ECG 2

Révisions

Exercice 10. ✦✦ **Autour de la loi de Fréchet**

Soit $s \in \mathbb{R}_*^+$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Fréchet de paramètre s, noté $\mathscr{F}(s)$, si sa fonction de répartition est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_s(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(\frac{x}{s}\right)^{-1}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Démontrer que : Si $U \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$ (loi uniforme continue) alors $s(-\ln(U))^{-1} \hookrightarrow \mathscr{F}(s)$.

2. Est-ce qu'une loi de Fréchet admet une espérance ? une variance ?

3. Écrire un programme qui prend en argument s et simule une loi de Fréchet de paramètre s.

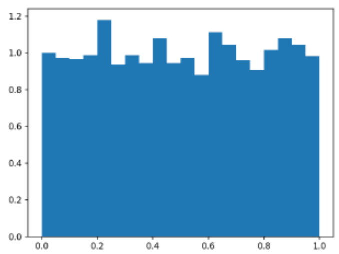
4. *Loi d'un maximum de loi de Fréchet*
Soient $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et toutes suivantes une loi de Fréchet de paramètre s. On pose

$$Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Écrire une fonction Python **MaxFrechet** qui prend en argument s, n et un entier naturel m et renvoie un échantillon de taille m de la variable Y_n.

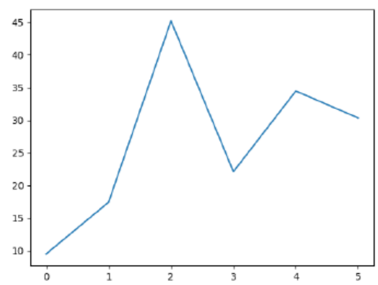
5. À l'aide du code suivant et des résultats numériques. Conjecturer la loi de Y_n.

Editeur
```python
def Truc(s,n):
    plt.clf()
    Ech=MaxFrechet(s,n,5000)
    L=np.exp(-(Ech/(n*s))**(-1))

    plt.hist(L,20,density=True)
    plt.show()
```



6. Quelle propriété de la loi de Fréchet illustre le code et les résultats suivants ?

Editeur
```python
L=[]

for p in range(2,8):
    S=0
    for k in range(1,10**p):
        S+=frechet(1)
    L.append(S/10**p)
plt.plot(L)
plt.show()
```



```
L=[9.52163, 17.43712, 45.20899, 22.11409,
    34.46171, 30.32867]
```

Code sujet : 666

Conception : HEC Paris

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Mardi 30 janvier
10h-13h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans tout le problème :

- On note n et k deux entiers vérifiant $2 \leqslant k \leqslant n$ et E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle_E$ qui en fait un espace euclidien.
- On note 0_E et $0_{\mathcal{L}(E)}$ respectivement, le vecteur nul et l'endomorphisme nul de E et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. L'endomorphisme identité de E est noté id_E.
- Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on note $F^\perp$ l'orthogonal de F et p_F le *projecteur orthogonal d'image* F, c'est-à-dire l'unique endomorphisme de E vérifiant : $\forall x \in F,\ p_F(x) = x$ et $\forall x \in F^\perp,\ p_F(x) = 0_E$.
- On note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes ($m \geqslant 1$) à cœfficients réels. La transposée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ est notée ${}^tA$.
- Pour tout $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k) \in \mathbf{R}^k$, on note $\mathrm{Diag}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_k(\mathbf{R})$ dont les cœfficients diagonaux sont, dans cet ordre, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$.
- On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On rappelle que la *somme* de k sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \ldots, F_k$ de E est le sous-espace vectoriel de E, noté $\sum_{i=1}^{k} F_i$, défini par : $\sum_{i=1}^{k} F_i = \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i;\ (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_k \right\}$.

On rappelle aussi que les sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \ldots, F_k$ sont en *somme directe* si chaque vecteur de $\sum_{i=1}^{k} F_i$ n'admet qu'une seule décomposition de la forme précédente. Dans ce cas, et seulement dans ce cas, la somme des sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \ldots, F_k$ est notée $\bigoplus_{i=1}^{k} F_i$.

L'objet de ce problème est la mise en évidence de quelques propriétés algébriques dont les conséquences probabilistes fondent les tests statistiques qui permettent de mesurer l'influence effective d'une ou plusieurs variables explicatives sur une variable endogène.

La partie II est indépendante de la partie I.

Partie I. Partitions de l'identité.

Soit k endomorphismes $u_1, u_2, \dots, u_k$ de E. On dit que $u_1, u_2, \dots, u_k$ constituent une *partition de l'identité de E* si : $u_1 + u_2 + \cdots + u_k = \mathrm{id}_E$.

1. *Exemple 1.* Dans cette question, $n = 3$ et $E = \mathbf{R}^3$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

   a) Préciser le spectre de la matrice A et montrer que A n'est pas diagonalisable.

   b) Montrer que le polynôme $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $Q(X) = X^3 + X^2$ est un polynôme annulateur de A.

   c) Existe-t-il un polynôme de degré 2 annulateur de A ?

   d) Trouver deux polynômes Q_1 et Q_2 de $\mathbf{R}[X]$ pour lesquels les deux endomorphismes $Q_1(f)$ et $Q_2(f)$ sont des projecteurs et constituent une partition de l'identité de $\mathbf{R}^3$.

2. *Exemple 2.* On considère dans cette question un endomorphisme f de E diagonalisable et possédant k valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.

   Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note :

   - $L_i(X)$ le polynôme de $\mathbf{R}[X]$ défini par $L_i(X) = \prod_{\substack{j \in [\![1,k]\!] \\ j \neq i}} \left(\dfrac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right)$;
   - $E_{\lambda_i}(f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i ;
   - v_i l'endomorphisme de E défini par $v_i = L_i(f)$.

   a) Justifier l'égalité : $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(f)$. En déduire que $\prod_{j=1}^{k} (X - \lambda_j)$ est un polynôme annulateur de f.

   b) Établir pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, l'inclusion : $\mathrm{Im}(v_i) \subset E_{\lambda_i}(f)$.

   c) Pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, calculer la somme : $\sum_{i=1}^{k} L_i(\lambda_j)$. En déduire que les endomorphismes $v_1, v_2, \dots, v_k$ constituent une partition de l'identité de E.

   d) Établir pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, l'égalité : $\mathrm{Im}(v_i) = E_{\lambda_i}(f)$. Identifier l'endomorphisme v_1.

3. Soit k endomorphismes $u_1, u_2, \dots, u_k$ de E qui constituent une partition de l'identité de E.

   Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note r_i le rang de u_i.

   a) Établir les relations : $E = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(u_i)$ et $n \leqslant \sum_{i=1}^{k} r_i$.

   b) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(u_1), \mathrm{Im}(u_2), \dots, \mathrm{Im}(u_k)$ sont en somme directe si et seulement si on a : $n = \sum_{i=1}^{k} r_i$.

   c) Dans cette question, on cherche à montrer l'équivalence des propriétés (1), (2) et (3) suivantes :

   (1) $n = \sum_{i=1}^{k} r_i$.

   (2) Les endomorphismes $u_1, u_2, \dots, u_k$ sont des projecteurs.

   (3) Pour tout $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$, avec $i \neq j$, on a : $u_i \circ u_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

   (*i*) En utilisant la trace des matrices de projecteurs, justifier l'implication (2) $\Longrightarrow$ (1).

   (*ii*) À l'aide de la question 3.b) et en écrivant, pour $x \in E$, les vecteurs $u_1(x), u_2(x), \dots, u_k(x)$ comme des sommes de k vecteurs, établir l'implication (1) $\Longrightarrow$ (3).

   (*iii*) Conclure en établissant une troisième implication.

Partie II. Représentation matricielle d'un projecteur orthogonal.

4.a) Soit p un endomorphisme de E et P la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$. À quelles conditions nécessaires et suffisantes sur P, l'endomorphisme p est un projecteur orthogonal ?

4.b) Soit f un endomorphisme de E et M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Établir l'existence d'un réel α et d'un projecteur orthogonal p tels que $f = \alpha p$, si et seulement si on a : $\mathrm{tr}(\mathrm{M})\mathrm{M}^2 = \mathrm{tr}\left(\mathrm{M}^2\right)\mathrm{M}$ et ${}^t\mathrm{M} = \mathrm{M}$, où $\mathrm{tr}(\mathrm{M})$ et $\mathrm{tr}\left(\mathrm{M}^2\right)$ sont les traces respectives de M et M^2.

5.a) Écrire en python une fonction d'entête `def Tr(A)` qui calcule la trace d'une matrice carrée A.

5.b) Compléter la fonction `issym` suivante qui prend en argument une matrice A et renvoie un message d'errur si la matrice n'est pas carrée, puis 1 si A est symétrique, 0 si elle n'est pas symétrique.

Editeur

```
def issym(A):
    [n,p]=np.shape(A)
    if ... :
        return print('erreur... la matrice n est pas carrée')


    for i in range(...):
        for j in range(...):
            if ... :
                return 0
    return 1
```

5.c) La fonction `orthoproj` suivante, dont une ligne de code est incomplète, permet de tester si, pour une matrice carrée M de taille n donnée, il existe un réel α et un projecteur orthogonal p pour lesquels M est la matrice de l'endomorphisme αp dans une base orthonormale. Cette fonction utilise les deux fonctions précédentes (questions 5.a) et 5.b)) et s'appuie sur la condition nécessaire et suffisante de la question 4.b)).

Editeur

```
def orthoproj(M):
    A=Tr(M)*np.dot(M,M)
    B=Tr(np.dot(M,M))*M
    Reponse=issym(M)

    if Reponse==1 :

        for i in range(n):
            for j in range(n):

                Reponse= ...

    return Reponse
```

Les définitions et notations suivantes concernent les questions 6 à 9 . Pour tout vecteur $x \in \mathrm{E}$, on note X la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{F} = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ une famille de k vecteurs de E et F le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{F}$.
On note S la matrice de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbf{R})$ dont les colonnes sont, dans cet ordre, $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \ldots, \mathrm{S}_k$.
On rappelle que p_F est le projecteur orthogonal d'image F.

6.a) Montrer que les deux matrices S et ${}^t\mathrm{SS}$ ont le même rang.

6.b) Soit $y \in \mathrm{E}$. Montrer que $y \in \mathrm{F}$ si et seulement si il existe une matrice $\mathrm{Z} \in \mathcal{M}_{k,1}$ (R) telle que $\mathrm{Y} = \mathrm{SZ}$.

6.c) Soit $y \in \mathrm{E}$. Montrer que $y \in \mathrm{F}^\perp$ si et seulement si la matrice colonne ${}^t\mathrm{SY}$ est nulle.

d) Soit $x \in E$ et $y = p_F(x)$. Établir l'existence d'une matrice $Z \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ telle que $Y = S\,Z$ et ${}^tSX = {}^tSSZ$.

e) En déduire l'expression de la matrice de p_F dans la base $\mathcal{B}$ en fonction de S lorsque la famille $\mathcal{F}$ est libre.

7. Soit M une matrice symétrique de $\mathcal{M}_k(\mathbf{R})$. On appelle *inverse de Penrose-Moore de M* toute matrice N de $\mathcal{M}_k(\mathbf{R})$ qui vérifie les quatre propriétés suivantes :

$$MNM = M\ ; \qquad NMN = N\ ; \qquad {}^t(MN) = MN\ ; \qquad {}^t(NM) = NM\,.$$

a) Établir l'existence d'une matrice $Q \in \mathcal{M}_k(\mathbf{R})$ et de réels $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ qui vérifient la relation suivante :

$$M = Q\,\mathrm{Diag}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k)\,{}^tQ\,.$$

b) On note h l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que : $\forall t \in \mathbf{R},\ h(t) = \begin{cases} 1/t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$. On note $M^{(-)}$ la matrice définie par : $M^{(-)} = Q\,\mathrm{Diag}\big(h(\rho_1), h(\rho_2), \dots, h(\rho_k)\big)\,{}^tQ$.

Montrer que $M^{(-)}$ est une inverse de Penrose-Moore de M.

c) Soit N une inverse de Penrose-Moore de M.

(*i*) Justifier les égalités : $N = M\,{}^tNN$ et $M^2N = M$.

(*ii*) Soit U une matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbf{R})$. On suppose que M^2U est nulle. Montrer que MU est nulle.

(*iii*) On pose : $U = N - M^{(-)}$. Justifier que $M^{(-)}$ est l'unique inverse de Penrose-Moore de M.

8. On note $({}^tSS)^{(-)}$ l'unique inverse de Penrose-Moore de la matrice ${}^tSS$ et on pose : $P = S\,({}^tSS)^{(-)}\,{}^tS$.

a) Montrer que les matrices P et S ont le même rang.

b) Justifier que P est la matrice de p_F dans la base $\mathcal{B}$ et que son expression généralise la formule trouvée dans la question 6.e) lorsque la famille $\mathcal{F}$ est libre.

9. *Exemple.* On suppose que : $k = 2$, $s_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $s_2 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, $s_1 \neq 0_E$ et ${}^tSS$ non inversible.

a) Établir l'existence d'un réel θ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $\beta_i = \theta\,\alpha_i$.

b) Déterminer une matrice carrée Q pour laquelle la matrice ${}^tQ\,{}^tS\,SQ$ est diagonale.

c) En déduire l'inverse de Penrose-Moore de la matrice ${}^tSS$.

d) Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ un vecteur de E. Calculer $p_F(x)$.

Partie III. Application probabiliste.

Dans cette partie, $E = \mathbf{R}^n$ et on suppose que toutes les variables aléatoires et tous les vecteurs aléatoires considérés sont définis sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Pour tout entier $d \geqslant 1$, on dit qu'une variable aléatoire C suit la *loi du khi-deux de paramètre d*, notée $\chi^2(d)$, si la variable aléatoire $\dfrac{C}{2}$ suit la loi $\gamma\Big(\dfrac{d}{2}\Big)$.

On appelle *variable gaussienne* toute variable aléatoire X qui suit une loi normale ou qui est certaine, et on note sa loi $\mathcal{G}(\mu, \sigma^2)$, où μ est l'espérance de X et σ l'écart-type de X.

Autrement dit, pour tout couple $(\mu, \sigma) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$, une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{G}(\mu, \sigma^2)$, soit lorsque $\sigma > 0$ et X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, soit lorsque $\sigma = 0$ et $\mathbf{P}\big([X = \mu]\big) = 1$.

10. Soit $(\mu, \sigma) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$ et soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Montrer que la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\Big)^2$ suit la loi $\chi^2(n)$.

Si $G_1, G_2, \dots, G_n$ sont des variables aléatoires réelles telles que pour tout $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\,G_i$ est une *variable gaussienne centrée*, alors on dit que le vecteur aléatoire $(G_1, G_2, \dots, G_n)$ est un *vecteur gaussien* et on note G la matrice colonne de composantes $G_1, G_2, \dots, G_n$.

11. Soit $(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ un vecteur gaussien, M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$ un vecteur aléatoire tel que la matrice colonne H de composantes $H_1, H_2, \ldots, H_n$ vérifie : $H = M\,G$.

a) Montrer que $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$ est un vecteur gaussien.

b) Justifier que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, la variable aléatoire $G_i\,G_j$ admet une espérance, notée $\mathbf{E}(G_i\,G_j)$.

On note alors $\Lambda(G)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par : $\Lambda(G) = \big(\mathbf{E}(G_i\,G_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et *on admet* dans la suite que la loi d'un vecteur gaussien $(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ est caractérisée par la matrice $\Lambda(G)$.

Autrement dit, si $(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ et $(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ sont deux vecteurs gaussiens vérifiant $\Lambda(G) = \Lambda(R)$, alors ils ont la même loi, c'est-à-dire : $\forall\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n,\ \mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [G_i \leqslant x_i]\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [R_i \leqslant x_i]\right)$.

12. On suppose que $G_1, G_2, \ldots, G_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

a) Montrer que $(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ est un vecteur gaussien. Déterminer $\Lambda(G)$.

b) Soit Q une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$ un vecteur aléatoire tel que la matrice colonne H de composantes $H_1, H_2, \ldots, H_n$ vérifie : $H = Q\,G$.
Montrer que les variables aléatoires $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sont mutuellement indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

13. Soit $(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ un vecteur gaussien dont les composantes $G_1, G_2, \ldots, G_n$ sont mutuellement indépendantes et de variance égale à 1.
Soit $P_1, P_2, \ldots, P_k$ des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de rangs respectifs $r_1, r_2, \ldots, r_k$.
On suppose que $\sum\limits_{i=1}^{k} P_i = I_n$ et $\sum\limits_{i=1}^{k} r_i = n$.

a) Justifier que $P_1, P_2, \ldots, P_k$ sont des matrices de projecteurs orthogonaux de $\mathbf{R}^n$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ dont les images sont deux à deux orthogonales.

b) En déduire l'existence d'une matrice orthogonale Q de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ pour laquelle chacune des matrices $QP_1{}^tQ,\ QP_2{}^tQ, \ldots,\ QP_k{}^tQ$ est diagonale.

c) On suppose que $r_1 \neq 0$. Montrer que la variable aléatoire ${}^tGP_1G$ suit la loi $\chi^2(r_1)$.

d) Montrer que les variables aléatoires ${}^tGP_1G,\ {}^tGP_2G, \ldots,\ {}^tGP_kG$ sont mutuellement indépendantes.

14. Soit q et m deux entiers supérieurs ou égaux à 2 et $(X_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ une famille de $q{\times}m$ variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

On pose : $\overline{X} = \dfrac{1}{q{\times}m}\sum\limits_{i=1}^{q}\sum\limits_{j=1}^{m} X_{i,j}$ et pour tout $j \in [\![1,m]\!]$, $Z_j = \dfrac{1}{q}\sum\limits_{i=1}^{q} X_{i,j}$.

a) Déterminer les lois respectives des variables aléatoires $\overline{X}$ et $\sum\limits_{i=1}^{q}\sum\limits_{j=1}^{m}(X_{i,j} - \overline{X})^2$ et établir l'indépendance de ces deux variables aléatoires.

b) Déterminer les lois respectives des variables aléatoires $\sum\limits_{i=1}^{q}\sum\limits_{j=1}^{m}(X_{i,j} - Z_j)^2$ et $q\sum\limits_{j=1}^{m}(Z_j - \overline{X})^2$ et établir l'indépendance de ces deux variables aléatoires.

ESSEC

MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2001

Option scientifique

MATHEMATIQUES I

Mercredi 2 Mai 2001 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

On étudie dans ce problème la suite (S_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} \quad \text{c'est à dire} \quad S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}.$$

Dans la partie I, on détermine la limite S de la suite (S_n). Dans les parties II et III, on explicite deux méthodes indépendantes permettant d'accélérer la convergence de (S_n) vers S.

PARTIE I

On considère pour tout nombre entier $p \geq 0$ les deux intégrales suivantes :

$$I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(t)dt \qquad ; \qquad J_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2p}(t)dt.$$

1°) Convergence de la suite (J_p/I_p)

a) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre réel t tel que $0 \leq t \leq \pi/2$:

$$t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t).$$

b) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $p \geq 0$:

$$0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4}(I_p - I_{p+1}).$$

c) Exprimer I_{p+1} en fonction de I_p en intégrant par parties l'intégrale I_{p+1} (on pourra poser $u'(t) = \cos(t)$ et $v(t) = \cos^{2p+1}(t)$ dans l'intégration par parties).

d) Déduire des résultats précédents que J_p/I_p tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

2°) Convergence et limite de la suite (S_n)

a) Exprimer I_p en fonction de J_p et J_{p-1} en intégrant deux fois par parties l'intégrale I_p $(p \geq 1)$.

b) En déduire la relation suivante pour $p \geq 1$:

$$\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}.$$

c) Calculer J_0 et I_0, puis déterminer la limite S de la suite (S_n).

PARTIE II

On accélère ici la convergence de la suite (S_n) vers sa limite S par une méthode due à Stirling. On désigne par :

- E l'espace vectoriel des fonctions continues de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $+\infty$.
- f_k la fonction de E définie pour tout nombre entier naturel k par :

$$f_0(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f_k(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+k)} \text{ pour } k \geq 1.$$

- Δ l'application associant à toute fonction f de E la fonction Δf définie pour $x > 0$ par :

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

1°) Sommation de séries télescopiques

a) Etablir que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

b) Etablir pour toute fonction f appartenant à E la convergence de la série $\Sigma(\Delta f)(p)$ avec $p \geq 1$ et calculer pour tout nombre entier naturel n les sommes suivantes :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} (\Delta f)(p) \quad ; \quad \sum_{p=n+1}^{+\infty} (\Delta f)(p).$$

c) Exprimer Δf_{k-1} en fonction de k et de f_k pour $k \geq 1$.

d) Etablir pour tout nombre entier naturel $k \geq 1$ la convergence de la série $\Sigma f_k(p)$ et vérifier pour tout nombre entier naturel n que :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{1}{k} \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}.$$

2°) Accélération de la convergence de (S_n)

a) Etablir la relation suivante pour $p \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} (k-1)! f_k(p) = \frac{q!}{p} f_q(p).$$

b) En déduire l'inégalité suivante pour $n \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} \frac{(k-1)!}{k(n+1)\dots(n+k)} \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q)}.$$

c) En déduire, l'entier $q \geq 1$ étant fixé, une suite (S_n') de nombres rationnels telle que :

$$0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S_n' \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q)}.$$

Expliciter S_n' et l'inégalité précédente lorsque $q = 2$.

d) Écrire en python une fonction d'argument n, calculant et affichant S'_n pour $q = 2$.

PARTIE III

On accélère ici la convergence de la suite (S_n) vers sa limite S en effectuant un développement limité de S_n suivant les puissances de $1/n$.

1°) Démontrer qu'il existe une et une seule suite de nombres réels (u_n) telle que $u_0 = 1$ et

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{u_{n-p}}{p!} = 0 \quad \text{pour tout nombre entier } n \geq 2.$$

Etablir que les u_n sont rationnels et donner u_1, u_2, u_3, u_4 sous forme de fraction irréductible

2°) <u>Etude des polynômes de Bernoulli</u>

a) On considère la suite de polynômes (U_n) définie par :

$$U_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad U_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{u_{n-p}x^p}{p!} \quad \text{pour tout nombre entier } n \geq 1.$$

- Préciser U_1, U_2, U_3, U_4.
- Montrer que $U_n{}' = U_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $U_n(0) = U_n(1)$ pour $n \geq 2$.

b) On considère une suite de polynômes (V_n) définie par :

$$V_0 = 1, \quad V_n{}' = V_{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \quad \text{et} \quad V_n(0) = V_n(1) \text{ pour } n \geq 2.$$

- Etablir que $V_n^{(p)}(0) = V_{n-p}(0)$ pour $0 \leq p \leq n$ et en déduire la formule suivante :

$$V_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{V_{n-p}(0)x^p}{p!}.$$

- Etablir la formule suivante pour tout nombre entier $n \geq 2$:

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{V_{n-p}(0)}{p!} = 0.$$

- Etablir enfin que $V_n = U_n$ pour tout nombre entier naturel n.

c) En déduire l'égalité $U_n(x) = (-1)^n U_n(1-x)$ pour tout nombre entier naturel n.
Montrer alors que $u_{2p+1} = 0$ si $p \geq 1$.

3°) <u>Accélération de la convergence de (S_n)</u>

a) Etablir pour $p \geq 1$ la relation suivante, d'abord en supposant $q = 1$, puis $q \geq 1$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2}\right) + \sum_{k=1}^{q} (2k)!u_{2k}\left(\frac{1}{p^{2k+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k+1}}\right) = (2q+2)!\int_0^1 \frac{U_{2q+1}(x)dx}{(x+p)^{2q+3}}.$$

b) En déduire l'inégalité suivante pour $n \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$\left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \sum_{k=1}^{q} \frac{(2k)!u_{2k}}{n^{2k+1}} \right| \leq \frac{(2q+1)!M_{2q+1}}{n^{2q+2}}$$

où M_{2q+1} désigne le maximum de la fonction continue $x \to |U_{2q+1}(x)|$ sur le segment $[0, 1]$.

c) En déduire, l'entier $q \geq 1$ étant fixé, une suite (S_n'') de nombres rationnels telle que :

$$\left| \frac{\pi^2}{6} - S_n'' \right| \leq \frac{(2q+1)!M_{2q+1}}{n^{2q+2}}.$$

Expliciter S_n'' et l'inégalité précédente lorsque $q = 2$.

d) Écrire en python une fonction d'argument n, calculant et affichant S_n'' pour $q = 2$.