DS 7 - CB B

THÈMES : UN PEU DE TOUT :)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies (bonus si vous écrivez superfétatoire, bonus doublé pour la définition). Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Problème I : The sophomore's dream - le rêve du deuxième année

L'objectif de cet exercice est d'établir l'égalité :

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n} \qquad (\bullet)$$

1. Justifier les convergences de l'intégrale $\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x$ et de la série $\sum n^{-n}$.

- *Préliminaire.*

Pour tous $p, n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_{n,p} = \int_0^1 x^n \ln(x)^p\,\mathrm{d}x$. On admet que l'intégrale $\mathrm{I}_{n,p}$ est bien définie.

2. **a)** Établir une relation simple entre $\mathrm{I}_{n,p+1}$ et $\mathrm{I}_{n,p}$.

b) En déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{I}_{n,n} = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}\, n!$$

3. En utilisant le changement de variable $x = \mathrm{e}^{-u/(n+1)}$, retrouver la valeur de

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} u^n\,\mathrm{d}u.$$

4. Rappeler l'inégalité de Markov. En déduire :

$$\forall\, \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^+, \qquad \left| \mathrm{e}^{\lambda} - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{\lambda^n}{n!} \right| \leqslant \frac{\lambda \mathrm{e}^{\lambda}}{\mathrm{N}+1}.$$

5. Justifier que $\varphi :]0;1] \mapsto -x\ln(x)$ est prolongeable par continuité en 0 et donner les variations et le graphe de son prolongement, noté encore φ.

6. Expliciter un réel M positif tel que

$$\forall\, \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^+, \qquad \left| x^{-x} - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{\varphi(x)^n}{n!} \right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}+1}.$$

7. Préciser $\int_0^1 \varphi(x)^n\,\mathrm{d}x$. Conclure sur la relation $(\bullet)$.

Problème II : Transformée de Laplace et application

Première partie : étude d'une fonction de deux variables

On pose $\mathscr{O} = \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$ et on introduit la fonction de deux variables

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{O} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x\ln\left(\frac{x}{y}\right) - x + y. \end{array} \right.$$

On admet que les définitions et propriétés vues sur les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ sont encore valables pour les fonctions définies sur $\mathscr{O}$.

8. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{O}$ et préciser les dérivées partielles de f d'ordre 1.

9. Vérifier que f admet une infinité de points critiques que l'on calculera.

10. Montrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $x\ln(x) \geqslant x-1$, avec égalité si et seulement si $x=1$.
11. En déduire la nature des points critiques (est-ce un minimum, maximum?).
12. Soient x et y deux réels positifs fixés. Montrer que

$$f(x,y) = \max_{t\in\mathbb{R}} \left\{tx - y\left(\mathrm{e}^t - 1\right)\right\}.$$

À quelle condition sur x et y le maximum est-il atteint en un réel t strictement positif?

Seconde partie : transformée de Laplace

Soit Z une variable aléatoire. On suppose que pour tout réel x, l'espérance de $\mathrm{e}^{x\mathrm{Z}}$ existe. On pose alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \Phi_{\mathrm{Z}}(x) = \mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{x\mathrm{Z}}\right).$$

13. *Exemples*
a) Expliciter $\Phi_{\mathrm{Z}}(x)$ lorsque $\mathrm{Z} \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.
b) Vérifier que si $\mathrm{Z} \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \ln \Phi_{\mathrm{Z}}(x) = \lambda\left(\mathrm{e}^x - 1\right)$.

Dans la suite de cette partie, Z désigne une variable aléatoire pour laquelle la fonction Φ_{Z} est bien définie sur $\mathbb{R}$.
14. Montrer que $\Phi_{-\mathrm{Z}}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et l'exprimer en fonction de Φ_{Z}.
15. Soit $u \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\quad \mathbf{P}(\mathrm{Z} > u) \leqslant \exp(-xu)\Phi_{\mathrm{Z}}(x)$.

Soient $\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que Z. On pose

$$\overline{\mathrm{Z}}_n = \frac{\mathrm{Z}_1 + \cdots + \mathrm{Z}_n}{n}.$$

16. Exprimer $\Phi_{n\overline{\mathrm{Z}}_n}(x)$ en fonction de Φ_{Z}, x et n.
17. En déduire que, pour u fixé et pour tout $x > 0$, $\quad \mathbf{P}\left(\overline{\mathrm{Z}}_n > u\right) \leqslant \exp\left(-n\left[xu - \ln\Phi_{\mathrm{Z}}(x)\right]\right)$.

Troisième partie : mise en pratique

L'association culturelle du lycée Saint-Louis souhaite optimiser sa page web pour maximiser le nombre de "likes". À cet effet, elle compare la version actuelle de sa page (appelée version A) à une nouvelle version (appelée version B) proposée par le très sérieux département marketing ECG2 en montrant ces deux versions à deux groupes de n étudiants et en mesurant le nombre de "likes". Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note X_i le nombre de "likes" du i-ème étudiant du groupe ayant vu la version A (appelé groupe A) et Y_i le nombre de "likes" par le i-ème étudiant du groupe ayant vu la version B (appelé groupe B). On suppose que les différents étudiants ont des comportements identiques et indépendants.

• *Modèle 1.*
De plus, on suppose que X_1 suit une loi de Poisson de paramètre λ_{A} et Y_1 une loi de Poisson de paramètre λ_{B}. Le test effectué par l'association est basé sur

$$\overline{\mathrm{X}}_n = \frac{\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n}{n} \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{Y}}_n = \frac{\mathrm{Y}_1 + \cdots + \mathrm{Y}_n}{n}.$$

les nombres moyens de "likes" dans le groupe A et dans le groupe B respectivement. L'association conserve la version A si $\overline{\mathrm{X}}_n \geqslant \overline{\mathrm{Y}}_n$, et adopte la version B sinon. On suppose, pour fixer les idées, que $\lambda_{\mathrm{A}} > \lambda_{\mathrm{B}}$ (ce qui est bien sûr inconnu au moment du test).
18. Idéalement, laquelle des deux versions de sa page web l'association devrait-elle choisir pour maximiser le nombre moyen de "likes" ?
19. Dans cette question, on fixe un réel $u \in \mathbb{R}$.
a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \mathbf{P}\left(\overline{\mathrm{Y}}_n > u\right) \leqslant \exp\left(-n\left[xu - \lambda_{\mathrm{B}}\left(\mathrm{e}^x - 1\right)\right]\right).$$

b) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^-, \qquad \mathbf{P}\left(\overline{\mathrm{X}}_n < u\right) \leqslant \exp\left(-n\left[xu - \lambda_{\mathrm{A}}\left(\mathrm{e}^x - 1\right)\right]\right).$$

20. On suppose maintenant que $\lambda_{\mathrm{B}} < u < \lambda_{\mathrm{A}}$. La fonction f est celle définie et étudiée dans la première partie.
a) Montrer que $\mathbf{P}\left(\overline{\mathrm{Y}}_n > u\right) \leqslant \exp\left(-nf\left(u,\lambda_{\mathrm{B}}\right)\right)$.
b) Montrer que $\mathbf{P}\left(\overline{\mathrm{X}}_n < u\right) \leqslant \exp\left(-nf\left(u,\lambda_{\mathrm{A}}\right)\right)$.
21. Montrer qu'il existe une constante $\mathrm{C} \in \mathbb{R}_*^+$ que l'on précisera telle que

$$\mathbf{P}\left(\left[\overline{\mathrm{X}}_n < \frac{\lambda_{\mathrm{A}} + \lambda_{\mathrm{B}}}{2}\right] \bigcup \left[\overline{\mathrm{Y}}_n > \frac{\lambda_{\mathrm{A}} + \lambda_{\mathrm{B}}}{2}\right]\right) \leqslant 2\exp(-n\mathrm{C}).$$

22. Proposer une minoration de la probabilité que l'association sélectionne la bonne version à l'issue du test. Commenter.

• *Modèle 2.*

23. On suppose maintenant que $\overline{X}_n$ et $\overline{Y}_n$ suivent des lois normales $\mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A^2/n)$ et $\mathcal{N}(\mu_B, \sigma_B^2/n)$.

a) Comment justifier ce choix de modèle ?

b) On pose $\sigma_{AB} = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$ et Φ, la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Justifier que la probabilité p_n que l'association sélectionne la bonne version à l'issue du test est :

$$p_n = \Phi\left(n \frac{\mu_A - \mu_B}{\sigma_{AB}}\right).$$

24. **a)** Montrer grâce à une intégration par parties que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad 1 - \Phi(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-x^2/2}.$$

b) En déduire l'existence de $\tilde{C} \in \mathbb{R}_*^+$ tel que, pour n suffisamment grand, la probabilité p_n que l'association sélectionne la bonne version soit minorée par

$$p_n \geqslant 1 - \exp(-\tilde{C} \cdot n^2).$$

Problème III : Matrices dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres

Dans tout ce problème, n est un entier supérieur ou égal à 2.
On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices $M = \left(m_{i,j}\right)_{i,j \in [\![1;n]\!]}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

- → les coefficients diagonaux $m_{1,1}, \ldots, m_{n,n}$ de la matrice M sont des valeurs propres de M ;
- → la matrice M n'a pas d'autres valeurs propres que les nombres $m_{1,1}, \ldots, m_{n,n}$.

• *Généralités*

25. Est-ce que les matrices triangulaires appartiennent à $\mathcal{D}_n$?

26. Si M est une matrice de $\mathcal{D}_n$, établir que pour tout α réel, la matrice $M + \alpha I_n$ est encore un élément de $\mathcal{D}_n$.

27. On note K_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Montrer que la matrice K_n n'appartient pas à $\mathcal{D}_n$.

28. L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? *Pensez aux matrices élémentaires.*

• *Le cas $n = 2$*

29. Soit (x, y, z) un élément de $\mathbb{R}^3$. À quelle condition sur x et y, la matrice $\begin{bmatrix} 0 & x \\ y & z \end{bmatrix}$ est inversible ?

30. En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_2$ ne contient que des matrices triangulaires.

• *Le cas $n = 3$ - exemple et le cas nilpotent*

31. Montrer que la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ appartient à $\mathcal{D}_3$. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

• Pour tout t réel, on considère la matrice

$$M(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{bmatrix}.$$

32. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice $M(t)$ selon la valeur de t. En déduire les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

33. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ est diagonalisable.

• On rappelle qu'une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est dite nilpotente si, et seulement si, il existe un entier naturel p non nul tel que la matrice M^p soit la matrice nulle.

34. Soit (a, b, c, d, e, f) un élément de $\mathbb{R}^6$. On considère la matrice $M = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{bmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On définit les réels $\gamma(M) = ac + df + be$ et $\delta(M) = bcf + ade$.

a) Établir l'égalité $M^3 = \gamma(M)M + \delta(M)I_3$.

b) Montrer que la matrice M est nilpotente si et seulement si $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls.

35. Justifier que l'ensemble $\mathcal{D}_3$ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.

36. Exhiber une matrice de $\mathcal{D}_3$ dont tous les coefficients sont non nuls.

Exercice : théorème central limite et formule de Stirling

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, mutuellement indépendantes, et qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1. On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

37. Rappeler la loi suivie par S_n. Donner l'espérance et la variance de S_n.

38. À l'aide du théorème de la limite centrée, établir que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n \leqslant n) = \frac{1}{2}.$$

39. En déduire la valeur de $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t} \, dt$.

40. **a)** Utiliser le résultat précédent pour montrer que

$$\int_0^1 z^{n-1} e^{-nz} \, dz \underset{+\infty}{\sim} \frac{n!}{2n^{n+1}}.$$

b) On admet que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$. En déduire un nouvel équivalent de $\int_0^1 z^{n-1} e^{-nz} \, dz$.

Bonus Quel est le prénom de Tchebychev (celui de l'inégalité) ?

Bienaymé, Jean-françois, Anton, Pafnouti.

– FIN –

Bonnes vacances !

DS 7 - solution

Bonus à chaque cokille trouvée!

Problème 1

1. La fonction $f : x \in]0;1] \mapsto x^{-x} = \mathrm{e}^{-x\ln(x)}$ est continue sur $]0;1]$ par les théorèmes généraux (produit et composition). De plus par les croissances comparées puis la continuité de la fonction exponentielle :

$$x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{} 0 \quad \text{et} \quad x^{-x} = \mathrm{e}^{-x\ln(x)} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1.$$

La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0. L'intégrale

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

est donc bien définie (faussement impropre en 0).

- Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$, on a

$$0 \leqslant n^{-n} = \frac{1}{n^n} \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

La série géométrique $\sum(1/2)^n$ est convergente, par le critère de comparaison, la série $\sum n^{-n}$ est aussi convergente.

2.a) Intégrons par parties sachant que les fonctions considérée seront de classe $\mathscr{C}^1$. Précisons aussi que les intégrales $\mathrm{I}_{n,p}$ sont généralisées en 0. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$

$$\begin{aligned}
&\int_\varepsilon^1 x^n \ln(x)^{p+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)}\ln(x)^{p+1}\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{x^{n+1}(p+1)}{(n+1)}\frac{1}{x}\ln(x)^p\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\varepsilon^{n+1}\ln(\varepsilon)^{p+1}}{n+1} - \frac{p+1}{n+1}\int_\varepsilon^1 x^n\ln(x)^p\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Par les croissances comparées

$$\varepsilon^{n+1}\ln(\varepsilon)^{p+1} \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit avec $\varepsilon \to 0^+$

$$\mathrm{I}_{n,p+1} = -\frac{p+1}{n+1}\mathrm{I}_{n,p}.$$

2.b) Il est possible de raisonner par récurrence, ici, nous allons procéder par produit télescopique (aucun facteur n'est nul).

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{I}_{n,n}}{\mathrm{I}_{n,0}} &= \prod_{p=0}^{n-1}\frac{\mathrm{I}_{n,p+1}}{\mathrm{I}_{n,p}} = \prod_{p=0}^{n-1}(-1)\frac{p+1}{n+1} \\
&= \frac{(-1)^n}{(n+1)^n}\cdot n!
\end{aligned}$$

D'où le résultat car $\mathrm{I}_{n,0} = 1/(n+1)$.

3. Le changement de variable est de classe $\mathscr{C}^1$, strictement décroissant avec

$$\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^{-\frac{u}{n+1}}}{n+1}\,\mathrm{d}u.$$

Les intégrales sont convergentes avec

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{n,n} &= \int_0^1 x^n \ln(x)^n\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{+\infty}^0 \mathrm{e}^{-un/(n+1)}\frac{(-1)^n}{(n+1)^n}u^n\left(-\frac{\mathrm{e}^{-u/(n+1)}}{n+1}\right)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}u^n\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}\Gamma(n+1).
\end{aligned}$$

Par identification $\Gamma(n+1) = n!$.

4. Si X est une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$

$$\mathbf{P}(\mathrm{X} \geqslant \alpha) \leqslant \frac{\mathbf{E}(\mathrm{X})}{\alpha}.$$

Dans le cas particulier où X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, il vient :

$$\mathbf{P}(\mathrm{X} \geqslant \alpha) \leqslant \frac{\lambda}{\alpha}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{e}^\lambda - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\frac{\lambda^n}{n!}\right| &= \mathrm{e}^\lambda\left|1 - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\right| \\
&= \mathrm{e}^\lambda\left|1 - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\mathbf{P}(\mathrm{X}=n)\right| \\
&= \mathrm{e}^\lambda|1 - \mathbf{P}(\mathrm{X} \leqslant \mathrm{N})| \\
&= \mathrm{e}^\lambda\mathbf{P}(\mathrm{X} > \mathrm{N}) \\
&= \mathrm{e}^\lambda\mathbf{P}(\mathrm{X} \geqslant \mathrm{N}+1).
\end{aligned}$$

D'où l'inégalité avec $\alpha = \mathrm{N}+1$.
Précisons que l'inégalité est directe pour $\lambda = 0$.

5. Par les croissances comparées $\varphi(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$. On pose donc

$$\varphi(0) = 0.$$

La fonction φ est, par produit, dérivable sur $]0;1]$ avec

$$\varphi'(x) = -(\ln(x)+1).$$

On en déduit que :

- φ est croissante strictement sur $[0;1/\mathrm{e}]$ et décroissante sur $[1/\mathrm{e};1]$.
- φ est positive et

$$\max_{t\in[0;1]}|\varphi(t)| = \varphi\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \mathrm{e}^{-1}.$$

6. Soit $x \in [0;1]$, $x^{-x} = e^{\varphi(x)}$, en appliquant l'inégalité de la question 4, on obtient

$$\left| x^{-x} - \sum_{n=0}^{N} \frac{\varphi(x)^n}{n!} \right| \leqslant \frac{\varphi(x) e^{\varphi(x)}}{N+1} = \frac{e^{e^{-1}}}{e(N+1)} = \frac{M}{N+1}$$

Avec $$M = \frac{e^{e^{-1}}}{e}.$$

7. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$\begin{aligned} E_N &= \left| \int_0^1 x^{-x} \, dx - \sum_{n=1}^{N} n^{-n} \right| \\ &= \left| \int_0^1 x^{-x} \, dx - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \right|. \end{aligned}$$

Or $$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(x)^n \, dx &= \int_0^1 (-1)^n x^n \ln(x)^n \, dx \\ &= (-1)^n I_{n,n} = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

D'où, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} E_N &= \left| \int_0^1 x^{-x} \, dx - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} \int_0^1 \varphi(x)^n \, dx \right| \\ &= \left| \int_0^1 x^{-x} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\varphi(x)^n}{n!} \, dx \right| \\ &\leqslant \int_0^1 \left| x^{-x} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\varphi(x)^n}{n!} \right| dx \\ &\leqslant \int_0^1 \frac{M}{N} \, dx \leqslant \frac{M}{N}. \end{aligned}$$

Par encadrement, on trouve

$$\int_0^1 x^{-x} \, dx - \sum_{n=1}^{N} n^{-n} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où le résultat.

8. La fonction $(x, y) \mapsto x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$. La fonction logarithme est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$. Par composition $(x, y) \mapsto \ln(x)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$. Par produit, $(x, y) \mapsto x\ln(x)$ est aussi $\mathscr{C}^1$. Il en va de même pour $(x, y) \mapsto x\ln(y)$. De plus, $(x, y) \mapsto -x + y$ est $\mathscr{C}^1$ car polynomiale. Finalement, par combinaison linéaire, f est $\mathscr{C}^1$ sur $\left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$. Pour tout $(x, y) \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x, y) &= \ln(x) + 1 - \ln(y) - 1 \\ &= \ln(x) - \ln(y) \\ \partial_2 f(x, y) &= -\frac{x}{y} + 1 = \frac{y - x}{y}. \end{aligned}$$

9. (x, y) est un point critique si et seulement si

$$\begin{cases} \partial_1 f(x, y) = 0 \\ \partial_2 f(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x) = \ln(y) \\ y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{x = y$$

La fonction f admet une infinité de points critiques :

$$(x_0, x_0) \text{ où } x_0 \in \mathbb{R}_*^+.$$

Précisons que dans ce cas :

$$f(x_0, x_0) = 0.$$

10. Posons $g : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto x\ln(x) - x + 1$. La fonction g est dérivable avec pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$

$$g(x) = \ln(x).$$

On en déduit que g est strictement décroissante sur $]0;1]$, strictement croissante sur $[1;+\infty[$. On a donc un minimum $g(1) = 0$. Dès lors g est positive et l'inégalité est prouvée.

- *Rédaction 2.* On a l'inégalité classique de concavité

$$\forall t \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \ln(t) \leqslant t - 1$$

D'où
$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+ \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x} - 1 = \frac{x-1}{x}.$$

On en déduit l'inégalité.

11. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_*^+$.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= y\left(\frac{x}{y}\ln\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y} + 1\right) \\ &= yg\left(\frac{x}{y}\right) \geqslant 0. \end{aligned}$$

De plus, on a vu que $f(x_0, x_0) = 0$, soit

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x, y) \geqslant f(x_0, x_0).$$

Tous les points critiques fournissent un minimum global. Précisons qu'il n'y a pas de maximum local.

12. À x, y fixés, posons pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$h(t) = tx - y\left(e^t - 1\right).$$

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$h'(t) = x - ye^t.$$

On constate que h admet un maximum atteint en

$$t_0 = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

qui vaut alors

$$h(t_0) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)x - y\left(\frac{x}{y} - 1\right) = f(x, y).$$

Le maximum est atteint pour $t_0 \geqslant 0$ si et seulement si

$$x \geqslant y.$$

13.a) Par la formule de transfert, pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Phi_Z(x) &= \mathbf{P}(Z = 0)e^{x \cdot 0} + \mathbf{P}(Z = 1)e^{x \cdot 1} \\ &= (1 - p) + pe^x. \end{aligned}$$

13.b) Soient $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}(Z = k)e^{kx} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{kx} = \frac{e^{-\lambda}\left(\lambda e^x\right)^k}{k!}.$$

On reconnait le terme général d'une série exponentielle, il y a donc absolue convergence, l'espérance existe par le théorème de transfert et :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(e^{xZ}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Z=k)e^{kx} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\left(\lambda e^{x}\right)^{k}}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{x}} = e^{\lambda(e^{x}-1)}.\end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit.

14. Comme l'espérance de e^{xZ} existe pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'espérance de $e^{x(-Z)} = e^{(-x)Z}$ existe aussi pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dès lors

$$\Phi_{-Z}(x) = \mathbf{E}\left(e^{x(-Z)}\right) = \mathbf{E}\left(e^{-x\cdot Z}\right) = \Phi_Z(-x).$$

15. Comme la fonction $t \mapsto e^{xt}$ est strictement croissante

$$[Z > 0] = \left[e^{xZ} > e^{xu}\right].$$

La variable e^{xZ} est positive et admet une espérance, on peut donc appliquer l'inégalité de Markov

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z > u) &= \mathbf{P}\left(e^{xZ} > e^{xu}\right) \\ &\leqslant \frac{\mathbf{E}\left(e^{xZ}\right)}{e^{xu}} = e^{-xu}\Phi_Z(x).\end{aligned}$$

16. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\Phi_{n\overline{Z}_n}(x) = \mathbf{E}\left(e^{x\sum_{i=1}^{n} Z_i}\right) = \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{xZ_i}\right)$$

les variables $\left(e^{xZ_i}\right)_i$ sont mutuellement indépendantes par le lemme des coalitions

$$\Phi_{n\overline{Z}_n}(x) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left(e^{xZ_i}\right).$$

La fonction $t \mapsto \exp(xt)$ est continue, les variables e^{xZ_i} et e^{xZ} ont donc même loi

$$\Phi_{n\overline{Z}_n}(x) = \mathbf{E}\left(e^{xZ}\right)^n.$$

Finalement

$$\Phi_{n\overline{Z}_n}(x) = \Phi_z(x)^n.$$

17. On a :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\overline{Z_n} > u\right) &= \mathbf{P}\left(n\overline{Z_n} > nu\right) \\ &\leqslant \exp(-nu)\Phi_{n\overline{Z}_n}(x) \\ &\leqslant \exp\left(-nu + \ln \Phi_{n\overline{Z}_n}(x)\right) \\ \mathbf{P}\left(\overline{Z_n} > u\right) &\leqslant \exp\left(-n\left(u - \ln \Phi_z(x)\right)\right).\end{aligned}$$

On conclut avec la question 13.b).

18. La version A, car

$$\lambda_A = \mathbf{E}\left(\overline{X_n}\right) > \lambda_B = \mathbf{E}\left(\overline{Y_n}\right).$$

19.a) La première inégalité résulte des questions 17 et 13.b).

19.b) On a en appliquant la question 17 à $-x$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\overline{X}_n < u\right) &= \mathbf{P}\left(-\overline{X}_n > -u\right) \\ &\leqslant \exp\left(-n\left((-x)(-u) - \ln \Phi_{-\overline{X}}(-x)\right)\right) \\ &\leqslant \exp\left(-n\left(xu - \ln \Phi_X(x)\right)\right)\end{aligned}$$

en utilisant la question 14. On conclut avec 17.

20.a) Dans ce cas, on a $u \in \mathbb{R}_*^+$, $\lambda_B \in \mathbb{R}^+$. On est dans les conditions de la question 12 et

$$\max_{x\in\mathbb{R}} \{xu - \lambda_B\left(e^x - 1\right)\} = f\left(u, \lambda_B\right).$$

Précisons que $u/\lambda_B > 0$ donc le maximum est atteint pour un $x_0 \in \mathbb{R}^+$ (question 12, deuxième partie).
Dès lors, avec le choix x_0 dans l'inégalité de la question 19, on obtient le résultat attendu.

20.b) Le raisonnement est identique avec maintenant le choix

$$x_0 = \ln\left(\frac{u}{\lambda_A}\right) < 0.$$

21. Avec le choix

$$u_0 = \frac{\lambda_A + \lambda_B}{2} \in \left]\lambda_A; \lambda_B\right[,$$

on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\overline{Y}_n > u_0\right) &\leqslant \exp\left(-nf\left(\lambda_B, \frac{\lambda_A+\lambda_B}{2}\right)\right) \\ \mathbf{P}\left(\overline{X}_n < u_0\right) &\leqslant \exp\left(-nf\left(\lambda_A, \frac{\lambda_A+\lambda_B}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

et, par l'intermédiaire de la formule du crible

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\left[\overline{X}_n < u_0\right] \cup \left[\overline{Y}_n > u_0\right]\right) &\leqslant \mathbf{P}\left(X_n < u_0\right) + \mathbf{P}\left(Y_n > u_0\right) \\ &\leqslant 2\exp(-nC)\end{aligned}$$

où on a fait le choix de poser

$$C = \min\left\{f\left(\lambda_A, \frac{\lambda_A+\lambda_B}{2}\right); f\left(\lambda_B, \frac{\lambda_A+\lambda_B}{2}\right)\right\} > 0.$$

Précisons que ce calcul a été effectué sous la condition $\lambda_A > \lambda_B$ mais par symétrie du problème, on peut retirer cette condition.

22. L'association choisit la bonne version si et seulement si l'événement

$$[\overline{X}_n \geqslant \overline{Y}_n]$$

est réalisé. Or on a l'inclusion

$$\left[\overline{X}_n \geqslant u_0 \geqslant \overline{Y}_n\right] \subset \left[\overline{X_n} \geqslant \overline{Y}_n\right].$$

D'où la minoration

$$\mathbf{P}\left(\overline{X}_n \geqslant u_0 \geqslant \overline{Y_n}\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\overline{X_n} \geqslant \overline{Y}_n\right)$$

or

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\overline{X}_n \geqslant u_0 \geqslant \overline{Y}_n\right) &= \mathbf{P}\left(\left[\overline{X}_n \geqslant u_0\right] \cap \left[\overline{Y}_n \leqslant u_0\right]\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\left[\overline{X}_n < u_0\right] \cup \left[\overline{Y}_n > u_0\right]\right) \\ &\geqslant 1 - 2\exp(-nC).\end{aligned}$$

Une minoration possible est alors

$$\mathbf{P}\left(\overline{X}_n \geqslant \overline{Y}_n\right) \geqslant 1 - 2\exp(-nC).$$

La croissante est très rapide.

23.a) On sait que si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2, de même loi et mutuellement indépendantes alors

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbf{E}(X_1)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z$$

avec $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$. C'est le théorème central limite. Dans ce cas $\overline{X_n}$ suit approximativement une loi du type

$$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n).$$

D'où le choix de considérer directement pour $\overline{X}_n$ une loi normale avec une espérance indépendante de n et une variance en " $1/n$ ".

23.b) On a par indépendance des (X_i) et (Y_i), indépendance de $\overline{X}_n$ et $\overline{Y}_n$. Par stabilité des sommes de variables de lois normales indépendantes

$$\overline{X}_n - \overline{Y}_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu_A - \mu_B, \sigma_{AB}^2/n\right).$$

Ainsi, si $\mu_A \geqslant \mu_B$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\overline{X}_n \geqslant \overline{Y}_n\right) &= \mathbf{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_n - (\mu_A - \mu_B)}{\sigma_{AB}/n} \geqslant -\frac{\mu_A - \mu_B}{\sigma_{AB}/n}\right)\\ &= 1 - \varphi\left(-\frac{\mu_A - \mu_B}{\sigma_{AB}/n}\right)\\ &= \varphi\left(n\frac{\mu_A - \mu_B}{\sigma_{AB}}\right).\end{aligned}$$

24.a) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1]$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$1 - \Phi(x) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant x) = \mathbf{P}(X > x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt.$$

Soit $A \in [x, +\infty[$, en faisant une intégration par parties, les applications $t \mapsto -\frac{1}{t}$, $t \mapsto e^{-t^2/2}$ étant de classe C^1 sur $[x, A]$:

$$\begin{aligned}&\int_x^A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt = \int_x^A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{-1}{t}(-t)e^{-t^2/2}\, dt\\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{-1}{t}e^{-t^2/2}\right]_x^A - \int_x^A \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{t^2}e^{-t^2/2}\, dt\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{A}e^{-A^2/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}e^{-x^2/2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^A \frac{1}{t^2}e^{-t^2/2}\, dt.\end{aligned}$$

On sait déjà que l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$ converge. A fortiori, puisque

$$\frac{1}{t^2}e^{-t^2/2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-t^2/2}\right)$$

(et que $\forall t > 0, e^{-t^2/2} \geqslant 0$), l'intégrale suivante converge

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{t^2}e^{-t^2/2}\, dt.$$

De plus, par produit,

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{A}e^{-A^2/2} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0.$$

Donc on peut passer à la limite quand $A \to +\infty$ dans la relation précédente, et on obtient

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}e^{-x^2/2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^2}e^{-t^2/2}\, dt.$$

Ce qui conclut car le second terme est négatif.

24.b) On a

$$\Phi(x) \geqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}e^{-x^2/2}.$$

Si on pose

$$C_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_A - \mu_B}{\sigma_{AB}}\right)^2, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2\sigma_{AB}}{\mu_A - \mu_B}$$

on obtient alors

$$\begin{aligned}p_n &\geqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2\sigma_{AB}}{n(\mu_A - \mu_B)}\exp(-C_0 n^2)\\ &\geqslant 1 - \frac{\alpha}{n}\exp(-C_0 n^2)\\ &\geqslant 1 - \exp\left(-C^0 n^2 + \ln(\alpha) + \ln(n)\right).\end{aligned}$$

De plus, on vérifie par les croissances comparées

$$\frac{C_0 n^2 - \ln(\alpha) - \ln(n)}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} C_0.$$

On en déduit que la suite de terme général

$$\left|\frac{C_0 n^2 - \ln(\alpha) - \ln(n)}{n^2}\right|$$

est bornée. Soit $\tilde{C} > 0$, un majorant de cette suite. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left|C_0 n^2 - \ln(\alpha) - \ln(n)\right| \leqslant \tilde{C} \cdot n^2.$$

Ce qui permet de conclure.

25. Oui car dans le cas triangulaire, les coefficients diagonaux sont exactement les valeurs propres.

26. Soit M une matrice de $\mathscr{D}_n$. Les valeurs propres de M sont donc les termes de sa diagonale. Or β est valeur propre de $(M + \alpha I_n)$
ssi $(M + \alpha I_n - \beta I_n) = (M - (\beta - \alpha) I_n)$ est non inversible,
ssi $\beta - \alpha$ est valeur propre de M,
ssi $\beta - \alpha$ est sur la diagonale de M,
ssi β est sur la diagonale de $M + \alpha I$.
Finalement, si M est une matrice de $\mathscr{D}_n$, la matrice $M + \alpha I_n$ est encore un élément de $\mathscr{D}_n$.

27. On reconnaît l'exemple classique de la matrice Atilla. On constate que la matrice colonne ne contenant que des 1 est vecteur propre pour la valeur propre n. Or $n > 1$ n'est pas sur la diagonale, la matrice n'appartient pas à $\mathscr{D}_n$.

28. Les matrices élémentaires $E_{i,j}$ sont toutes triangulaires donc elles appartiennent à $\mathscr{D}_n$. Pourtant, la somme de toutes ces matrices donnent K_n qui n'appartient pas à $\mathscr{D}_n$. Ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ car il n'est pas stable par combinaison linéaire.

29. Par un calcul de déterminant la condition est $xy \neq 0$. C'est-à-dire x et y non nuls.

30. Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathscr{D}_2$. Ses valeurs propres sont a et d donc

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - aI_2 = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d-a \end{bmatrix}$$

est non inversible donc c ou b est nul (d'après la question précédente). Ainsi M est triangulaire. Ce qui conclut.

31. On constate que :

→ 3 est valeur propre car

$$\operatorname{rg}(A - 3I_3) = \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} < 3$$

(deux colonnes identiques).

→ 2 est valeur propre car

$$\operatorname{rg}(A - 2I_3) = \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} < 3.$$

→ 4 est valeur propre car

$$\operatorname{rg}(A - 4I_3) = \operatorname{rg}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} < 3.$$

Par exemple

$$C_1 - C_2 + 2C_3 = 0.$$

Et comme A est de taille 3 elle ne peut pas avoir plus de 3 valeurs propres distinctes. Donc les valeurs propres de A sont 2, 3 et 4 et comme elle a trois valeurs propres distinctes et qu'elle est de taille 3. La matrice A appartient à $\mathscr{D}_3$ et elle est diagonalisable.

32. On a

$$\begin{bmatrix} 3-\alpha & 1 & 1+t \\ 0 & 2-\alpha & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t-\alpha \end{bmatrix} L_3 \leftrightarrow L_1$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\alpha \\ 0 & 2-\alpha & -1-t \\ 3-\alpha & 1 & 1+t \end{bmatrix} L_3 - (3-\alpha)L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\alpha \\ 0 & 2-\alpha & -1-t \\ 0 & -2+\alpha & * \end{bmatrix} L_3 + L_2 \to L_3$$

avec $* = 1 + t - (3-\alpha)(4+2t-\alpha)$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\alpha \\ 0 & 2-\alpha & -1-t \\ 0 & 0 & -(3-\alpha)(4+2t-\alpha) \end{bmatrix}.$$

On en déduit que le rang de $M(t) - \alpha$ est inférieur strictement à 3 si et seulement si le rang de la matrice triangulaire précédente est inférieur strictement à 3. Soit pour les valeurs 2, 3 et $4+2t$. On a donc

$$\operatorname{Sp}(M(t)) = \{2, 3, 4+2t\}.$$

On constate que pour tout réel t, $M(t)$ appartient à $\mathscr{D}_3$.

33. Si $4 + 2t \neq 2 (\iff t \neq -1)$ et $4 + 2t \neq 3 (\iff t \neq -1/2)$ alors $M(t)$ a trois valeurs propres distinctes et $M(t)$ est diagonalisable.
On étudie ensuite les cas $t = -1$ et $t = -1/2$.
On montre que seule $t = -1/2$ donne une matrice non diagonalisable.

34.a) On calcule :

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ac+be & bf & ad \\ ed & ac+df & cb \\ fc & ae & eb+df \end{bmatrix}.$$

Puis $M^3 =$

$$\begin{bmatrix} ade+bcf & abe+a^2c+adf & b^2e+abc+bdf \\ ac^2+cdf+bce & ade+bcf & dac+d^2f+bde \\ be^2+def+ace & fbe+df^2+acf & ade+bcf \end{bmatrix}.$$

En parallèle, on calcule :

$$\gamma(M)M + \delta(M)I_3 = (ac+df+be)\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{bmatrix}$$

$$+(bcf+ade)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On constate bien que

$$M^3 = \gamma(M)M + \delta(M)I_3.$$

34.b) Justifions que $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est nilpotente si et seulement si $M^3 = 0$.
→ Si $M^3 = 0$, alors M est nilpotente.
→ Si M est nilpotente et raisonnons par l'absurde en supposant $M^3 \neq 0$. Soit φ, l'endomorphisme canoniquement associé à M. On a donc l'existence de $p \in \mathbb{N}$ tel que φ^p soit l'endomorphisme nul et l'existence de $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $\varphi^3 = 0_E$. On montre ensuite que la famille $\left(x, \varphi(x), \varphi^2(x), \varphi^3(x)\right)$ est libre. Soient $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_0 x + \lambda_1\varphi(x) + \lambda_2\varphi^2(x) + \lambda_3\varphi^3(x) = 0_E.$$

En composant par φ^{p-1}, on trouve directement $\lambda_0 \neq 0$. Par φ^{p-2}, on a $\lambda_1 = 0$, puis $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille est libre avec 4 vecteurs dans un espace de dimension 3. C'est impossible et $M^3 = 0$.
On peut maintenant répondre à la question :
→ Si $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls, alors $M^3 = 0$ donc M est nilpotente.
→ Si M est nilpotente alors $M^3 = 0$ donc $\gamma(M)M + \delta(M)I_3 = 0$. On a alors :
- ou bien tous ses coefficients ne sont pas nuls, alors (M, I) est libre (2 matrices non proportionnelles) donc $\gamma(M) = 0$ et $\delta(M) = 0$.
- ou bien tous ses coefficients sont nuls, alors $\gamma(M) = 0$ et $\delta(M) = 0$.
Ce qui conclut.

35. On suppose que a, b et d sont égaux à 1.
Donc M est nilpotente si et seulement si (1) : $ac+df+be = c+f+e = 0$ et $bcf+ade = cf+e = 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} e = -cf \\ c+f-cf = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} e = -cf \\ c(1-f) = -f \end{cases} \text{ et pour } f \neq 1$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} e = f^2/(1-f) \\ c = -f/(1-f) \end{cases}$$

Donc pour chaque $f \neq 1$, on obtient une solution. Il y en a donc une infinité.

36. Avec $f = 2$ on a

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{D}_3.$$

On en déduit que (question 26)

$$\mathrm{M} + \mathrm{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathscr{D}_3$$

a tous ses coefficients non nuls.

37->40 Voir EDHEC 2007 exercice 3.