2X_1 > S_n] \cap [2X_2 > S_n] \neq \varnothing.$$

Il existe donc $\omega \in \Omega$ tel que

$$\begin{aligned} 2X_1(\omega) &> S_n(\omega) = X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega) \\ 2X_2(\omega) &> S_n(\omega) = X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega) \end{aligned}$$

c'est-à dire

$$\begin{aligned} X_1(\omega) &> 0 + X_2(\omega) + X_3(\omega) + \cdots + X_n(\omega) \\ X_2(\omega) &> X_1(\omega) + 0 + X_3(\omega) + \cdots + X_n(\omega). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} X_1(\omega) &\leqslant X_1(\omega) + X_3(\omega) + \cdots + X_n(\omega) \\ &< X_2(\omega) \\ &\leqslant X_2(\omega) + X_3(\omega) + \cdots + X_n(\omega) \\ X_1(\omega) &< X_1(\omega). \end{aligned}$$

Absurde. On en déduit que

$$[2X_1 > S_n] \cap [2X_2 > S_n] = \varnothing.$$

Le raisonnement est identique pour $i, j \in [\![1; n]\!]$, $i \neq j$

$$[2X_i > S_n] \cap \left[2X_j > S_n\right] = \varnothing.$$

Les événements sont deux à deux incompatibles.

28. Par la propriété d'additivité dans le cas d'union disjointe :

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(2M_n > S_n) \\ =&\mathbf{P}(\max(2X_1, \dots, 2X_n) > S_n) \\ =&\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} [2X_i > S_n]\right) \\ =&\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(2X_i > S_n). \\ =&\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{n}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

29.

```python
def simuN(lbda):
    n=1
    Y=rd.exponential(1/lbda)
    X=rd.exponential(1/lbda)
    while X<Y :
        n=n+1
        X=rd.exponential(1/lbda)
    return n
```

30. On conjecture que la loi de N est indépendante de λ. En effet, la condition d'arrêt $X_n > Y$ est équivalente $\lambda X_n > \lambda Y$. Or λX_n et λY suivent une loi $\mathscr{E}(1)$. La condition est donc indépendante de λ.

31. On a

$$[N = 0] = \bigcap_{k=1}^{+\infty} [X_n \leqslant y].$$

Il suffit de montrer que

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant Y] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} [M_n \leqslant Y].$$

Soit $\omega \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant Y]$. Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad X_k(\omega) \leqslant Y(\omega).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a donc

$$X_1(\omega) \leqslant Y(\omega) \dots \quad X_n(\omega) \leqslant Y(\omega).$$

D'où $\max(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \leqslant Y(\omega)$ et $\omega \in [M_n \leqslant Y]$. Cela étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\omega \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [M_n \leqslant Y].$$

On a donc l'inclusion :

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant Y] \subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} [M_n \leqslant Y].$$

Ensuite pour tout $n \in \mathbb{N}^x$

$$[M_n \leqslant Y] \subset [X_n \leqslant Y]$$

Puis

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} [M_n \leqslant Y] \subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} [X_n \leqslant Y].$$

L'égalité est prouvée par double inclusion.

32. D'après le préliminaire

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M_n \leqslant y) &= \int_0^{+\infty} F_{M_n}(t) f_y(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^n \lambda e^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

33. Appliquer le théorème de la limite monotone.

34.a) On a pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} [M_n \leqslant Y] \subset [M_p \leqslant Y].$$

Par croissante de la probabilité

$$0 \leqslant \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} [M_n \leqslant Y]\right) \leqslant \mathbf{P}\left(M_p \leqslant Y\right).$$

Or $\quad \mathbf{P}\left(M_p\right) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Par passage à la limite

$$0 \leqslant \mathbf{P}\left(n_{n=1}^{+\infty} [M_n \leqslant y]\right) \leqslant 0$$

D'où le résultat.

3.b) On a

$$[N = n] = [N > n-1] \setminus [N > n]$$

Comme $[N > n] \subset [N > n-1]$, on a en passant au probabilité

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(N = n) &= \mathbf{P}(N > n-1) - \mathbf{P}(N > n)\\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.\end{aligned}$$

34.c) On a

$$n\mathbf{P}(N = n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Sachant que la série de Riemann $\sum 1/n$ est divergente, la série $\sum n\mathbf{P}(N = n)$ est aussi divergente par le critère d'équivalence des séries à termes positifs. La variable N n'admet pas d'espérance.

35.a)

$$[N = n] \cap \left[X_N \leqslant t\right] = [N = n] \cap [X_n \leqslant t].$$

Or $[N = n]$ est réalisé si

$$\forall i \in [\![1;n-1]\!], \qquad X_i \leqslant Y, \quad X_n \geqslant Y.$$

Soit

$$M_{n-1} \leqslant Y \quad \text{et} \quad X_n \geqslant Y$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned}[N = n] &= [M_{n-1} \leqslant Y] \cap [X_n \geqslant Y] \cap [X_n \leqslant t]\\ &= [M_{n-1} \leqslant Y \leqslant X_n \leqslant t].\end{aligned}$$

D'où le résultat.

36. On a pour $y \in \mathbb{R}^+$

$$\int_{n=0}^{y} f_{M_{n-1}}(m)\,\mathrm{d}m = F_{M_{n-1}}(y) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^{n-1}$$

$$\int_{y=0}^{x}\int_{m=0}^{y} f_{M_{n-1}}(m)\,\mathrm{d}x f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{x} \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda y}\right)^{n-1} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y.$$

$$= \left[+\frac{\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda y}\right)^{n}}{n}\right]_{y=0}^{x} = \frac{1}{n}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{n}$$

Puis

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(M_{n-1} \leqslant Y < X_n \leqslant t) &= \int_{x=0}^{t} \frac{1}{n}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^{n} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^{n+1}}{n+1}\right]_0^t\\ &= \frac{1}{n(n+1)}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

36. $(N = n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, la formule des probabilités s'applique et pour $t \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}F_{X_N}(t) &= P\left(X_N \leqslant t\right)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}\left([X_N \leqslant t] \cap [N = n]\right)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^{n+1}\\ &= \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right) + \mathrm{e}^{-\lambda t}\ln\left(\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)\\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} + \mathrm{e}^{-\lambda t}(-\lambda t)\\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}(1 + \lambda t).\end{aligned}$$

37. Précisons que $F_{X_N}(t) = 0$ si $t \leqslant 0$.
On vérifie que F_{X_N} est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ par les théorèmes généraux. De plus

$$\lim_{t\to0^-} F_{X_N}(t) = 0 = F_{X_N}(0) = \lim_{t\to0^+} F_{X_N}(t).$$

Ainsi, F_{X_N} est continue sur $\mathbb{R}$. Par définition, X_N est une variable à densité et une densité est

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}(1 + \lambda t) - \mathrm{e}^{-\lambda t}\cdot\lambda & \text{si } t \geqslant 0\\ 0 & \text{si } t \leqslant 0\end{cases}$$

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases}\lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0\\ 0 & \text{si } t < 0\end{cases}$$

38. Si on note f_λ la densité de $\mathscr{E}(\lambda)$ (question 11a) On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_\lambda(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\lambda^2}$$

On a convergence absolue, X_N a une espérance et

$$\mathbf{E}\left(X_N\right) = \int_0^{+\infty} \lambda^2 t^2 \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda t^2 f_\lambda(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\lambda}.$$

39.

```python
# test
m=5000
ech=np.zeros(m)
for iter in range(m):
    ech[iter]=simuXN(1)
print(np.mean(ech))


def simuXN(lbda):
    n=1
    Y=rd.exponential(1/lbda)
    X=rd.exponential(1/lbda)
    while X<Y :
        X=rd.exponential(1/lbda)
    return X
```

DS 5 * - solution

Bonus à chaque cokille trouvée!

1. La fonction arctangente est la réciproque de la fonction tangente restreinte à $]-\pi/2;\pi/2[$. La fonction arctangente est dérivable en 0 et

$$\begin{aligned}\arctan(x) &= \arctan(0)+\arctan'(0)(x-0)+o_0(x)\\ &= x+o_0(x) \qquad (\star)\end{aligned}$$

car $\arctan'(t)=1/\left(1+t^2\right)$.

2. Posons

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \arctan(x)+\arctan(1/x).\end{array}\right.$$

Comme la fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction inverse $x\mapsto 1/x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à valeur dans $\mathbb{R}$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par somme et composition. Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$,

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{1}{1+(1/x)^2}=0.$$

Pourtant la fonction f n'est pas constante.

$$f(1)=\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad f(-1)=-\frac{\pi}{2}.$$

Par contre, f est constante sur l'intervalle $]-\infty;0[$ et sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Finalement, on obtient

$$\arctan(x)+\arctan(1/x)=\left\{\begin{array}{rll}\pi/2 & \text{si} & x>0\\ -\pi/2 & \text{si} & x<0\end{array}\right..$$

3. On a pour $x\in\mathbb{R}_*^+$. Avec $(\star)$

$$\begin{aligned}\arctan(x) &= \frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ car } \frac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0.\end{aligned}$$

4. La fonction f_a est continue positive sur $\mathbb{R}$. Soit $A\in\mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned}\int_0^A f_a(t)\,dt &= \frac{1}{\pi}\int_0^A\frac{a}{a^2+x^2}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^A\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\frac{dx}{a}\\ &= \frac{1}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^A\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Par parité de la fonction f_a, on en déduit la convergence et l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_a(t)\,dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

La fonction f_a est une densité.

5. Soit $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \mathbf{P}(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^x f(t)\,dt\\ &= \frac{1}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{t}{a}\right)\right]_{-\infty}^x=\frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Non, X n'a pas d'espérance car

$$tf_a(t)\underset{+\infty}{\sim}\frac{a}{\pi}\cdot\frac{1}{t}.$$

Or l'intégrale de Riemman $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t}$ est divergente, par le critère d'équivalence $\int_1^{+\infty}tf_a(t)\,dt$ diverge.

6. Soit $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}F_{\lambda X}(x) &= \mathbf{P}(\lambda X\leqslant x)=\mathbf{P}\left(X\leqslant\frac{x}{\lambda}\right) \quad \text{car} \quad \lambda>0\\ &= F_X\left(\frac{x}{\lambda}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{x}{\lambda a}\right)+\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

On reconnait la fonction de répartition de $\mathscr{C}(\lambda a)$ Comme la fonction de répartition caractérise la loi

$$\lambda X\hookrightarrow\mathscr{C}(\lambda a).$$

Pour $\lambda<0$

$$\begin{aligned}F_{\lambda X}(x) &= \mathbf{P}(\lambda X\leqslant x)=\mathbf{P}\left(X\geqslant\frac{x}{\lambda}\right)\\ &= 1-\mathbf{P}\left(X<\frac{x}{\lambda}\right)=1-\mathbf{P}\left(X\leqslant\frac{x}{\lambda}\right)\\ &= 1-F_X\left(\frac{x}{\lambda}\right)\\ &= 1-\frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{x}{\lambda a}\right)+\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

En utilisant le fait que la fonction arctangente est impaire

$$F_{\lambda X}(x)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{|\lambda|a}\right)\right).$$

Finalement

$$\text{si } X\hookrightarrow\mathscr{C}(a) \quad \text{alors} \quad \lambda X\hookrightarrow\mathscr{C}(|\lambda|a).$$

7. Précisons que M_n est une variable à densité donc $[M_n=0]$ est un événement négligeable et N_n est presque surement bien posée. Comme N_n et M_n ont même signe

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(N_n\leqslant 0) &= \mathbf{P}(M_n\leqslant 0)\\ &= \mathbf{P}([X_1\leqslant 0]\cap\ldots\cap[X_n\leqslant 0])\\ &= \mathbf{P}(X_1\leqslant 0)\times\ldots\times\mathbf{P}(X_n\leqslant 0) \text{ indépendance}\\ &= \mathbf{P}(X_1\leqslant 0)^n \text{ même loi}\\ \mathbf{P}(N_n\leqslant 0) &= \frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

• Soit $t\in\mathbb{R}_*^+$. Comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathrm{N}_n\leqslant t]\cap[\mathrm{M}_n\geqslant 0]) &= \mathbf{P}\left(\left[\frac{\mathrm{M}_n}{n}\geqslant\frac{1}{t}\right]\cap[\mathrm{M}_n\geqslant 0]\right)\\ &=\mathbf{P}\left(\left[\mathrm{M}_n\geqslant\frac{n}{t}\right]\right)\\ &=1-\mathbf{P}\left(\mathrm{M}_n<\frac{n}{t}\right).\end{aligned}$$

En reprenant le calcul précédent :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathrm{N}_n\leqslant t]\cap[\mathrm{M}_n\geqslant 0]) &= 1-\mathbf{P}\left(\mathrm{X}_1<\frac{n}{t}\right)^n\\ &=1-\mathbf{P}\left(\mathrm{X}_1\leqslant\frac{n}{t}\right)^n\\ &=1-\mathrm{F}_{\mathrm{X}_1}\left(\frac{n}{t}\right)^n.\end{aligned}$$

D'où le résultat avec la question 5.

8. Pour $x\in\mathbb{R}^-$

$$0\leqslant \mathrm{F}_n(x)=\mathbf{P}(\mathrm{N}_n\leqslant x)\leqslant\mathbf{P}(\mathrm{N}_n\leqslant 0)\leqslant\frac{1}{2^n}.$$

Par encadrement

$$\mathrm{F}_n(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0=\mathrm{G}(x).$$

Pour $x\in\mathbb{R}^+$. Par la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements formé par $[\mathrm{M}_n<0]$ et $[\mathrm{M}_\geqslant 0]]$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathrm{N}_n\leqslant x]) &= \mathbf{P}([\mathrm{N}_n\leqslant x]\cap[\mathrm{M}_n<0])\\ &\quad+\mathbf{P}([\mathrm{N}_n\leqslant x]\cap[\mathrm{M}_n\geqslant 0]).\end{aligned}$$

On a encore

$$\mathbf{P}\big([\mathrm{N}_n\leqslant x]\cap[\mathrm{M}_n<0]\big)=\mathbf{P}(\mathrm{N}_n<0)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

et d'après 7

$$\mathbf{P}([\mathrm{N}_n\leqslant x]\cap[\mathrm{M}_n\geqslant 0])=1-\exp\left(n\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{n}{x}\right)\right)\right)$$

or, avec la question 3

$$\frac{\pi}{2}-\arctan(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{t}.$$

puis $$\frac{1}{2}-\frac{\arctan}{\pi}\left(\frac{n}{x}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{x}{\pi n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

et

$$\begin{aligned}n\ln\left(\frac{1}{2}+\arctan\left(\frac{n}{\pi}\right)\right) &= n\ln\left(1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{n}{x}\right)\right)\right)\\ &\underset{n\to\infty}{\sim} n\cdot\left(-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{n}{x}\right)\right)\right)\\ &\underset{n\to\infty}{\sim} -n\cdot\frac{x}{\pi n}=-\frac{x}{\pi}.\end{aligned}$$

Dès lors

$$n\ln\left(\frac{1}{2}+\underset{\pi}{\arctan}\left(\frac{n}{x}\right)\right)\underset{n\infty}{\longrightarrow}-\frac{x}{\pi}.$$

Par continuité de la fonction exponentielle :

$$\mathbf{P}\big([\mathrm{N}_n\leqslant x]\cap[\mathrm{M}_n\geqslant 0]\big)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1-\exp\left(-\frac{x}{\pi}\right).$$

Résumons

$$\mathbf{P}(\mathrm{N}_n\leqslant x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1-\mathrm{e}^{-x/\pi}=\mathrm{G}(x).$$

9. Utilisons la question 6. Si $\mathrm{X}_i\hookrightarrow\mathscr{C}(a)$ alors $\frac{\mathrm{X}_i}{a}\hookrightarrow\mathscr{C}(1)$ et on se ramène au cas précédent en considérant les variables

$$\frac{\mathrm{M}_n}{a}=\max\left(\frac{\mathrm{X}_1}{a},\cdots,\frac{\mathrm{X}_n}{a}\right),\quad a\mathrm{N}_n=n\left(\frac{\mathrm{M}_n}{a}\right)^{-1}.$$

Donc pour $x\in\mathbb{R}$ Donc pour $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathrm{F}_{\mathrm{N}_n}(x) &= \mathbf{P}(\mathrm{N}_n\leqslant x)\\ &=\mathbf{P}(a\mathrm{N}_n\leqslant ax)\\ &=\mathrm{F}_n(ax)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mathrm{G}(ax).\end{aligned}$$

Or $$\mathrm{G}(ax)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{ax}{\pi}} & \text{si } x\geqslant 0\\ 0 & \text{si } x<0.\end{cases}$$

On trouve l'expression d'une loi exponentielle de paramètre a/π. On a donc convergence vers une loi $\mathscr{E}(a/\pi)$.

10. Réduisons au même dénominateur le membre de droite. D'une part :

$$\begin{aligned}&x\left(\frac{2t}{t^2+b^2}-\frac{2(t-x)}{(t-x)^2+1}\right)\\ &=x\frac{2t\left((t-x)^2+1\right)-2(t-x)\left(t^2+b^2\right)}{\left(t^2+b^2\right)\left((t-x)^2+1\right)}.\end{aligned}$$

Le numérateur est :

$$\begin{aligned}&x\left(2t\left(t^2-2xt+x^2+1\right)-2\left(t^3+tb^2-xt^2-xb^2\right)\right)\\ &=xt^2\cdot(-4x+2x)+t\left(2x^2+2-2b^2\right)x+2x^2b^2\\ &=-t^2\cdot 2x^2+2t\left(x^2-b^2+1\right)x+2x^2b^2.\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}&\frac{x^2+b^2-1}{(t-x)^2+1}+\frac{x^2-b^2+1}{t^2+b^2}\\ &=\frac{\left(x^2+b^2-1\right)\left(t^2+b^2\right)+\left(x^2-b^2+1\right)\left((t-x)^2+1\right)}{\left(t^2+b^2\right)\left((t-x)^2+1\right)}.\end{aligned}$$

Le numérateur est

$$\begin{aligned}&\left(x^2+b^2-1\right)\left(t^2+b^2\right)+\left(x^2-b^2+1\right)\left(t^2-2xt+x^2+1\right).\\ &=t^2\left(\left(x^2+b^2-1\right)+\left(x^2-b^2+1\right)\right)+t\left(\left(x^2-b^2+1\right)(-2x)\right)\\ &\quad+b^2\left(x^2+b^2-1\right)+\left(x^2-b^2+1\right)\left(x^2+1\right)\\ &=t^2\cdot 2x^2-2xt\left(x^2-b^2+1\right)+b^2\left(x^2+b^2-1\right)\\ &\quad+\left(x^2-b^2+1\right)\left(x^2+1\right).\end{aligned}$$

Le membre de droite donne lorsqu'on réduit au même dominateur une expression du type

$$\frac{at^2+\beta t+\gamma}{\left((t-x)^2+1\right)\left(t^2+b^2\right)}$$

où

$$\begin{aligned}\alpha&=-2x^2+2x^2=0\\ \beta&=2\left(x^2-b^2+1\right)x-2x\left(x^2-b^2+1\right)=0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\gamma &= b^2\left(x^2+b^2-1\right)+\left(x^2-b^2+1\right)\left(x^2+1\right)+2x^2b^2.\\ &= x^4+x^2\left(b^2+1-b^2+1+2b^2\right)+b^2\left(b^2-1\right)-b^2+1\\ &= x^4+2x^2\left(1+b^2\right)+b^4-2b^2+1\\ &= x^4+2x^2\left(1+b^2\right)+\left(b^2-1\right)^2.\end{aligned}$$

Or on a aussi

$$\begin{aligned}c &= \left(x^2+(b+1)^2\right)\left(x^2+(b-1)^2\right)\\ &= x^4+\left((b-1)^2+(b+1)^2\right)x^2+(b+1)^2(b-1)^2\\ &= x^4+\left(b^2-2b+1+b^2+2b+1\right)x^2+\left(b^2-1\right)^2\\ &= x^4+2x^2\left(1+b^2\right)+\left(b^2-1\right)^2.\end{aligned}$$

Ainsi $c=\gamma$, ce qui conclut.

11. Par imparité de l'intégrande, on a déjà

$$\int_{-A}^{A}\frac{2t}{t^2+b^2}\,dt=0.$$

Ensuite

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{A}\frac{2(t-x)}{(t-x)^2+1}\,dt &= \left[\ln\left((t-x)^2+1\right)\right]_{-A}^{A}\\ &= \ln\left(\frac{(A-x)^2+1}{(A+x)^2+1}\right).\end{aligned}$$

Par continuité du logarithme en 1, la limite

$$\frac{(A-x)^2+1}{(A+x)^2+1}\underset{A\to+\infty}{\sim}\frac{A^2}{A^2}=1\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}1,$$

donne $$\ln\left(\frac{(A-x)^2+1}{(A+x)^2+1}\right)\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}\ln(1)=0.$$

Ce qui justifie la limite pour la première intégrale.
Pour la seconde

$$\int_{-A}^{A}\frac{dt}{t^2+b^2}=\frac{1}{b}\int_{-A}^{A}\frac{1}{(t/b)^2+1}\cdot\frac{dt}{b}.$$

À l'aide du changement de variable affine $u=t/b$, l'intégrale vaut

$$\frac{1}{b}\int_{-A/b}^{A/b}\frac{du}{u^2+u^2}=\frac{1}{b}\left[\arctan(u/b)\right]_{-A/b}^{A/b}.$$

Le résultat s'en déduit en rappelant que les limites de arctangente sont $\pm\pi/2$ en $\pm\infty$.

12. Appliquons le théorème de sommation.
- X et Y sont indépendantes.
- Soient $x,t\in\mathbb{R}$

$$f_1(x-t)f_b(t)=\frac{1}{\pi^2\left(1+(x-t)^2\right)}\cdot\frac{b}{b^2+t^2}.$$

La fonction $t\mapsto f_1(x-t)f_b(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et

$$f_1(x-t)f_b(t)\underset{\pm\infty}{\sim}\frac{b}{\pi^2}\cdot\frac{1}{t^2}$$

Par comparaison aux intégrales de Riemann et par le critère d'équivalence, on montre que $\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x-t)f_b(t)\,dt$ est convergente.
Noter ici la nécessité de prouver la convergence. Ainsi, au lieu de regarder des intégrales de type $\int_A^B ..\,dt$, on peut se limiter à $\int_{-A}^{A}..\,dt$.

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2c}{b}\int_{-A}^{A}f_1(x-t)f_b(t)\,dt &= x\int_{-A}^{A}\frac{2t}{t^2+b^2}\,dt && (I_{1,A})\\ &-x\int_{-A}^{A}\frac{2(t-x)}{(t-x)^2+1}\,dt && (I_{2A})\\ &+\left(x^2+b^2-1\right)\int_{-A}^{A}\frac{dt}{(t-x)^2+1} && (I_{3,A})\\ &+\frac{\left(x^2-b^2+1\right)}{b}\int_{-A}^{A}\frac{b\,dt}{t^2+b^2} && (I_{4,A})\end{aligned}$$

D'après le calcul précédent, on a déjà

$$x\left(I_{2,A}-I_{2,A}\right)\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

On a aussi

$$I_{3,A}\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}\pi\quad\text{et}\quad I_{4,A}\underset{A\to+0}{\longrightarrow}\pi.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x-t)f_b(t)\,dt &= \frac{b}{\pi^2c}\times\left(\left(x^2+b^2-1\right)\pi+\frac{x^2-b^2+1}{b}\right)\\ &= \frac{1}{\pi c}\left(b\left(x^2+b^2-1\right)+x^2-b^2+1\right)\\ &= \frac{1}{\pi c}\left((1+b)x^2+b^3-b^2-b+1\right)\\ &= \frac{1}{\pi c}\left((1+b)x^2+\left(b^2-1\right)(b-1)\right)\\ &= \frac{1}{\pi c}\left((1+b)x^2+(b+1)(b-1)^2\right)\\ &= \frac{1+b}{\pi c}\left(x^2+(b-1)^2\right)\\ &= \frac{1+b}{\pi\left(x^2+(b+1)^2\right)}\end{aligned}$$

On reconnait une densité d'une loi $\mathscr{C}(1+b)$. Finalement

$$X+Y\hookrightarrow\mathscr{C}(1+b).$$

13. Notons que

$$X+Y=\alpha\left(\frac{X}{\alpha}+\frac{Y}{\alpha}\right).$$

Or

$$\frac{X}{\alpha}\hookrightarrow\mathscr{C}(1)\quad\text{et}\quad\frac{Y}{\alpha}\hookrightarrow\mathscr{C}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

De plus, X/α, Y/β restent indépendantes et d'après ce qui précède

$$\frac{X}{\alpha}+\frac{Y}{\alpha}\hookrightarrow\mathscr{C}\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

puis $$X+Y\hookrightarrow\mathscr{C}(\alpha+\beta).$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par récurrence à partir du résultat précédent

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathscr{C}(n\alpha).$$

On constate alors qu'un choix est

$$a_n = n \quad \text{et} \quad b_n = 0.$$

15. Notons Φ la fonction de répartition de N. Posons

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t^2/2)$$

une densité de N continue sur $\mathbb{R}$ donc Φ est de $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\Phi' = \varphi$. Rappelons également que

$$\forall t \in [0, +\infty[, \qquad \mathbf{P}(|\mathrm{N}| \leqslant t) = 2\Phi(t) - 1.$$

Cherchons maintenant la fonction de répartition F_Z de Z.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}(\mathrm{Z} \leqslant x) = \mathbf{P}(\ln|\mathrm{N}| \leqslant x) = \mathbf{P}\left(|\mathrm{N}| \leqslant \mathrm{e}^x\right) = 2\Phi\left(\mathrm{e}^x\right) - 1.$$

Les fonctions Φ et $x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^x$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc, par composition $x \mapsto \Phi\left(\mathrm{e}^x\right)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Il est alors de même pour F_Z et ainsi : Z est une variable aléatoire à densité et une densité est donnée par :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z'(x) &= 2\mathrm{e}^x \Phi'\left(\mathrm{e}^x\right) \\ &= 2\mathrm{e}^x \varphi\left(\mathrm{e}^x\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}}. \end{aligned}$$

On obtient :

$$x \to \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}} \text{ est une densité de Z.}$$

$$x \to \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}} \text{ est une densité de } -\mathrm{Z}.$$

16. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^x e^{-\frac{e^{2x}}{2}}$. Justifions dans un premier temps que ψ est bornée afin de justifier l'existence du produit de convolution.
Par produit et les croissances comparées.

$$\psi(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \psi(x) = e^{x - \frac{e^{2x}}{2}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Comme ψ est en plus continue sur $\mathbb{R}$, ψ est bien bornée sur $\mathbb{R}$.
Posons $\mathrm{T} = \ln\left|\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}'}\right| = \ln|\mathrm{N}| + \left(-\ln\left|\mathrm{N}'\right|\right)$.

- N et N' sont deux variables aléatoires indépendantes donc $\ln|\mathrm{N}|$ et $\left(-\ln\left|\mathrm{N}'\right|\right)$ sont également indépendantes par le lemme des coalitions.
- $\ln|\mathrm{N}|$ et $\left(-\ln\left|\mathrm{N}'\right|\right)$ sont deux variables aléatoires à densité de densités respectives ψ et $x \to \psi(-x)$.
- ψ est une densité de $\ln|\mathrm{N}|$ et ψ est bornée sur $\mathbb{R}$. La fonction $h : x \to \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\psi(-(x-t))\mathrm{d}t$ est donc bien définie.

Par le théorème de sommation, T est une variable aléatoire à densité admettant pour densité h.
Calculons h. Soit x un réel.

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^t e^{-\frac{e^{2t}}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-(x-t)} e^{-\frac{e^{-2(x-t)}}{2}} \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi} e^{-x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t} e^{-\frac{\left(1+e^{-2x}\right)e^{2t}}{2}} \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Posons $c = 1 + e^{-2x}$ et $s(t) = -c/2 \cdot \mathrm{e}^{2t}$ de sorte que

$$h(x) = -\frac{2}{\pi c} \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{+\infty} s'(t) \mathrm{e}^{s(t)} \mathrm{d}t.$$

Une primitive de l'intégrande est $t \mapsto \mathrm{e}^{s(t)}$, il vient

$$h(x) = \frac{2}{\pi} e^{-x} \frac{1}{1 + e^{-2x}}.$$

Enfin

$$h(x) = \frac{2}{\pi} \frac{e^{-x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{2}{\pi} \frac{e^{2x} e^{-x}}{e^{2x}\left(1 + e^{-2x}\right)} = \frac{2}{\pi} \frac{e^{2x}}{\left(e^{2x} + 1\right)}.$$

$x \to \frac{2}{\pi} \frac{e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)}$ est une densité de $\ln\left|\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}'}\right|$.

17.a) Notons F_T la fonction de répartition de $\mathrm{T} = \ln\left|\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}'}\right|$ et F_U la fonction de répartition de $\mathrm{U} = \left|\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}'}\right|$. Observons que : $\mathrm{U} = e^{\mathrm{T}}$ U prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ donc

$$\forall x \in]-\infty, 0], \quad F_U(x) = 0.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$

$$\begin{aligned} F_U(x) &= \mathbf{P}(\mathrm{U} \leqslant x) = \mathbf{P}\left(e^{\mathrm{T}} \leqslant x\right) \\ &= \mathbf{P}(\mathrm{T} \leqslant \ln x) = F_T(\ln x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_U(x) &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\ln x} h(t) \mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\ln x} \frac{e^t}{\left(e^t\right)^2 + 1} \mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi} \lim_{\mathrm{A} \to -\infty} \left[\arctan\left(e^t\right)\right]_{\mathrm{A}}^{\ln x} \\ &= \frac{2}{\pi} \arctan x. \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \frac{2}{\pi} \arctan x & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}.$$

On a aussi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \frac{2}{\pi} \arctan x & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}.$$

17.b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\mathbf{P}\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}'} = -x\right) = \mathbf{P}\left(\mathrm{N} + x\mathrm{N}' = 0\right).$$

Or par le théorème de stabilité des lois normales indépendantes, $\mathrm{N} + x\mathrm{N}$ ' suit une loi normale. En particulier, la variable est à densité et la probabilité de tombé sur une valeur fixée est nulle. D'où

$$\mathbf{P}\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}}, = -x\right) = 0.$$

Soit G la fonction de répartition de N/N', on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}(x) &= \mathbf{P}\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}'} \leqslant x\right)\\
&= \mathbf{P}\left(-\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}'} \leqslant x\right) \quad \text{N, } -\text{N même loi}\\
&= \mathbf{P}\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}'} \geqslant -x\right) = 1-\mathbf{P}\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}'} < x\right)\\
&= 1-\mathbf{P}\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}'} \leqslant x\right).\\
&= 1-\mathrm{G}(-x).
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

17.c) Soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
\mathrm{F_U}(x) &= \mathbf{P}\left(\left|\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}'}\right| \leqslant x\right) = \mathrm{G}(x)-\mathrm{G}(-x)\\
&= 2\mathrm{G}(x)-1.
\end{aligned}$$

On inverse la relation et on utilise l'expression de la question 17.a)

$$\mathrm{G}(x) = \frac{\mathrm{F_U}(x)+1}{2} = \frac{1}{\pi}\left(\arctan(x)+\frac{\pi}{2}\right).$$

Ensuite, pour $x \in \mathbb{R}^-$, il vient en utilisant l'imparité de la fonction arctangente

$$\mathrm{G}(x) = 1-\mathrm{G}(\underbrace{-x}_{\geqslant 0}) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan(x)+\frac{\pi}{2}\right).$$

Finalement G a la même fonction de répartition qu'une loi de Cauchy de paramètre 1. Comme la fonction de répartition caractérise la loi

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}'} \hookrightarrow \mathscr{C}(1).$$

18.a)

```
def Cauchy():
    x=rd.normal(0,1)
    y=rd.normal(0,1)
    return x/y
```

18.b) Modifions la fonction précédente :

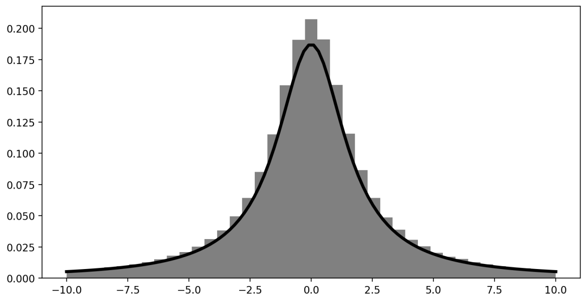
```
def Cauchy(Lbda,m):
    x=rd.normal(0,1,m)
    y=rd.normal(0,1,m)
    return Lbda*x/y
```

19.

```
def echC(lbda,mu):
    m=10000
    Ech=Cauchy(lbda,m)+Cauchy(mu,m)
    return Ech

plt.clf()
lbda=0.8
mu=0.5
absc=np.linspace(-10,10,100)
lm=lbda+mu
ordo=lm/(lm**2+absc**2)/np.pi
plt.plot(absc,ordo,linewidth=3,color='k')


plt.hist(echC(lbda,mu),np.linspace
    (-10,10,30),density=True,color='grey')
plt.show()
```



20. Le programme calcule les moyennes empiriques sur des échantillons de taille de plus en plus importante. On n'observe pas de convergence. Cela illustre le fait que la loi de Cauchy n'a pas d'espérance.

21.a) Le code simule la variable $1/\mathrm{X}$ où $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{C}(1)$. On constate que l'histogramme de l'échantillon semble épouser la forme de la courbe d'une densité d'une loi de Cauchy $\mathscr{C}(1)$. On conjecture que

$$1/\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{C}(1).$$

21.b) Soient N, N′ indépendantes telles que N et N′ suivent des lois normales $\mathscr{N}(0;1)$ et N/N' ait la même loi que X. On montre que $\frac{1}{\mathrm{X}}$ a la même loi que N'/N. Or N'/N suit aussi une loi de Cauchy $\mathscr{C}(1)$. C'est donc aussi le cas de $1/\mathrm{X}$.

22. *Remarque. Prouvons la densité de* Z. *Soit* $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{F_Z}(x) &= \mathbf{P}(\ln(|\mathrm{X}|) \leqslant x).\\
&= \mathbf{P}\left(|\mathrm{X}| \leqslant \mathrm{e}^x\right) \text{ exp strict.croiss.}\\
&= \mathbf{P}\left(-\mathrm{e}^x < x \leqslant \mathrm{e}^x\right).\\
&= \mathrm{F_X}\left(\mathrm{e}^x\right)-\mathrm{F_X}\left(-\mathrm{e}^x\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{\mathrm{e}^x}{a}\right)-\arctan\left(-\frac{\mathrm{e}^x}{a}\right)\right).
\end{aligned}$$

On obtient le résultat par dérivation.

La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto xh_a(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xh_a(x)\,\mathrm{d}x$ est généralisée en $\pm\infty$.
De plus, par les croissances comparées :

$$xh_a(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2a}{\pi}x\cdot\mathrm{e}^{-x} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

On a de même

$$xh_a(x) = o_{-\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Comme les intégrales de Riemann

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

sont convergentes, on en déduit la convergence absolue de $\int_{-\infty}^{+\infty} xh_a(x)\,\mathrm{d}x$. Ainsi Z a une espérance.

Effectuons le changement de variables $t = \mathrm{e}^x$, de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissant : $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x})^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t.$$

D'où le résultat.

23. Effectuer le changement de variable $u = 1/t$, $\mathscr{C}^1$ strictement de $]0;1]$ dans $[1;+\infty[$.

- À l'aide du changement de variable affine $t = au$

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_{0}^{+\infty} \frac{\ln au}{a^2+a^2u^2}\,a\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{0}^{+\infty} \frac{\ln a}{a\left(1+u^2\right)}\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{+\infty} \frac{\ln u}{a\left(1+u^2\right)}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi \ln a}{2a}.$$

24. On a vu que S et $1/\mathrm{S}$ ont même loi (de Cauchy de paramètre 1). Comme la fonction $t \mapsto \ln(|t|)$ est continue, les variables

$$\ln|\mathrm{S}| \quad \text{et} \quad \ln(|1/\mathrm{S}|) = -\ln|\mathrm{S}|$$

ont même loi. En particulier même espérance.

$$\mathbf{E}\big(\ln|\mathrm{S}|\big) = -\mathbf{E}\big(\ln|\mathrm{S}|\big).$$

D'où

$$\mathbf{E}\big(\ln|\mathrm{S}|\big) = 0.$$

Ensuite, remarquons que Z et $\ln(|a\mathrm{S}|)$ ont même loi. D'où

$$\mathbf{E}(\mathrm{Z}) = \mathbf{E}\big(\ln(|a\mathrm{S}|)\big) = \mathbf{E}\big(\ln|\mathrm{S}| + \ln a\big).$$

On conclut par linéarité de l'espérance.

25. On a $\mathrm{T} = \ln(|\mathrm{X}|) + \ln(|\mathrm{Y}|)$.
Par le lemme des coalitions $\ln(|\mathrm{X}|)$ et $\ln(|\mathrm{Y}|)$ sont indépendantes, de même loi dont une densité est donnée par h_1.

Soient $x, t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}h_1(x-t)h_1(t) &= \frac{4}{\pi^2}\frac{\mathrm{e}^{x-t}}{\mathrm{e}^{2(x-t)}+1}\cdot\frac{\mathrm{e}^{t}}{\mathrm{e}^{2t}+1}\\ &= \frac{4}{\pi^2}\mathrm{e}^{x}\cdot\frac{1}{\left(\mathrm{e}^{2(x-t)}+1\right)\left(\mathrm{e}^{2t}+1\right)}.\end{aligned}$$

On vérifie (comme à la question 15) la convergence de

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(x-t)h_1(t)\,\mathrm{d}t$$

et par le changement de variables $\mathscr{C}^1$ et strictement croissant $y = \mathrm{e}^{2t}$, $\mathrm{d}y = 2\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = 2y\,\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{4}{\pi^2}\mathrm{e}^{x}\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{y}+1\right)(y+1)}\frac{\mathrm{d}y}{2y}\\ &= \frac{2}{\pi^2}\mathrm{e}^{x}\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\left(\mathrm{e}^{2x}+y\right)(1+y)}\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

puis avec l'indication

$$g(x) = \frac{2}{\pi^2}\mathrm{e}^{x}\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}-1}\left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+\mathrm{e}^{2x}}\right)\mathrm{d}y.$$

Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_*^+$

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\mathrm{A}} \frac{1}{1+y} - \frac{1}{y+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}y &= \Big[\ln(1+y) - \ln\left(y+\mathrm{e}^{2x}\right)\Big]_0^{\mathrm{A}}\\ &= \ln\left(\frac{1+\mathrm{A}}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{A}}\right) + \ln\left(\mathrm{e}^{2x}\right)\\ &\xrightarrow[\mathrm{A}\to+\infty]{} 0 + 2x.\end{aligned}$$

Ainsi

$$g(x) = \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{x}\cdot x}{\mathrm{e}^{2x}-1} = \frac{4}{\pi^2}\frac{x}{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}$$

D'où le résultat par le théorème de sommation.

26. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} &= (1 + x + o_0(x)) - (1 - x + o_0(x))\\ &= 2x + o_0(x).\end{aligned}$$

D'où

$$g(x) = \frac{4}{\pi^2}\frac{x}{2x+o_0(x)} = \frac{4}{\pi^2}\frac{1}{2+o(1)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{2}{\pi^2}.$$

La fonction g est prolongeable par continuité en 0 avec

$$g(0) = \frac{2}{\pi^2}.$$

27.

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4x}{\pi^2\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)}\,\mathrm{d}x.$$

On effectue le changement de variables strictement croissant $t = \mathrm{e}^{x}$,

$$\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}x$$

on a

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\ln(t)}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = 1.$$

D'où le premier résultat.

Ensuite à l'aide du changement de variable $\mathscr{C}^1$ et strictement décroissant $u = 1/t$ sur $]0;1[$.

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,\mathrm{d}t &= -\int_{1}^{+\infty} \frac{-\ln(u)}{\frac{1}{u^2}-1}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right)\\ &= \int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u^2-1}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Par la relation de Chasles

$$\begin{aligned}2\int_{0}^{1} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,\mathrm{d}t &= \int_{0}^{1} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u^2-1}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

D'où la deuxième égalité.

28. Par les croissances comparés $x\ln(x) \underset{0^+}{\rightarrow} 0$, puis

$$\varphi(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.$$

Ensuite

$$\varphi(x) = x\cdot\frac{\ln(1+(x-1))}{x-1} \sim x\cdot\frac{x-1}{x-1} \sim 1.$$

La fonction φ est donc bien prolongeable par continuité en 0 et 1 par

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(1) = 1.$$

Soit M un majorant de la fonction continue sur le segment de $[0;1]$

$$t \longmapsto \left|\frac{\varphi(t)}{1+t}\right|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0;1]$

$$\left|\frac{t^{2n+1}\varphi(t)}{1+t}\right| \leqslant \mathrm{M}\cdot t^{2n+1}.$$

Par croissance de l'intégrale et l'inégalité triangulaire

$$\left|\int_0^1 t^{2n+1}\frac{p(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \mathrm{M}\int_0^1 t^{2n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+2}.$$

Par encadrement

$$\int_0^1 \frac{t^{2n+1}\varphi(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$$

29. La première égalité découle de la somme géométrique.

$$\frac{1-t^{2n+1}}{t^2-1} = \sum_{k=0}^{2n} t^{2k}.$$

Par intégration et linéarité d'intégrales convergentes

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = -\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 t^{2k}\ln(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{(t)t^{2n+1}}{t+1}\,\mathrm{d}t.$$

Par une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^1 t^{2k}\ln(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Le résultat s'en déduit lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

30. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{S} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} &= \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{+\infty}\frac{1}{k^2} + \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\\ &= \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\\ &= \frac{1}{4}\cdot\mathrm{S} + \frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

Cette équation implique bien

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

31-34. C'est exactement le sujet de noël!

35. On a

$$f_{\mathrm{X}}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{F}_{\mathrm{X}}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1.$$

Or on aussi pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}1-\mathrm{F}_{\mathrm{X}}(x) = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{\pi} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &= \frac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi}\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Et donc

$$\left(1-\mathrm{F}_{\mathrm{X}}(x)\right)^n \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi^n}\frac{1}{x^n}.$$

On conclut par produit d'équivalents.

36. La fonction $x \longmapsto x f_{\widehat{\mathrm{X}}_{n+1}}(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\widehat{\mathrm{X}}_{n+1}}(x)\,\mathrm{d}x$$

est une intégrale généralisée en $\pm\infty$. Par le critère d'équivalence d'intégrales de fonctions positives et le critère de Riemann justifie la convergence absolue de l'intégrale. On en déduit l'existence de l'intégrale.

37. On vérifie que la fonction $x \longmapsto x f_{\widehat{\mathrm{X}}_{n+1}}(x)$ est impaire. Dès lors

$$\mathbf{E}(\widehat{\mathrm{X}}_{n+1}) = 0.$$

38. Reprendre le cours : si X est une variable aléatoire à densité f_{X}, alors pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, la variable $\mathrm{Y} = a\mathrm{X}$ est à densité et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{\mathrm{Y}}(t) = \frac{1}{|a|}f_{\mathrm{X}}\left(\frac{t}{a}\right).$$

Le résultat s'en déduit.

39. On a

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}x\right)\right)^2\right]^n\\ &= \frac{1}{4^n}\left[1 - \frac{4}{\pi^2}\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}x\right)\right)^2\right]^n\\ &= \frac{1}{4^n}\exp\left(n\ln\left(1-\frac{4}{\pi^2}\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}x\right)\right)^2\right)\right).\end{aligned}$$

Par continuité de la fonction arctangente

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donne

$$\mathrm{Arctan}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}x\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Arctan}(0) = 0..$$

Ensuite

$$\begin{aligned}&n\ln\left(1-\frac{4}{\pi^2}\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}x\right)\right)^2\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -n\frac{4}{\pi^2}\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}x\right)\right)^2\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{4n}{\pi^2}\frac{\pi^2}{4(2n+1)}x^2\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x^2}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{x^2}{2}.\end{aligned}$$

Par continuité de l'exponentielle,

$$\left[1-\frac{4}{\pi^2}\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}x\right)\right)^2\right]^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

En conclusion

$$\begin{aligned} f_{W_{n+1}}(x) &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2\sqrt{2n}} \frac{2^{2n+1}}{\sqrt{\pi n}} \frac{1}{4^n} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \end{aligned}$$

40.a)

```
def mediane(n):
    x=rd.normal(0,1,2*n+1)
    y=rd.normal(0,1,2*n+1)
    z=np.sort(x/y)
    coeff=2*(2*n+1)**(1/2)/np.pi
    return coeff*z[n]
    # attention au décalage d'indice
```

40.b)

```
plt.clf()
n=10
Ech=np.zeros(2000)
for i in range(2000):
    Ech[i]=mediane(n)
m=np.min(Ech)
M=np.max(Ech)

plt.hist(Ech,20,density=True)
x=np.linspace(m,M,200)
y=np.exp(-x**2/2)/(2*np.pi)**(1/2)
plt.plot(x,y)
plt.show()
```