DS 6 - CB A

THÈMES : ALGÈBRE BILINÉAIRE, PROBABILITÉS DISCRÈTES

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Problème I : Minimisation via les polynômes de Lagrange

Dans tout le problème, n est un entier naturel fixé non nul, $(x_i)_{n\in[\![0,n]\!]}$ désigne une famille finie de nombres réels distincts deux à deux, $(y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une famille finie de $n+1$ nombres réels quelconques.

L'objectif de ce premier problème est de déterminer, pour tout entier naturel k, les polynômes de degré inférieur ou égal à k tels que la quantité $\Delta_k(\mathrm{P}) = \sum_{i=0}^{n}\left(y_i - \mathrm{P}(x_i)\right)^2$ soit minimale et de préciser la valeur m_k de ce minimum.

Partie I : Étude des applications Φ_k

Pour tout entier naturel k, on définit l'application $\Phi_k : \mathbb{R}_k[x] \to \mathbb{R}^{n+1}$ qui, à tout polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_k[x]$ fait correspondre le vecteur

$$\Phi_k(\mathrm{P}) = \left(\mathrm{P}(x_0), \mathrm{P}(x_1), \dots, \mathrm{P}(x_n)\right) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

1. Montrer que $\Phi_k \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}_k[x], \mathbb{R}^{n+1}\right)$.

2. **a)** Déterminer le noyau de l'application Φ_k, en discutant suivant les valeurs de l'entier k par rapport à l'entier n.

b) Vérifier que la dimension du noyau est donnée par $\max\{0; k-n\}$.

3. Préciser le rang de Φ_k. Pour quelles valeurs de l'entier k, l'application Φ_k est-elle surjective ? un isomorphisme ?

Partie II : Étude préliminaire, le cas $k \geqslant n$

4. Déduire des questions précédentes l'existence et l'unicité d'un polynôme Y appartenant à $\mathbb{R}_n[x]$, tel que, pour tout $i \in [[0;n]]$ soit vérifiée la relation $\mathrm{Y}(x_i) = y_i$.
Cette notation du polynôme Y *associé à la suite* $(y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ *est conservée dans la suite.*

Soient $e_0 = (1,0,\dots,0)$, $e_1 = (0,1,\dots,0)$, ..., $e_n = (0,\dots,0,1)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.
Soit $\mathscr{L} = (\mathrm{L}_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$ telle que, pour $i \in [\![0,n]\!]$,

$$\forall\, j \in [\![0,n]\!], \qquad \mathrm{L}_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

5. Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, comparer $\Phi_n(\mathrm{L}_i)$ et e_i. En déduire que $\mathscr{L}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

6. En remarquant que $\Phi_n(\mathrm{P}) = \sum_{i=0}^{n}\mathrm{P}(x_i)e_i$, donner les coordonnées d'un polynôme P quelconque de $\mathbb{R}_n[x]$ dans la base $\mathscr{L}$? puis les coordonnées du polynôme Y dans la base $\mathscr{L}$?

7. On suppose dans cette question seulement que k est supérieur ou égal à n. Déterminer la valeur du minimum m_k.
Quels sont le ou les polynômes P de $\mathbb{R}_n[x]$ pour lesquels ce minimum de $\Delta_k(\mathrm{P})$ est atteint ?

Partie III : Interprétation de m_k lorsque $k \leqslant n$

Dans toute la suite l'entier k est supposé inférieur ou égal à l'entier n.
Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[x]$, on pose

$$\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \sum_{\ell=0}^{n}\mathrm{P}(x_\ell)\,\mathrm{Q}(x_\ell).$$

8. Justifier que l'application $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_n[x]^2 \mapsto \langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle$ est un produit scalaire dans $\mathbb{R}_n[x]$ et que la famille $\left(\mathrm{L}_i\right)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est orthonormée pour ce produit scalaire.
Dans tout ce qui suit, l'espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ *est muni de ce produit scalaire. On note* $\|\cdot\|$, *la norme associé à ce produit scalaire. On notera indifféremment* $\langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle$ *et* $\langle \mathrm{P}(x),\mathrm{Q}(x)\rangle$.

9. Soit Y le polynôme de l'espace $\mathbb{R}_n[x]$ associé à la suite $\left(y_i\right)_{i\in[\![0,n]\!]}$ (question 4). Exprimer, avec les notations précédentes, $\Delta_k(\mathrm{P})$ en fonction de Y et de P.

10. En déduire l'existence et l'unicité d'un polynôme P_k appartenant à $\mathbb{R}_k[x]$ pour lequel le réel $\Delta_k\left(\mathrm{P}_k\right)$ est égal à son minimum m_k : $m_k = \left\|\mathrm{Y}-\mathrm{P}_k\right\|^2$. Qu'est le polynôme P_k par rapport à Y et $\mathbb{R}_k[x]$?

11. Démontrer que la suite finie $(m_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est décroissante.

12. Justifier que $m_k = \|\mathrm{Y}\|^2 - \left\|\mathrm{P}_k\right\|^2$. Préciser $\left\langle \mathrm{Y}(x)-\mathrm{P}_k(x), x^\ell\right\rangle$ pour tout $\ell \in [\![0;k]\!]$.

Dans la suite, on définit les moyennes empiriques, variance empirique et covariance empirique de $x = (x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ et $y = (y_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ par

$$\overline{x} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} x_i,\quad \overline{y} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} y_i,\quad \sigma_x^2 = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} {x_i}^2\right) - \overline{x}^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{Cov}(x,y) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} x_i y_i\right) - \overline{x}\cdot\overline{y}.$$

- *Cas particulier $k=0$*

13. Expliciter la valeur du polynôme constant P_0 et celle m_0. *On donnera le résultat à l'aide de moyenne et variance empirique.*

14. Retrouver l'expression de P_0 en étudiant la fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{i=0}^{n} (y_i - t)^2$.

- *Cas particulier $k=1$*

15. Vérifier que : $\qquad \forall\, t \in \mathbb{R},\quad \mathrm{P}_1(t) = \dfrac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\sigma_x^2}(t-\overline{x}) + \overline{y}.$

16. Vérifier ce résultat en donnant les dérivées partielles d'ordre 1 et le point critique de la fonction $\mathrm{F} : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sum_{i=0}^{n} \left(y_i - (a x_i + b)\right)^2$.

- *Informatique*

En python, on peut coder un polynôme $\mathrm{P} = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ de $\mathbb{R}_k[x]$ à l'aide de la liste de ses coefficients :

$$\mathrm{L} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_k \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, la commande `L[i]` renvoie le coefficient de P de degré i.

17. Compléter la fonction suivante qui prend en arguments une matrice ligne L (codant un polynôme P), un réel a puis renvoie $\mathrm{P}(a)$.

Editeur

```
def evaluation( ... ):
    m=len(L)        # m=deg(P)+1
    s=0
    for i ... :
        ...
    return s
```

18. **a)** En déduire une fonction python d'entête `def scalaire` qui prend en arguments l'entier n, deux matrices lignes codant deux polynômes P, Q de $\mathbb{R}_n[x]$ et renvoie la valeur du produit scalaire $\langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle$ défini précédemment sur $\mathbb{R}_n[x]$ (on rappelle le choix $x_i = i$).

b) Comment obtenir une fonction `norme` qui prend en argument un polynôme P et renvoie sa norme ?

19. Modifier la fonction précédente pour obtenir une nouvelle fonction python d'entête `def scalaireY` qui prend en argument une matrice ligne Q et la matrice ligne $[y_i]_{i[\![0;n]\!]}$ et qui rend le produit scalaire du polynôme Y de $\mathbb{R}_n[x]$ tel que $\mathrm{Y}(i) = y_i$ de la question 4 et du polynôme Q.

Partie IV : Calcul de m_k

Dans cette dernière partie, on continue à se placer dans le cas particulier $x_i = i$ pour $i \in \mathbb{N}$.

- *Exemple d'endomorphisme symétrique*

20. Dans la suite, on considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ qui a tout polynôme P associe le polynôme $\varphi(\mathrm{P})$ donné par

$$\varphi(\mathrm{P})(x) = \mathrm{P}(n-x).$$

a) Justifier que φ est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire donné en début de partie III.

b) Montrer que pour tout $k \in \{0; n\}$, $\mathbb{R}_k[x]$ est stable par φ. *On note* $\varphi_k : \mathbb{R}_k[x] \to \mathbb{R}_k[x]$ *la restriction de* φ *à* $\mathbb{R}_k[x]$.

c) Préciser $\varphi \circ \varphi$, que peut-on en déduire sur le spectre ?

21. Justifier que pour tout indice $k \in [\![0; n]\!]$, φ_k est diagonalisable. En déduire l'existence et l'unicité d'une base $\mathscr{B} = (\mathrm{B}_0, \mathrm{B}_1, \dots, \mathrm{B}_n)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$ vérifiant les trois conditions :

i) Le polynôme B_0 est égal à 1.

ii) Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, la suite $(\mathrm{B}_0, \mathrm{B}_1, \dots, \mathrm{B}_k)$ est une base du sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_k[x]$ telle que les polynômes $(\mathrm{B}_i)_{i \in [\![0,k]\!]}$ soient deux à deux orthogonaux (en particulier les polynômes B_i sont de degré i).

iii) Pour $k \in \mathbb{N}$, le coefficient du terme de plus haut degré de B_k est $\binom{2k}{k}$.

22. Justifier que $\mathrm{B}_1(x) = 2x - n$.

- *Expressions de* P_k *et* m_k

23. Justifier que pour tout $k \in [\![0; n]\!]$

$$\mathrm{P}_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{\langle \mathrm{P}_k, \mathrm{B}_i \rangle}{\|\mathrm{B}_i\|^2} \mathrm{B}_i \quad \text{puis} \quad \mathrm{P}_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{\langle \mathrm{Y}, \mathrm{B}_i \rangle}{\|\mathrm{B}_i\|^2} \mathrm{B}_i.$$

24. En déduire, pour tout entier k compris entre 1 et n, les relations :

$$\mathrm{P}_k = \mathrm{P}_{k-1} + \frac{\langle \mathrm{B}_k, \mathrm{Y} \rangle}{\|\mathrm{B}_k\|^2} \mathrm{B}_k \quad \text{et} \quad m_k = m_{k-1} - \frac{\langle \mathrm{B}_k, \mathrm{Y} \rangle^2}{\|\mathrm{B}_k\|^2}.$$

- *Informatique*

25. **a)** Vérifier que pour tout entier naturel n non nul, $\binom{2n}{n} = (4 - 2/n)\binom{2(n-1)}{n-1}$.

b) En déduire un programme qui prend en argument un entier naturel n et renvoie $\binom{2n}{n}$.

26. **a)** Pour $k \in [\![1; n]\!]$, en étudiant le projeté orthogonal de $\binom{2k}{k} x^k$ sur $\mathbb{R}_{k-1}[x]$, montrer que

$$\mathrm{B}_k = \binom{2k}{k} x^k - \binom{2k}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle x^k, \mathrm{B}_i \rangle}{\|\mathrm{B}_i\|^2} \mathrm{B}_i.$$

b) Compléter la fonction `PolyB` fournie en annexe qui prend en argument n et renvoie une matrice $\mathrm{BB} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont la $k+1$-ème ligne code le polynôme B_k. Ainsi la commande `B[k,:]` renvoie une matrice ligne codant le polynôme B_k.

c) Compléter la fonction `Mk` qui prend en arguments n et Y puis renvoie la matrice ligne

$$\begin{bmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & \dots & m_n \end{bmatrix}.$$

d) En adaptant le programme précédent, écrire une fonction `Pk` qui prend en arguments n et Y puis renvoie une matrice $\mathrm{PP} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont la $k+1$-ème ligne code le polynôme P_k.

Problème II : prends-en de la graine

Une plante produit au cours de sa vie N graines. Chaque graine se développe indépendamment des autres et a une probabilité $p \in]0; 1[$, de germer et de donner un descendant.
La génération initiale g_0 est supposée composée d'une seule plante P_0, la génération g_{n+1} est formée des Z_{n+1} descendants directs $\{\mathrm{P}_{n+1,i}\}_{i \in [\![1,\mathrm{Z}_{n+1}]\!]}$ des plantes $\{\mathrm{P}_{n,i}\}_{i \in [\![1,\mathrm{Z}_n]\!]}$ de la génération g_n.
On suppose que, pour tout entier n les nombres de descendants directs des différentes plantes $(\mathrm{P}_{n,i})_{i \in [\![1,\mathrm{Z}_n]\!]}$ de la génération g_n constituent des variables aléatoires indépendantes.
On note $q = 1 - p$.

Partie I : Premiers résultats et deux cas limites.

27. Reconnaître la loi de probabilité de la variable aléatoire Z_1. Préciser son espérance et sa variance.

28. On note A_n l'événement "l'effectif de la population g_n (ou celui d'une génération antérieure) est nul" et a_n sa probabilité.

- **a)** Préciser a_0 et a_1.
- **b)** Pour tout $k \in [[1;N]]$, comparer $\mathbf{P}_{[Z_1=k]}(A_n)$ et ${a_{n-1}}^k$.
- **c)** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = \left(pa_{n-1} + q\right)^N.$$

29. Comparer les événements A_n et A_{n+1}. En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

30. Justifier que si $Np < 1$ alors la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à 1. Comment interpréter ce résultat ?

31. Justifier que $Z_n(\Omega) \subset [[0;N^n]]$. Donner la probabilité $\mathbf{P}(Z_n = N^n)$.

Partie II : La fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $\left\{b_1, b_2, \ldots, b_q\right\}$ de $\mathbb{N}$, on lui associe la fonction G_X, appelée fonction génératrice de X, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G_X(t) = \sum_{k=1}^{q} \mathbf{P}\left(X = b_k\right) t^{b_k}$$

32. Justifier que G_X est dérivable et préciser sa dérivée. Déterminer $t_0 \in \mathbb{R}$ pour lequel $G_X'(t_0) = \mathbf{E}(X)$.

33. Montrer que pour tout réel t strictement positif fixé, le nombre $G_X(t)$ est égal à l'espérance de la variable aléatoire t^X.

34. En déduire que la fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes (prenant un nombre fini de valeurs entières positives) est le produit des fonctions génératrices associées à ces variables.

Partie III : Une application des fonctions génératrices

On suppose, dans cette question et la suivante, que la population g_1 est constituée de k plantes $\left(P_{1,i}\right)_{i\in[\![1,k]\!]}$.

35. Pour un entier n fixé, on note alors $W_{n,k}$ la variable aléatoire égale à l'effectif de la génération g_n. Montrer que la variable aléatoire $W_{n,k}$ peut s'écrire comme somme de k variables $\left\{Z_{n-1,i}\right\}_{i\in[\![1,k]\!]}$ aléatoires indépendantes suivant la même loi que Z_{n-1}.

36. Exprimer la fonction génératrice $G_{W_{n,k}}$ de la variable aléatoire $W_{n,k}$ au moyen de la fonction génératrice $G_{Z_{n-1}}$.

37. En utilisant les deux questions précédentes et la formule des probabilités totales à partir du système complet d'événements $\left([Z_1 = k]\right)_{k\in[[0;N]]}$, montrer l'égalité :

$$G_{Z_n} = G_{Z_1} \circ G_{Z_{n-1}}.$$

38. En déduire que $\mathbf{E}(Z_n) = (Np)^n$. Quelle est la limite de $\mathbf{E}(Z_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

39. Dans le cas $Np < 1$, montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire presque sûrement constante égale à 0.

40. Dans ce cas, est-ce que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi ?

– FIN DU SUJET A –

Voici une suite possible au premier problème (à ne pas traiter pour ce CB).

Partie V : Relation de récurrence sur les polynômes orthogonaux $(B_k)_k$

41. Soient $k \in [\![2, n-1]\!]$ et $j \in [\![0, k-2]\!]$, démontrer l'orthogonalité des polynômes $xB_k(x)$ et $B_j(x)$.

42. En déduire, pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$, l'existence de réels α_k, β_k et γ_k tels que :

$$xB_k(x) = \alpha_k B_{k-1}(x) + \beta_k B_k(x) + \gamma_k B_{k+1}(x).$$

43. En remarquant que $\langle xB_k(x), B_k(x)\rangle = \left\langle xB_k(x), (-1)^k B_{n-k}(x)\right\rangle$, exprimer $\langle xB_k(x), B_k(x)\rangle$ en fonction de $\|B_k\|$. Déterminer la valeur du réel β_k.

44. Que vaut γ_k ? En déduire la valeur du produit scalaire $\langle xB_k(x), B_{k+1}(x)\rangle$ en fonction de l'entier k et du réel $\|B_{k+1}\|^2$.

45. Déterminer le réel α_k en fonction de l'entier k et des réels $\|B_{k-1}\|^2$ et $\|B_k\|^2$. Déduire des résultats précédents la relation :

$$B_{k+1} = \frac{2k+1}{k+1}\left(B_1 B_k - \frac{k}{2k-1}\frac{\|B_k\|^2}{\|B_{k-1}\|^2} B_{k-1}\right).$$

NOM :

Annexe à rendre

26.b)

Editeur

```
def PolyB(n):
    BB=np.zeros([n+1,n+1])
    X=np.identity(n+1) # la matrice identité de taille n+1

    BB[0,0]=  ....
    for k in range(1,n+1):
        S=np.zeros(n+1)
        for i in range(k):
            ps=scalaire(n,X[k,:],BB[i,:])
            N=norme(BB[i,:])**2
            S+=ps/N*BB[i,:]

        BB[k,:]= ....

    return BB
```

26.c)

Editeur

```
def mk(n,Y):
    BB=PolyB(n)
    M=np.zeros(n+1)

    M[0]= ....

    for k in range(1,n+1):

        M[k]=M[k-1]- ....

    return M
```

26.d)

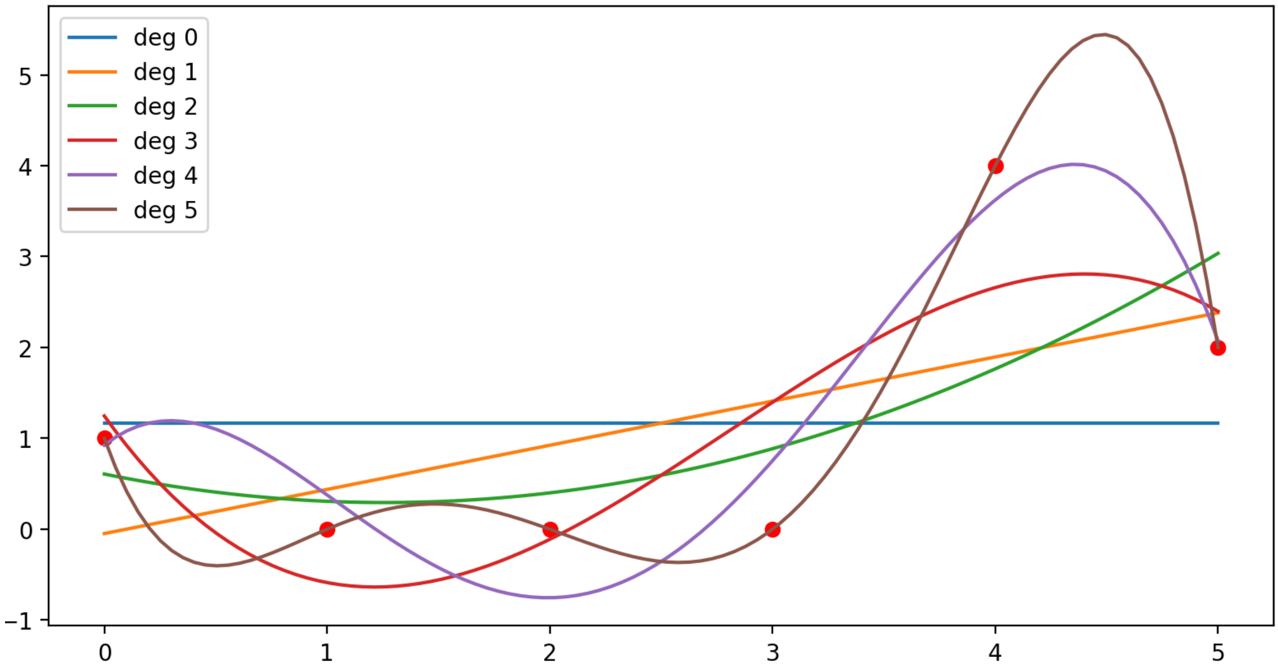
Editeur

```
def Pk(n,Y):
    BB=PolyB(n)
    PP=np.zeros([n+1,n+1])

    PP[0,0]=np.mean(Y)

    X=np.identity(n+1)

    for k in range(1,n+1):

        PP[k,:]= ....

    return PP
```

Illustration.
Voici un petit test des codes précédents où on tire au hasard Y *et on affiche les courbes des polynômes* P_k *:*

Editeur

```
plt.clf()
Y=rd.randint(0,5,6)
n=len(Y)-1
plt.plot(np.linspace(0,n,n+1),Y,'ro')
PP=Pk(n,Y)
Nbre=100
absc=np.linspace(0,n,Nbre)
for k in range(n+1):
    ordon=np.zeros(Nbre)
    for iter in range(Nbre):
        ordon[iter]=evaluation(PP[k,:],absc[iter])
    plt.plot(absc,ordon,label='deg '+str(k))
plt.legend()
plt.show()
```



DS 6 - solution

Bonus à chaque cokille trouvée!

Problème 1

1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_k[x]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\Phi_k(\lambda P + \mu Q) &= \left(\lambda P(x_0) + \mu Q(x_0), \ldots, \lambda P(x_n) + \mu Q(x_n)\right) \\ &= \lambda (P(x_0), \ldots, P(x_n)) + \mu (Q(x_0), \ldots, Q(x_n)) \\ &= \lambda \Phi_k(P) + \mu \Phi_k(Q).\end{aligned}$$

Dès lors Φ_k est bien une application linéaire de $\mathbb{R}_k[x]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

2.a) Soit $P \in \mathbb{R}_k[x]$.
$P \in \operatorname{Ker} \Phi_k$ si et seulement si $P(x_0) = \cdots = P(x_n) = 0$, si et seulement si $x_0, \ldots, x_n$ sont racines de P. On en compte $n+1$.
→ Si $k \leqslant n$ alors P a plus de racines que son dégré, le polynôme P est nul. Ainsi

$$\operatorname{Ker} \Phi_k = \{0_{\mathbb{R}_k[x]}\}.$$

→ Si $k > n$, on dispose de la factorisation

$$\prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \mid P$$

On a donc

$$\operatorname{Ker} \Phi_k = \left\{ \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) Q(x) : Q(x) \in \mathbb{R}_{k-(n+1)}[x] \right\}.$$

2.b) Lorsque $k \leqslant n$, on a directement

$$\dim \operatorname{Ker} \Phi_k = 0.$$

Lorsque $k > n$, on dispose de l'isomorphisme

$$\begin{cases} \mathbb{R}_{k-(n+1)}[x] \to \operatorname{Ker} \Phi_k. \\ \qquad Q \mapsto \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) Q(x). \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Ker} \Phi_k &= \dim \mathbb{R}_{k-(n+1)}[x] = k - (n+1) + 1 \\ &= k - n.\end{aligned}$$

Résultat que l'on peut résumer par

$$\dim \operatorname{Ker} \Phi_k = \max\{0; k - n\}$$

• *Rédaction 2.*
Pour $k > n$, on peut aussi vérifier que la famille

$$\left(\bar{P}(x), x\bar{P}(x), x^2\bar{P}(x), \ldots, x^{k-(n+1)}\bar{P}(x)\right)$$

est une base du noyau si on pose

$$\bar{P} = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

3. D'après le théorème du rang

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(\Phi_k) &= \dim \mathbb{R}_k[x] - \dim \operatorname{Ker} \Phi_k \\ &= k + 1 - \max\{0; k - n\}. \\ &= \begin{cases} k+1 & \text{si } k \leqslant n \\ n+1 & \text{si } k > n. \end{cases}\end{aligned}$$

De plus, on a toujours

$$\operatorname{Im} \Phi_k \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

avec égalité si et seulement si Φ_k est surjective. Dès lors,

$$\operatorname{rg}(\Phi_k) \leqslant n + 1$$

avec égalité si et seulement si Φ_k est surjective. Finalement Φ_k est surjective si et seulement si

$$k \geqslant n.$$

• De plus, Φ_k est un isomorphisme si et seulement si Φ_k est à la fois injective ($\operatorname{Ker} \Phi_k = \{0_{\mathbb{R}_k[x]}\}$) et surjective. Cela n'est vérifié que si :

$$k = n.$$

4. On impose

$$Y \in \mathbb{R}_n[x] \quad \text{et} \quad \Phi_n(Y) = (y_i)_{i \in [\![0;n]\!]}.$$

Comme Φ_n est un isomorphisme, il y a bien une unique solution donnée par

$$Y = \Phi_n^{-1}\left((y_i)_{i \in [\![0;n]\!]}\right).$$

5. On a directement :

$$\forall i \in [\![0; n]\!], \quad \Phi_n(L_i) = e_i.$$

Justifions que la famille $\mathscr{L}$ est libre. Soient $\lambda_0, \lambda_1 \ldots, \lambda_n$ des réels tels que

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = 0_{\mathbb{R}_n[x]}.$$

Par linéarité de Φ_n :

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \Phi_n(L_i) = \Phi_n\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i\right) = 0_{\mathbb{R}^{n+1}}.$$

Comme la base canonique est libre :

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

La famille $\mathscr{L}$ est libre, comme elle contient autant de vecteurs que la dimension, c'est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

6. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[x]$.

$$\begin{aligned}\mathrm{P} = \Phi_n^{-1}(\Phi_n(\mathrm{P})) &= \Phi_n^{-1}\left(\sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(x_i)\, e_i\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(x_i)\,\Phi_n^{-1}(e_i) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(x_i)\,\mathrm{L}_i.\end{aligned}$$

Les coordonnées dans la base $\mathscr{L}$ sont donc les nombres

$$(\mathrm{P}(x_0), \dots, \mathrm{P}(x_n)).$$

- En particulier, les coordonnées de Y dans cette base sont :

$$(\mathrm{Y}(x_0), \dots, \mathrm{Y}(x_n)) = (y_0, y_1, \dots, y_n).$$

7. Notons que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_k[x]$

$$\Delta_k(\mathrm{P}) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - \mathrm{P}(x_i))^2 \geqslant 0$$

et $$\Delta_k(\mathrm{Y}) = 0.$$

On en déduit que le minimum est bien atteint avec

$$m_k = 0.$$

De plus, on constate que le minimum est atteint en $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[x]$ si et seulement si

$$\Phi_n(\mathrm{P}) = (y_i)_{i \in [\![0;n]\!]}.$$

Il y a une unique possibilité dans $\mathbb{R}_n[x]$ donnée par $\mathrm{P} = \mathrm{Y}$.

8. Voir le cours pour la première partie.

Soient $i, j \in [\![0;n]\!]$

$$\langle \mathrm{L}_i, \mathrm{L}_j \rangle = \sum_{\ell=0}^{n} \mathrm{L}_i(x_\ell)\,\mathrm{L}_j(x_\ell) = \sum_{\ell=0}^{n} \delta_{i\ell}\delta_{j\ell}.$$

→ Si $i \neq j$, tous les termes sont nuls et $\langle \mathrm{L}_i, \mathrm{L}_j \rangle = 0$.

→ Si $i = j$, tous les termes sont nuls sauf celui obtenu pour $\ell = i = j$ qui vaut $\delta_{i\ell}\delta_{\ell j} = 1$. Il vient $\langle \mathrm{L}_i, \mathrm{L}_j \rangle = 1$.
La famille $\mathscr{L}$ est bien orthonormée.

9. On a

$$\Delta_k(\mathrm{P}) = \sum_{i=0}^{n} (\mathrm{Y} - \mathrm{P})^2(i) = \|\mathrm{Y} - \mathrm{P}\|^2.$$

10. On a donc

$$m_k = \min_{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_k[x]} \|\mathrm{Y} - \mathrm{P}\|^2.$$

Dit autrement, $\sqrt{m_k}$ représente la distance de Y au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_k[x]$.

D'après la caractérisation du projeté orthogonal par minimisation de la norme, on sait que le minimum est bien défini, il est atteint uniquement lorsque P est le projeté orthogonal de Y sur $\mathbb{R}_k[x]$. Formellement

$$\mathrm{P}_k = p_{\mathbb{R}_k[x]}(\mathrm{Y})$$

où $p_{\mathbb{R}_k[x]}$ désigne le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}_k[x]$.

11. Soit $k \in [\![0;n]\!]$, on a l'inclusion

$$\mathbb{R}_k[x] \subset \mathbb{R}_{k+1}[x].$$

Cela implique l'inégalité

$$\min_{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_k[x]} \|\mathrm{Y} - \mathrm{P}\|^2 \geqslant \min_{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{k+1}[x]} \|\mathrm{Y} - \mathrm{P}\|^2.$$

C'est-à-dire $$m_k \geqslant m_{k+1}.$$

D'où le résultat.

12. On a

$$m_k = \|\mathrm{Y} - \mathrm{P}_k\|^2.$$

Or les vecteurs $\mathrm{Y} - \mathrm{P}_k$ et P_k sont orthogonaux, donc d'après le théorème de Pythagore

$$\|\mathrm{Y}\|^2 = \|\mathrm{Y} - \mathrm{P}_k + \mathrm{P}_k\|^2 = \|\mathrm{Y} - \mathrm{P}_k\|^2 + \|\mathrm{P}_k\|^2.$$

Ainsi

$$m_k = \|\mathrm{Y}\|^2 - \|\mathrm{P}_k\|^2.$$

- De plus, par construction $\mathrm{Y} - \mathrm{P}_k \in \mathbb{R}_k[x]^\perp$. Comme $(x^\ell)_{\ell \in [\![0;k]\!]}$ est une famille de $\mathbb{R}_k[x]^\perp$, on obtient

$$\langle \mathrm{Y}(x) - \mathrm{P}_k(x), x^\ell \rangle = 0.$$

13. Comme $\mathrm{P}_0 \in \mathbb{R}_0[x]$, P_0 est un polynôme constant. Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{P}_0(x) = c.$$

Or on vient de montrer à la question précédente que

$$\langle \mathrm{Y} - \mathrm{P}_0, 1 \rangle = 0.$$

C'est-à-dire $\langle \mathrm{Y}, 1 \rangle = \langle \mathrm{P}_0, 1 \rangle$. De plus

$$\langle \mathrm{Y}, 1 \rangle = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{Y}(x_i) \times 1 = \sum_{i=0}^{n} y_i$$

et $$\langle \mathrm{P}_0, 1 \rangle = \sum_{i=0}^{n+1} \mathrm{P}_0(x_i) \cdot 1 = (n+1)c.$$

On en déduit c et P_0 :

$$\mathrm{P}_0(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} y_i = \bar{y}.$$

Ensuite $$m_0 = \|\mathrm{Y}\|^2 - \|\mathrm{P}_0\|^2 = (n+1)\sigma_y{}^2.$$

14. La fonction f est dérivable car polynomiale. Pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}f'(t) &= 2\sum_{i=0}^{n} (t - y_i) = 2(n+1)t - 2\sum_{i=0}^{n} y_i\\ &= 2(n+1)(t - \bar{y}).\end{aligned}$$

La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; \bar{y}]$, strictement croissante sur $[\bar{y}, +\infty[$ avec un minimum uniquement atteint en $t = \bar{y}$.
$\mathbb{R}_0[x]$ est l'ensemble des polynômes constants. Ainsi

$$\|\mathrm{Y} - \mathrm{P}\|^2 = f(\mathrm{P})$$

où on identifie le polynôme P avec la constante.
On retrouve le fait que le minimum est bien atteint pour le

polynôme constant égal à $\bar{y}$.

15. En reprenant la question 12 :

$$\langle P_1, 1\rangle = \langle Y(x), 1\rangle$$
$$\langle P_1(x), x\rangle = \langle Y(x), x\rangle$$

Si on écrit $P_1(x) = ax + b$, il vient :

$$\sum_{\ell=0}^{n} (ax_\ell + b)\cdot 1 = \sum_{\ell=0}^{n} y_\ell$$

et $$\sum_{\ell=0}^{n} \left(ax_\ell + b\right)\cdot x_\ell = \sum_{\ell=0}^{n} y_\ell x_\ell.$$

La première équation donne

$$b + a\bar{x} = \bar{y}.$$

La seconde s'écrit

$$a\sum_{\ell=0}^{n} {x_\ell}^2 + b\bar{x}(n+1) = (n+1)\big(\mathrm{Cov}(x,y) + \bar{x}\bar{y}\big)$$
$$\iff a\left(\sigma_x^2 + \bar{x}^2\right) + b\bar{x} = \mathrm{Cov}(x,y) + \bar{x}\bar{y}.$$

On simplifie avec la première équation

$$a\left(\sigma_x^2 + \bar{x}^2\right) + (\bar{y} - a\bar{x})\bar{x} = \mathrm{Cov}(x,y) + \bar{x}\bar{y}.$$
$$\iff a\left(\sigma_x^2 + \bar{x}^2\right) - a\bar{x}^2 = \mathrm{Cov}(x,y).$$
$$\iff a\sigma_x^2 = \mathrm{Cov}(x,y).$$
$$\iff a = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\sigma_x^2} \quad \text{car} \sigma_x \neq 0.$$

Enfin
$$P_1(x) = ax + b$$
$$= ax + \bar{y} - a\bar{x} = a(x - \bar{x}) + \bar{y}.$$

D'où le résultat.

16. F est une fonction polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^1$.

$$\partial_1 F(a,b) = 2\sum_{i=0}^{n} x_i\left(ax_i + b - y_i\right)$$
$$= 2a\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + 2b\sum_{i=0}^{n} x_i - 2\sum_{i=0}^{n} x_i y_i$$

Ainsi

$$\frac{(n+1)}{2}\partial_1 F(a,b) = a\left(\sigma_x^2 + \bar{x}^2\right) + b\bar{x} - (\mathrm{Cov}(x,y) + \bar{x}\bar{y}).$$

On a aussi

$$\partial_2 F(a,b) = 2\sum_{i=0}^{n}\left(ax_i + b - y_i\right).$$

D'où $$\frac{(n+1)}{2}\partial_2 F(a,b) = a\bar{x} + b - \bar{y}.$$

Dès lors (a,b) est point critique si et seulement si

$$\begin{cases} \partial_1 F(a,b) = 0 \\ \partial_2 F(a,b) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a\left(\sigma_x^2 + \bar{x}^2\right) + b\bar{x} = \mathrm{Cov}(x,y) + \bar{x}\bar{y} \\ a\bar{x} + b = \bar{y} \end{cases}$$

On retrouve les mêmes équations que la question précédente. Cela conforte le résultat car le minimum sur $\mathbb{R}^2$ est atteint en un point critique.

17.

```
def evaluation(L,a):
    m=len(L)        # m=deg(P)+1
    s=0
    for i in range(m):
        s+=a**i*L[i]
    return s
```

18.a)

```
    def scalaire(n,P,Q):
    S=0
    for i in range(n+1):
        S+=evaluation(P,i)*evaluation(Q,i)
    return S
```

18.b)

```
def norme(P):
    m=len(P)
    return scalaire(m-1,P,P)**(1/2)
```

19.

```
def scalaireY(P,Y):
    m=len(Y)
    S=0
    for i in range(m):
        S+=evaluation(P,i)*Y[i]
    return S
```

20.a) Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$. Avec le changement d'indices $i = n - \ell$, on trouve

$$\langle \varphi(P), Q\rangle = \langle P(n-x), Q(x)\rangle$$
$$= \sum_{\ell=0}^{n} P(n-\ell)Q(\ell).$$
$$= \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(n-i) = \langle P, \varphi(Q)\rangle.$$

L'endomorphisme φ est symétrique.

20.b) Soit $P \in \mathbb{R}_k[x]$, $\varphi(P) = P(n-x)$ reste de degré inférieur à k donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_k[x]$.

20.c) On a pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$,

$$\varphi\circ\varphi(P) = \varphi\big(P(n-x)\big) = P(n - (n-x)) = P(x).$$

Dès lors $\varphi\circ\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[x]}$. On a un polynôme annulateur donné par $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Comme le spectre est inclus dans l'ensemble des racines du polynôme annulateur :

$$\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{-1; 1\}.$$

Remarque. En anticipant sur la suite, on a $\varphi(B_1) = -B_1$, $\varphi(B_0) = 1$ *donc on a même l'égalité* $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{-1; 1\}$.

21. Par restriction, φ_k reste un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien donc il est diagonalisable dans une base orthonormée.

Construisons la base $(B_0, \ldots, B_n)$ par récurrence. On pose pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, la propriété $\mathscr{P}(k)$: Il existe une unique famille $(B_0, \ldots, B_k)$ telle que :

— $(B_0, \ldots, B_k)$ soit une base orthonormée de $\mathbb{R}_k[x]$.

- $(B_0, \dots, B_k)$ est une famille de vecteurs propres de φ_k (et φ).
- Le coefficient dominant de B_k est $\binom{2k}{k}$.

- *Initialisation.*
$\mathscr{P}(0)$ est vérifiée directement car : $\binom{2\times 0}{0} = 1$ et

$$\varphi(B_0) = \varphi(1) = 1.$$

- *Hérédité.*
Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie, justifions $\mathscr{P}(k+1)$. On sait déjà que $(B_0, \dots, B_k)$ est une famille orthonormée de vecteurs propres de φ_k. Soit H le supplémentaire orthogonal de $\mathbb{R}_k[x]$ dans $\mathbb{R}_{k+1}[x]$. H est de dimension 1, il existe un unique polynôme de coefficient dominant $\binom{2(k+1)}{k+1}$ tel que

$$H = \mathrm{Vect}(B_{k+1}).$$

De plus φ laisse stable H donc φ laisse aussi stable $H^\perp$. Autrement dit B_{k+1} est un vecteur propre de φ. La propriété $\mathscr{P}(k+1)$ est vérifiée.

- *Conclusion.*
Pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

22. Posons $\tilde{B}_1 = 2x - n \in \mathbb{R}_1[x]$. On a

$$\varphi(\tilde{B}_1) = 2(n-x) - n = n - 2x = -\tilde{B}_1(x).$$

Donc $\tilde{B}_1$ est vecteur propre de φ.
Le coefficient dominant de $\tilde{B}_1$ est bien $\binom{2\times 1}{1}$.
$\tilde{B}_1$ est orthogonal à B_0 car

$$\begin{aligned}\langle \tilde{B}_1, B_0 \rangle = \sum_{i=0}^{n} \tilde{B}_1(i) &= \sum_{i=0}^{n} 2i - n \\ &= n(n+1) - n(n+1) = 0.\end{aligned}$$

Par unicité $\tilde{B}_1 = B_1$.

23. On a $P_k \in \mathbb{R}_k[x]$ et la famille

$$\left(\frac{B_0}{\|B_0\|}, \frac{B_1}{\|B_1\|}, \dots, \frac{B_k}{\|B_k\|}\right)$$

est une base orthonormée de $\mathbb{R}_k[x]$. Par la formule des coordonnées d'un vecteur dans une b.o.n

$$P_k = \sum_{i=0}^{k} \left\langle P_k, \frac{B_i}{\|B_i\|} \right\rangle \frac{B_i}{\|B_i\|}.$$

On en déduit la première égalité par linéarité à droite du produit scalaire.

- De plus, par construction du projeté orthogonal

$$Y - P_k \in \mathbb{R}_k[x]^\perp.$$

Comme, pour $i \in [\![0; k]\!]$, $B_i \in \mathbb{R}_k[x]$, il vient

$$\langle Y - P_k, B_i \rangle = 0$$

c'est-à-dire $$\langle Y, B_i \rangle = \langle P_k, B_i \rangle.$$

La seconde égalité s'en déduit.

24. Pour $k \in [\![1; n]\!]$

$$P_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{\langle Y, B_i \rangle}{\|B_i\|^2} B_i = \frac{\langle Y, B_k \rangle}{\|B_k\|^2} B_k + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle Y, B_i \rangle}{\|B_i\|^2} B_i$$

De plus, par la question 12

$$\begin{aligned}\|Y\|^2 - m_k = \|P_k\|^2 & \\ &= \|P_{k-1} + \alpha_k B_k\|^2 \text{ où } \alpha_k = \frac{\langle Y, B_k \rangle}{\|B_k\|^2} \\ &= \|P_{k-1}\|^2 + \alpha_k^2 \|B_k\|^2 \text{ (Th. de Pythagore)} \\ &= \|Y\|^2 - m_{k-1} + \frac{\langle B_k, y \rangle^2}{\|B_k\|^2}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

25.a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} &= \frac{(2n)(2n-1)\big(2(n-1)\big)!}{(n(n-1)!)^2} \\ &= 2\frac{2n-1}{n} \cdot \frac{\big(2(n-1)\big)!}{(n-1)!^2} \\ &= \left(4 - \frac{2}{n}\right)\binom{2(n-1)}{n-1}.\end{aligned}$$

25.b)

```
def binom2(n):
    P=1
    for i in range(1,n+1):
        P=(4-2/i)*P
    return P
```

26.a) On a vu que

$$\left(\frac{B_0}{\|B_0\|}, \dots, \frac{B_{k-1}}{\|B_{k-1}\|}\right)$$

est une b.o.n de $\mathbb{R}_{k-1}[x]$, le projeté orthogonal d'un vecteur P est alors

$$p(P) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle P, B_i \rangle}{\|B_i\|^2}.$$

Un vecteur de $\mathbb{R}_k[x]$ orthogonal à la famille $(B_0, \dots, B_{k-1})$ est par exemple

$$x^k - p\left(x^k\right).$$

Il ne reste plus qu'à multiplier par $\binom{2k}{k}$ pour obtenir B_k (unicité à la question 21).

26.b,c,d)

```
def PolyB(n):
    BB=np.zeros([n+1,n+1])
    X=np.identity(n+1)

    BB[0,0]=1
    for k in range(1,n+1):
        S=np.zeros(n+1)
        for i in range(k):
            ps=scalaire(n,X[k,:],BB[i,:])
            N=norme(BB[i,:])**2
```

```
            S+=ps/N*BB[i,:]
        BB[k,:]=binom2(k)*(X[k,:]-S)

    return BB


def mk(n,Y):
    BB=PolyB(n)
    M=np.zeros(n+1)
    M[0]=np.std(Y)**2*(n+1)
    for k in range(1,n+1):
        M[k]=M[k-1]-scalaireY(BB[k,:],Y)
            **2/norme(BB[k,:])**2
    return M

def Pk(n,Y):
    BB=PolyB(n)
    PP=np.zeros([n+1,n+1])
    PP[0,0]=np.mean(Y)
    X=np.identity(n+1)

    for k in range(1,n+1):
        PP[k,:]=PP[k-1,:]+scalaireY(BB[k
            ,:],Y)/norme(BB[k,:])**2*BB[k
            ,:]
    return PP
```

27. Z_1 compte le nombre de succès (une graine germe) dans N répétitions d'expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes

$$Z \hookrightarrow \mathscr{B}(N, p).$$

L'espérance est Np et la variance $Np(1-p)$.

28.a) On a $a_0 = 0$ car la population se résume à une seule plante et

$$a_1 = \mathbf{P}(Z_1 = 0) = q^N.$$

28.b) Pour $i \in [\![1, k]\!]$, notons E_i l'événement "la descendance à la n-ième génération issue de la i-ème plante "fille" de la première plante est éteinte". Ainsi

$$\mathbf{P}_{[Z_1=k]}(Z_n = 0) = \mathbf{P}_{[Z_1=k]}\left(\bigcap_{i=1}^{k} E_i\right).$$

Par indépendance des événements E_i pour la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{[Z_1=k]}$, on poursuit :

$$\mathbf{P}_{[Z_1=k]}(Z_n = 0) = \prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}_{[Z_1=k]}(E_i) = \prod_{i=1}^{k} a_{n-1}.$$

Ce qui conclut.

28.c) D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Z_1 = k])_{k\in[\![0;N]\!]}$ on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_n) &= \sum_{k=0}^{N} \mathbf{P}_{[Z_1=k]}(A_n)\,\mathbf{P}(Z_1 = k)\\ &= \sum_{k=0}^{N} a_{n-1}^k \binom{N}{k} p^k q^{N-k}\\ &= (pa_{n-1} + q)^N\end{aligned}$$

d'après la formule du binôme de Newton.

29. Si la population est éteinte à la génération n alors elle est encore éteinte à la génération suivante :

$$A_n \subset A_{n+1}.$$

Par croissance de la probabilité

$$a_n \leqslant a_{n+1}.$$

La suite est croissante et majorée par 1 (c'est une suite de probabilité), donc elle converge d'après le théorème de convergence monotone.

30. Par passage à la limite dans la relation de récurrence,

$$\ell = (p\ell + q)^N \quad \text{où} \quad \ell = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Étudions la fonction

$$f : t \in [0;1] \longmapsto (pt + q)^N - t.$$

La fonction f est dérivable sur $[0;1]$ car polynomiale avec

$$\begin{aligned}f'(t) &= Np(pt+q)^{N-1} - 1\\ &\leqslant f'(1) = N_p - 1 < 0.\end{aligned}$$

Ainsi f' est donc négative, la fonction f est décroissante strictement. comme $f(1) = 0$, on constate que la seule possibilité pour f de s'annuler sur $[0;1]$ est $t = 1$.
Comme $f(\ell) = \ell$ avec $\ell \in [0;1]$, il vient :

$$\ell = 1.$$

D'après le théorème de la limite monotone (la suite $(A_n)_n$ est croissante pour l'inclusion) :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = 1$$

La population de plantes s'éteint presque surement.

31. À chaque étape, une plante ne peut donner au plus que N nouvelles plantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad Z_{n+1} \leqslant NZ_n.$$

Par récurrence immédiate

$$Z_n \leqslant N^n.$$

Comme Z_n est à valeurs entières positives

$$Z_n(\Omega) \subset [\![0; N^n]\!].$$

- On a de plus par la formule des probabilités composées

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\left(Z_n = N^n\right)\\ =&\mathbf{P}\left(\left[Z_n = N^n\right] \cap \left[Z_{n-1} = N^{n-1}\right] \cdots \cap [Z_1 = N]\right)\\ =&\mathbf{P}\left(Z_n = N^n \,\middle|\, [Z_{n-1} = N^{n-1}] \cap \ldots \cap [Z_1 = N]\right)\\ &\times \mathbf{P}\left(Z_{n-1} = N^{n-1} \,\middle|\, \left[Z_{n-2} = N^{n-2}\right] \cap \ldots \cap [Z_1 = N]\right)\\ &\vdots\\ &\times \mathbf{P}(Z_1 = N).\end{aligned}$$

Comme la suite $\left(Z_k = N^k\right)_k$ est décroissante pour l'inclusion, les intersections se simplifient

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(Z_n = N^n\right) &= \mathbf{P}_{[Z_{n-1}=N^{n-1}]}\left(Z_n = n\right) \\
&\vdots \\
&\times \mathbf{P}\left(Z_1 = N\right) \\
&= p^{N^1} \times \cdots \times p^{N^n} \\
&= p^{\sum_{k=1}^{N} N^k} \\
\mathbf{P}\left(Z_n = N^n\right) &= p^{N(1-N^n)/(1-N)}.
\end{aligned}$$

En reconnaissant à la fin une somme géométrique.

32. G_X est dérivable car polynomiale. On vérifie que $t_0 = 1$ convient.

33. C'est une application directe du théorème de transfert.

34. Par les propriétés de la fonction exponentielle

$$G_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \mathbf{E}\left(t^{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}\right) = \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^{n} t^{X_i}\right)$$

Ensuite, les variables t^{X_i} sont mutuellement indépendantes (lemme des coalitions)

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left(t^{X_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t).$$

35. Comme dans la question précédente, les k plantes de la première génération vont se comporter, indépendamment les unes des autres, comme la plante mère. L'effectif $W_{n,k}$ de la génération g_n est la somme des $Z_{n-1,i}$, nombres des descendants, à la $(n-1)$-ième génération de la $i$ème des k plantes de première génération :

$$W_{n,k} = \sum_{i=1}^{k} Z_{n-1,i}$$

où les $Z_{n-1,i}$ ont même loi que Z_{n-1}, et sont indépendantes.

36. Comme la fonction génératrice ne dépend que de sa loi

$$G_{W_{n,k}} = \prod_{i=1}^{k} G_{Z_{n-1,i}} = \prod_{i=1}^{k} G_{Z_{n-1}} = {G_{Z_{n-1}}}^k.$$

37. Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Z_1 = k])_k$

$$\begin{aligned}
G_{Z_n}(t) &= \sum_{\ell=0}^{N^n} \mathbf{P}\left(Z_n = \ell\right) t^\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{N^n} \sum_{k=0}^{N} \mathbf{P}_{[Z_1=k]}\left(Z_n = \ell\right) \mathbf{P}\left(Z_1 = k\right) t^\ell \\
&= \sum_{k=0}^{N} \sum_{\ell=0}^{N^n} \mathbf{P}_{[Z_1=k]}\left(Z_n = \ell\right) \mathbf{P}\left(Z_1 = k\right) t^\ell \\
&= \sum_{k=0}^{N} \mathbf{P}\left(Z_1 = k\right) \sum_{\ell=0}^{N^n} \mathbf{P}_{Z_1=k}\left(Z_n = l\right) t^\ell \\
&= \sum_{k=0}^{N} \mathbf{P}\left(Z_1 = k\right) \sum_{\ell=0}^{N^n} \mathbf{P}\left(W_{n,k} = \ell\right) t^\ell \\
&= \sum_{k=0}^{N} \mathbf{P}\left(Z_1 = k\right) G_{W_{n,k}}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \mathbf{P}\left(Z_1 = k\right) G^k_{Z_{n-1}}(t) \\
&= G_{Z_1}\left(G_{Z_{n-1}}(t)\right) \\
&= G_{Z_1} \circ G_{Z_{n-1}}(t).
\end{aligned}$$

38. Avec la question 32 et la formule des dérivées composées :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(Z_n\right) = G'_{Z_n}(1) &= \left(G_{Z_1} \circ G_{Z_{n-1}}\right)'(1) \\
&= \left(G'_{Z_1} \circ G_{Z_{n-1}}\right)(1) \cdot G'_{Z_{n-1}}(1) \\
&= G'_{Z_1}\left(G_{Z_{n-1}}(1)\right) \cdot G'_{Z_{n-1}}(1) \\
&= G'_{Z_1}(1) \cdot G'_{Z_{n-1}}(1) \\
&= \mathbf{E}\left(Z_1\right) \mathbf{E}\left(Z_{n-1}\right).
\end{aligned}$$

On obtient par une récurrence :

$$\mathbf{E}\left(Z_n\right) = \mathbf{E}\left(Z_1\right)^n = (Np)^n.$$

La limite de $\mathbf{E}\left(Z_n\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$ est alors

$$\begin{cases} 0 & \text{si} \quad Np < 1 \\ 1 & \text{si} \quad Np = 1 \\ +\infty & \text{si} \quad Np > 1 \end{cases}$$

39. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'inégalité de Markov, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^+_*$

$$\mathbf{P}\left(Z_n \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbf{E}\left(Z_n\right)}{\varepsilon} = \frac{(Np)^n}{\varepsilon}.$$

On a alors par encadrement :

$$\mathbf{P}\left(|Z_n - 0| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

C'est, la définition de la convergence en probabilité vers la variable presque sûrement constante égale à 0.

40. Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leqslant \mathbf{P}\left(Z_n = k\right) \leqslant \mathbf{P}\left(Z_n \geqslant 1\right).$$

D'où $\qquad \mathbf{P}\left(Z_n = k\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

par encadrement. Puis

$$\mathbf{P}\left(Z_n = 0\right) = 1 - \mathbf{P}\left(Z_n \geqslant 1\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Si Z désigne une variable aléatoire presque surement constante égale à 0, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{P}(\mathrm{Z}_n = k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}(\mathrm{Z} = k).$$

C'est la version discrète de la converge en loi de $(\mathrm{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers Z.

Remarque. Ce résultat est en fait bien plus général car on montre que la convergence en probabilité implique la convergence en loi.