DS 9 - sujet A

THÈMES : CONVERGENCES DES V.A, OPTIMISATION

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Problème I : Optimisation

Dans tout ce problème, a est un réel strictement positif.

- *Préliminaires*
  On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \qquad \varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}.$$

1. Étudier les variations de la fonction φ, les limites aux bords de l'intervalle de définition et dresser son tableau de variations.
On fera apparaitre dans ce tableau le réel $x_0 = \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$.

2. Démontrer que si $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2, vérifiant : $z_1 < x_0 < z_2$.
Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$? Si $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$?

- *Points critiques d'une fonction de deux variables*
  Soit f la fonction définie sur $U = \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$ par :

$$\forall (x, y) \in U, \qquad f(x, y) = \ln(x)\ln(y) - (xy)^a.$$

3. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U. Calculer les dérivées partielles premières de f.

4. Démontrer que si $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$, la fonction f admet exactement deux points critiques donnés par $A = (z_1, z_1)$ et $B = (z_2, z_2)$.
Déterminer aussi les éventuels points critiques de f dans les cas où $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$ et $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$.

- *Extrema*
  Dans la suite, on suppose que $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$.

5. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f.

6. Expliciter la matrice hessienne de f au point A. Vérifier que cette matrice peut s'écrire sous la forme :

$$\nabla^2 f(A) = \begin{bmatrix} -\alpha & \frac{1}{z_1^2} - \alpha \\ \frac{1}{z_1^2} - \alpha & -\alpha \end{bmatrix}$$

où α est un réel strictement positif à déterminer.

7. On pose $M = \nabla^2 f(z_1, z_1)$, $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Calculer MX_1 et MX_2.
Vérifier qu'une des valeurs propres de M est donnée par $\varphi'(z_1)/z_1$.

8. La fonction f présente-t-elle un extremum local en A ? Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum local ?

9. La fonction f présente-t-elle un extremum local en B ? Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum local ?

Problème II : Optimisation d'une fonction de n variables

On note J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j.$$

- *Préliminaires*

10. Donner les valeurs propres de J.

11. Montrer que pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \dfrac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2\right].$

- *Étude sur* $\mathbb{R}^n$

12. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ et calculer le gradient de f. Vérifier que f admet un unique point critique.

13. Expliciter la matrice hessienne de f en tout point x. On pourra l'exprimer comme combinaison linéaire de J et I_n.

14. Est-ce que f admet un extremum local sur $\mathbb{R}^n$?

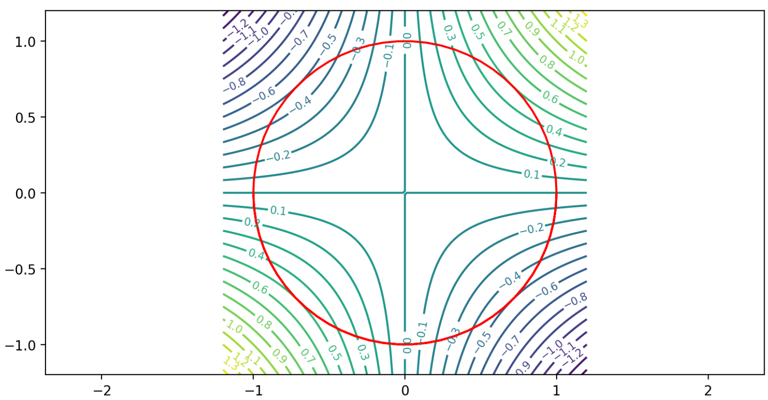
- *Étude sur* $\mathscr{S}_n$

15. Montrer que la fonction f admet un maximum et un minimum sur l'ensemble :

$$\mathscr{S}_n = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2 = 1\right\}.$$

16. Dans les deux prochaines questions uniquement, on suppose que $n = 2$. Montrer que si $(x_1, x_2) \in \mathscr{S}_2$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $(x_1, x_2) = \big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big)$ et $f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{2}\sin(\theta)$. En déduire la valeur du minimum et du maximum.

17. Comment vérifier la cohérence du résultat à l'aide des lignes de niveau de f suivantes ?



18. On revient au cas général de $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Déterminer la valeur minimale et la valeur maximale de f sur $\mathscr{S}_n$.
On pourra penser à une inégalité célèbre.

Problème III : Convergence en loi et Loi de Gumbel

Soit V une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose $\mathrm{W} = -\ln \mathrm{V}$.

19. Justifier que W est une variable à densité et donner une densité.

On dit que W suit la loi de Gumbel.
On désigne par n un entier naturel non nul et par $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant une loi $\mathscr{E}(1)$.
On considère la variable aléatoire Y_n définie par $\mathrm{Y}_n = \max(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n)$.

20. Donner l'expression $\mathrm{F}_{\mathrm{Y}_n}(t)$ où $\mathrm{F}_{\mathrm{Y}_n}$ est la fonction de répartition de Y_n. Vérifier que Y_n est une variable à densité et donner une densité f_{Y_n} de Y_n.

- *Nouvelle expression de l'espérance*

21. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - \mathrm{F}_{\mathrm{Y}_n}(t)\big)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

22. Établir l'égalité suivante : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \displaystyle\int_0^x \big(1 - \mathrm{F}_{\mathrm{Y}_n}(t)\big)\,\mathrm{d}t = x\big(1 - \mathrm{F}_{\mathrm{Y}_n}(x)\big) + \int_0^x t f_{\mathrm{Y}_n}(t)\,\mathrm{d}t.$

23. Montrer que $x\big(1 - \mathrm{F}_{\mathrm{Y}_n}(x)\big) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. En déduire que Y_n possède une espérance et prouver l'égalité :

$$\mathbf{E}(\mathrm{Y}_n) = \int_0^{+\infty} \big(1 - \mathrm{F}_{\mathrm{Y}_n}(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

- *Calcul de l'espérance*

24. Montrer, grâce au changement de variable $u = 1-\mathrm{e}^{-t}$, que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x \left(1-\mathrm{F}_{\mathrm{Y}_n}(t)\right)\mathrm{d}t = \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \frac{1-u^n}{1-u}\,\mathrm{d}u$.

25. En déduire que $\displaystyle\int_0^x \left(1-\mathrm{F}_{\mathrm{Y}_n}(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)^k}{k}$, puis exprimer $\mathbf{E}(\mathrm{Y}_n)$ sous forme de somme.

- *Simulation*

  On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Z}_n = \mathrm{Y}_n - \ln n$.

  On rappelle que dans la librairie **numpy.random** importée sous **rd**, se trouve la commande **rd.exponential(a,n)** qui renvoie n simulations d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{a}$.

26. Écrire une fonction **SimuG** qui simule une variable aléatoire suivant une loi de Gumbel.

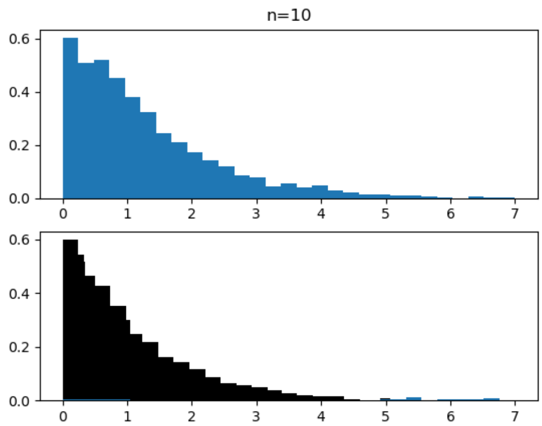
27. Écrire une seconde une fonction **SimuZ** qui prend en argument n et simule la variable Z_n.

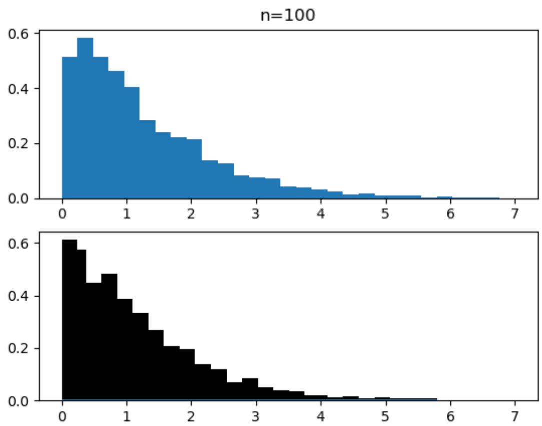
28. Voici un premier script

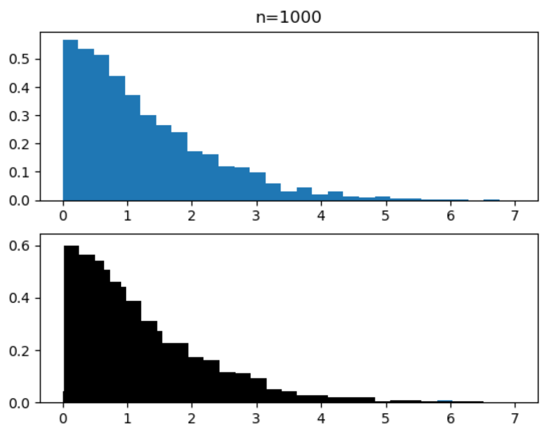
Editeur

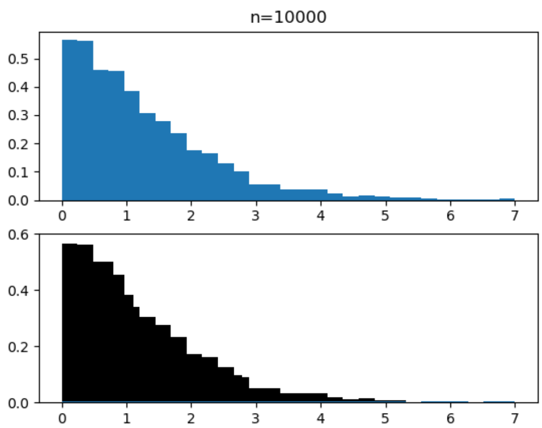
```python
echG=np.zeros(5000)
echZ=np.zeros(5000)
for i in range(5000):
    g=SimuG()
    z=SimuZ(n)
    echG[i]=g
    echZ[i]=z

x=np.linspace(0,7,30)
plt.subplot(211) # permet de séparer les graphes en les mettant l'un au dessus de l'autre
plt.title('n=10000')
plt.hist(echG,bins=x,density=True,color='blue')
plt.subplot(212)
plt.hist(echZ,bins=x,density=True, color='black')
plt.show()
```

et les réponses pour plusieurs valeurs de n.









Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite des variables aléatoires $(Z_n)_n$?

On note F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n.

29. Justifier que, pour tout réel x, on a : $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln n)$.

30. Démontrer le résultat conjecturé.

Kurtosis

Le kurtosis d'une variable aléatoire X non presque surement constante possédant des moments jusqu'à l'ordre 4 est définie par

$$\kappa(X) = \frac{\mathbf{E}\left(|X-\mu|^4\right)}{\mathbf{E}\left(|X-\mu|^2\right)^2} - 3 \quad \text{où} \quad \mu = \mathbf{E}(X).$$

Le kurtosis caractérise la forme de pic ou l'aplatissement relatifs d'une distribution comparée à une distribution normale. Un kurtosis positif indique une distribution relativement pointue, tandis qu'un kurtosis négatif signale une distribution relativement aplatie.

- *Premières propriétés*

31. Soient deux variables aléatoires réelles A et B définies sur un même espace probabilisé et admettant un moment d'ordre 2. On souhaite établir la relation

$$\mathbf{E}(|AB|) \leqslant \sqrt{\mathbf{E}\left(A^2\right)\mathbf{E}\left(B^2\right)},$$

avec égalité si et seulement si $A = \lambda B$ pour un certain réel λ.

a) Justifier que la relation est vraie si $\mathbf{E}(B^2) = 0$.

b) On définit ensuite pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = \mathbf{E}\big((A+\lambda B)^2\big)$. Vérifier que P est un polynôme de degré 2.

c) Conclure sur la relation à l'aide du discriminant.

32. Soit X une variable aléatoire admettant un kurtosis. Soient α et β deux réels, avec $\alpha \neq 0$. Montrer que la variable aléatoire $\alpha X + \beta$ admet un kurtosis, et que l'on a :

$$\kappa(\alpha X + \beta) = \kappa(X).$$

33. Montrer que $\kappa(X) \geqslant -2$.

- *Exemples*

34. Vérifier que le kurtosis d'une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ est donné par $\frac{1-6pq}{pq}$.

35. Dans cette question, on suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$.

a) Donner le moment d'ordre 2 de X. À l'aide d'une intégration par parties, calculer le moment d'ordre 4.

b) En déduire que le kurtosis de X est nul.

c) Donner le kurtosis d'une loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$.

- *Kurtosis et sommes*

36. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, centrées, admettant un kurtosis. Montrer :

$$\mathbf{E}\left((X+Y)^4\right) = \mathbf{E}\left(X^4\right) + 6\mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y) + \mathbf{E}\left(Y^4\right).$$

37. Établir la formule :

$$\kappa(X+Y) = \frac{\mathbf{V}(X)^2\kappa(X) + \mathbf{V}(Y)^2\kappa(Y)}{\big(\mathbf{V}(X)+\mathbf{V}(Y)\big)^2}.$$

Est-ce que cette formule est encore valable pour des variables X et Y indépendantes mais non nécessairement centrées ?

38. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, montrer que si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes, chacune admettant un kurtosis, alors

$$\kappa\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}\left(X_k\right)^2 \kappa\left(X_k\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}\left(X_k\right)\right)^2}$$

39. Soient X une variable aléatoire admettant un kurtosis, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi que X. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

a) $\lim_{n\to+\infty} \kappa(S_n) = 0$.

b) Interpréter ce résultat, en commençant par rappeler l'énoncé du théorème central limite.

– FIN –

DS 9 - sujet *

THÈMES : VARIABLES ALÉATOIRES, OPTIMISATION

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Échauffements

On considère la partie de $\mathbb{R}^2$ et la fonction

$$\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x < y\right\} \quad \text{et} \quad f : \begin{cases} \mathscr{D} \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - \ln(y - x). \end{cases}$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{D}$ et préciser les dérivées partielles premières et secondes sur $\mathscr{D}$.
2. Montrer que f admet un unique point critique que l'on déterminera.
3. Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. En déduire que la fonction f admet un extremum local.
4. Justifier que cet extremum est même global.

Mathématiques et finance

Un gestionnaire investit un capital parmi n actifs, notés A_1, $A_2, \ldots, A_n$ (par exemple des actions), disponibles sur le Marché Boursier. Les rendements à un an de ces actifs, exprimés en pourcentage, sont des variables aléatoires $R_1, R_2, .., R_n$ admettant des moments d'ordre 1 et 2. Par exemple, si l'actif A_1 a rapporté 6%, R_1 prend la valeur 6.
Le gestionnaire constitue un portefeuille, c'est-à-dire un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tel que, pour tout i de $[\![1;n]\!]$, x_i est un réel positif ou nul et tel que : $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$. Chaque coefficient x_i représente la proportion du capital investie dans l'actif A_i.
Par exemple, si n vaut 3 et si le gestionnaire investit un quart du capital dans l'actif A_1, la moitié du capital dans l'actif A_2 et le quart du capital dans l'actif A_3, le portefeuille vaut $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.
Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un portefeuille donné, le rendement (en pourcentage) de ce portefeuille est la variable aléatoire :

$$R = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i.$$

Notre gestionnaire prudent désire minimiser les risques et recherche pour cela les portefeuilles dont le rendement R est de variance minimale ; sous certaines hypothèses.

Préliminaire

On considère le portefeuille : $Q = (x_1, \ldots, x_n)$ et son rendement : $R = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i R_i$.

5. Justifier que la variance de R est :

$$\mathbf{V}(R) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \mathbf{V}(R_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j \operatorname{Cov}\left(R_i, R_j\right).$$

6. On suppose que l'on dispose de la matrice A de taille n dont le coefficient en position (i,j) est donné par

$$a_{i,j} = \mathrm{Cov}\left(\mathrm{R}_i, \mathrm{R}_j\right).$$

Écrire une fonction `Variance` qui prend en argument le portefeuille Q et A puis renvoie la valeur de $\mathbf{V}(\mathrm{R})$.

On définit sur $\mathbb{R}^n$, la fonction F : par

$$\mathrm{F}(x_1,..,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \mathbf{V}(\mathrm{R}_i) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j \,\mathrm{Cov}\left(\mathrm{R}_i, \mathrm{R}_j\right) \qquad (\star)$$

- *Minimum global ?*

7. On considère un élément X de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: Vérifier que l'on a : $\mathbf{V}(\mathrm{R}) = {}^t\mathrm{XAX}$.

8. **a)** Montrer que A est une matrice diagonalisable.

b) Justifier que les valeurs propres de A sont positives ou nulles.

9. Montrer que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\nabla \mathrm{F}(x) = 2\mathrm{AX}, \qquad \nabla^2 \mathrm{F}(x) = 2\mathrm{A}$$

où X désigne la matrice des coordonnées de x dans la base canonique.

10. Que peut-on en déduire sur l'existence d'un extremum global de F ?

- *Minimum sur une restriction*

11. On considère l'ensemble :

$$\mathrm{H} = \left\{ (x_1,\dots,x_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}.$$

Est-ce que l'ensemble H est fermé ? ouvert ? ni-ouvert, ni-fermé ? Borné ?

12. Montrer que F admet un minimum sur H.

La suite du problème consiste à déterminer ce minimum et les points de H où ce minimum est atteint, pour répondre ainsi à la demande du gestionnaire prudent.

Partie 1

Dans cette partie, l'entier n vaut 2 et les rendements des actifs A_1 et A_2 sont notés respectivement X et Y. On suppose :

$$\mathbf{V}(\mathrm{X}) = 12, \qquad \mathbf{V}(\mathrm{Y}) = 3, \qquad \mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = c, \qquad \text{où } c \text{ est un réel donné.}$$

Pour un réel a de $[0,1]$, on considère le portefeuille $(a, 1-a)$ dont le rendement est la variable aléatoire : $\mathrm{R} = a\mathrm{X} + (1-a)\mathrm{Y}$.

13. Montrer que l'on a : $|c| \leqslant 6$.

14. **a)** Montrer que l'on a : $\mathbf{V}(\mathrm{R}) = (15-2c)a^2 + 2(c-3)a + 3$.

b) On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction h par : $\quad h(x) = (15-2c)x^2 + 2(c-3)x + 3$.

→ Étudier les variations de h sur $[0,1]$, en distinguant les deux cas : $c \in [-6,3[$ et $c \in [3,6]$.

→ Montrer qu'il existe un unique portefeuille dont le rendement est de variance minimale. On déterminera ce portefeuille en fonction de c.

15. **a)** On suppose : $c = -6$.

Déterminer le portefeuille dont le rendement R est de variance minimale et cette variance minimale. Que peut-on dire de la variable aléatoire R dans ce cas ?

b) On suppose que les variables X et Y sont indépendantes. Montrer que $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ est le portefeuille de rendement de variance minimale.

- *Un cas gaussien*

16. On suppose dans ces deux prochaines questions que X et Y sont des variables indépendantes qui suivent des lois normales : $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{N}(6,12)$, $\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathscr{N}(3,3)$.

Soit R le rendement du portefeuille $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Quelle est la loi de R ?

17. Calculer la probabilité que R soit supérieur ou égal à 4.

On donne : $\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right) = 0.60$, *où* Φ *est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.*

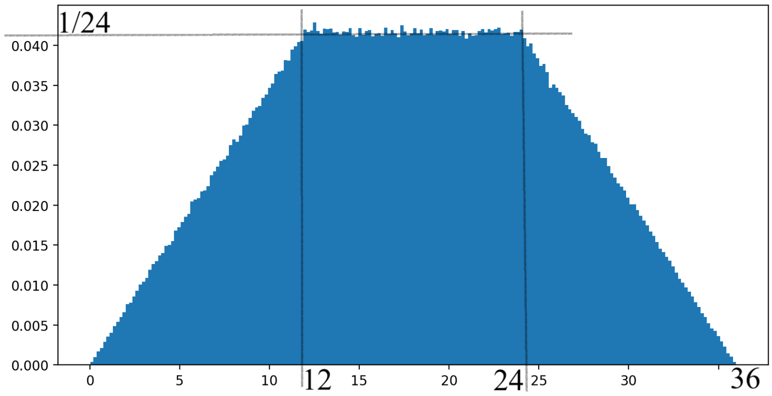
- *Un cas uniforme*
  On suppose dans la suite de cette partie que les variables à densité X et Y sont indépendantes. On suppose de plus que X suit la loi uniforme sur $[0,12]$ et que Y suit la loi uniforme sur $[0,6]$.

18. Donner les valeurs des espérances de ces variables et vérifier que $\mathbf{V}(\mathrm{X}) = 12$, $\mathbf{V}(\mathrm{Y}) = 3$.

19. *Estimation avec Python*

  a) Proposer un programme qui simule $\mathrm{X} + 4\mathrm{Y}$ à l'aide de la commande `rd.random()`.

  b) En déduire un programme qui prend en argument m et renvoie un histogramme de m réalisations de $\mathrm{X} + 4\mathrm{Y}$.
  Voici le résultat pour $m = 20000$ et avec 30 classes :

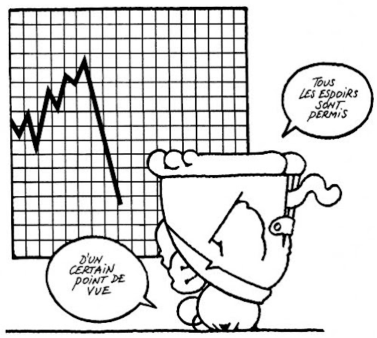


20. Donner la loi de la variable 4Y et justifier que la variable $\mathrm{X} + 4\mathrm{Y}$ est à densité.

21. **a)** À l'aide de la simulation précédente, proposer une densité de la variable $\mathrm{X} + 4\mathrm{Y}$.

  b) Prouver votre conjecture sur $[0;12]$.

22. Soit R le rendement du portefeuille $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Calculer la probabilité que R soit supérieur ou égal à 4.
On pourra admettre la conjecture de la question 21.



Partie 2

Dans cette partie, n vaut 3 et les rendements des actifs A_1, A_2 et A_3 sont notés respectivement X, Y et Z. On suppose de plus :

$$\mathbf{V}(\mathrm{X}) = 2, \qquad \mathbf{V}(\mathrm{Y}) = \mathbf{V}(\mathrm{Z}) = 6, \qquad \mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = -1, \qquad \mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Z}) = 2, \qquad \mathrm{Cov}(\mathrm{Y},\mathrm{Z}) = 1.$$

On considère le portefeuille (x, y, z) dont le rendement est la variable : $\mathrm{R} = x\mathrm{X} + y\mathrm{Y} + z\mathrm{Z}$.
La fonction f, l'ensemble K et l'ensemble K_0 sont définis comme suit :

$$\mathrm{K} = \left\{(x,y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2 \mid x + y \leqslant 1\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{K}_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y < 1\right\}$$

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = 4x^2 + 10y^2 + 4xy - 8x - 10y + 6,$$

23. Dessiner le domaine K.
Justifier que f admet un minimum sur K et montrer ensuite que le problème du gestionnaire revient à déterminer ce minimum de f sur K.

24. Montrer que f admet un unique point critique sur $\mathbb{R}^2$ atteint au point $(5/6, 1/3)$.
En reprenant le premier exercice, on montre et on admet que ce point critique donne un minimum global pour f sur $\mathbb{R}^2$.

25. Justifier que f n'admet pas de minimum sur K_0.

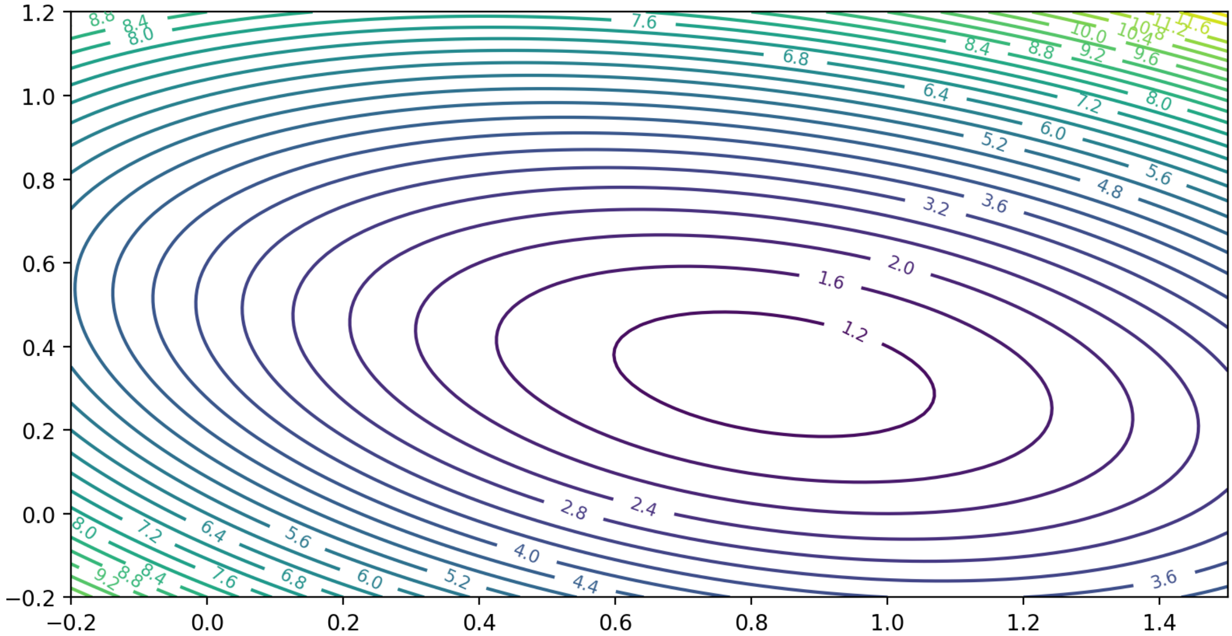
26. On pose :

$$\mathrm{K}_1 = \{(0,y) : y \in [0,1]\}, \quad \mathrm{K}_2 = \{(x,0) : x \in [0,1]\}, \quad \text{et} \quad \mathrm{K}_3 = \{(x,1-x) : x \in [0,1]\}.$$

  a) Déterminer les minima de f respectivement sur K_1, K_2 et K_3.

  b) En déduire l'unique portefeuille dont le rendement est de variance minimale.

Bonus Commenter votre résultat avec les lignes de niveau de f :



Partie 3

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2.
On rappelle que A désigne la matrice de covariance de $R_1, \dots, R_n$, c'est-à-dire la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est égal à $\mathrm{Cov}\left(R_i, R_j\right)$.

On suppose dans la suite que A inversible. Pour tout (U, W) de $\left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^2$, on pose

$$\varphi(U, W) = {}^t UAW.$$

27. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On note N la norme associée à ce produit scalaire.

28. Démontrer que pour tout (U, W) de $\left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^2$,

$$\left[N\left(\frac{U+W}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{2}\left[(N(U))^2 + (N(W))^2\right] - \left[N\left(\frac{U-W}{2}\right)\right]^2.$$

29. En déduire l'unicité du portefeuille dont le rendement est de variance minimale (l'existence ayant été montrée dans le préliminaire, question 12).

Kurtosis

Le kurtosis d'une variable aléatoire X non presque surement constante possédant des moments jusqu'à l'ordre 4 est définie par

$$\kappa(X) = \frac{\mathbf{E}\left(|X-\mu|^4\right)}{\mathbf{E}\left(|X-\mu|^2\right)^2} - 3 \quad \text{où} \quad \mu = \mathbf{E}(X).$$

Le kurtosis caractérise la forme de pic ou l'aplatissement relatifs d'une distribution comparée à une distribution normale. Un kurtosis positif indique une distribution relativement pointue, tandis qu'un kurtosis négatif signale une distribution relativement aplatie.
Dans la suite, on pourra poser, sous réserve d'existence, le moment centré d'ordre n de la variable X

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mu_n(X) = \mathbf{E}\left(\left(X - \mathbf{E}(X)\right)^n\right).$$

- *Premières propriétés*

30. Soient deux variables aléatoires réelles A et B définies sur un même espace probabilisé et admettant un moment d'ordre 2. Montrer que

$$\mathbf{E}(|AB|) \leqslant \sqrt{\mathbf{E}(A^2)\,\mathbf{E}(B^2)},$$

avec égalité si et seulement si $A = \lambda B$ pour un certain réel λ.

31. Soit X une variable aléatoire admettant un kurtosis. Soient α et β deux réels, avec $\alpha \neq 0$. Montrer que la variable aléatoire $\alpha X + \beta$ admet un kurtosis, et que l'on a :

$$\kappa(\alpha X + \beta) = \kappa(X).$$

- *Minoration du kurtosis*

32. Montrer que $\kappa(X) \geqslant -2$. Que dire d'une variable aléatoire X telle que $\kappa(X) = -2$?

- *Exemples*

33. Vérifier que le kurtosis d'une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ est donné par $\dfrac{1-6pq}{pq}$ avec $q = 1 - p$.

34. Vérifier que le kurtosis d'une loi normale centrée réduite est nul. En déduire le kurtosis d'une loi $\mathscr{N}(\mu;\sigma^2)$.

- *Kurtosis et sommes*

35. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, centrées, admettant un kurtosis. Montrer :

$$\mathbf{E}\left((X+Y)^4\right) = \mathbf{E}\left(X^4\right) + 6\,\mathbf{V}(X)\,\mathbf{V}(Y) + \mathbf{E}\left(Y^4\right).$$

36. Établir la formule :

$$\kappa(X+Y) = \frac{\mathbf{V}(X)^2\kappa(X) + \mathbf{V}(Y)^2\kappa(Y)}{\left(\mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)\right)^2}.$$

Est-ce que cette formule est encore valable pour des variables X et Y indépendantes mais non nécessairement centrées ?

37. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, montrer que si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes, chacune admettant un kurtosis, alors

$$\kappa\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k)^2\,\kappa(X_k)}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k)\right)^2}$$

38. Donner le kurtosis d'une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

39. Soient X une variable aléatoire admettant un kurtosis, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi que X. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

a) Établir : $\lim\limits_{n\to+\infty} \kappa(S_n) = 0$.

b) Interpréter ce résultat, en commençant par rappeler l'énoncé du théorème central limite.

– FIN –

DS 9 - solution - sujet 1

Exercice 1

Notons que pour tout $x > 0$, on peut mettre $\varphi(x)$ sous la forme :

$$\varphi(x) = \ln(x) - a\mathrm{e}^{2a\ln(x)}.$$

1. En 0^+ :
$$\left\{\begin{array}{lcl} \ln(x) & \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} & -\infty \\ \mathrm{e}^{2a\ln(x)} & \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} & 0 \quad (\text{car, comme } a>0,\ 2a\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty) \end{array}\right. \qquad \text{donc } \varphi(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty.$$
En $+\infty$, il s'agit d'une forme indéterminée « $+\infty + (-\infty)$ », que l'on peut lever en utilisant les résultats de croissances comparées :
Comme $2a > 0$, $\ln(x) = o_{+\infty}\left(x^{2a}\right)$ donc $\ln(x) - a\mathrm{e}^{2a\ln(x)} \sim_{+\infty} -a\mathrm{e}^{2a\ln(x)}$, d'où $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
La fonction φ est dérivable et pour tout $x > 0$:
$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2a^2x^{2a-1} = \frac{1-2a^2x^{2a}}{x}$$
Le signe de $\varphi'(x)$ est celui du numérateur $1-2a^2x^{2a}$ qui est l'expression d'une fonction strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et s'annulant en $x_0 = \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$ (donc « positive puis négative »).
On en déduit le tableau de variations de φ :

x	0		x_0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(x_0)$	$\searrow$	$-\infty$

L'énoncé ne précise pas si une expression de $\varphi(x_0)$ en fonction de a est attendue, mais elle nous servira pour la question suivante :
$$\varphi(x_0) = \varphi\left(\left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}\right) = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{1}{2a^2}\right) - a\frac{1}{2a^2} = -\frac{1}{2a}\left(\ln(2a^2)+1\right).$$

2. Déterminons le signe de $\varphi(x_0)$, maximum de φ atteint en x_0, en fonction de a :
$$\begin{array}{rcll} \varphi(x_0) > 0 & \iff & -\frac{1}{2a}\left(\ln(2a^2)+1\right) > 0 & \\ & \iff & \ln(2a^2)+1 < 0 & \\ & \iff & \ln(2a^2) < -1 & \\ & \iff & 2a^2 < \mathrm{e}^{-1} & (\text{strict. croissance de exp}) \\ & \iff & a^2 < \frac{1}{2\mathrm{e}} & \\ & \iff & a < \sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}} & (\text{croissance de } x \mapsto \sqrt{x} \text{ sur } \mathbb{R}^+ \text{ (et } a>0)) \end{array}$$

D'où le tableau de signes :

a	0		$\frac{1}{\sqrt{2e}}$		$+\infty$
$\varphi(x_0)$		$+$	0	$-$	

Par conséquent :

— Si $a < \frac{1}{\sqrt{2e}}$:
La fonction φ est continue et strictement croissante sur $]0, x_0[$, donc réalise une bijection de $]0, x_0[$ dans $]\lim_0 \varphi, \varphi(x_0)[=]-\infty, \varphi(x_0)[$; ce dernier intervalle contenant 0, il existe un unique réel $z_1 \in]0, x_0[$ tel que $\varphi(z_1) = 0$.
De même, φ réalise une bijection (décroissante) de $]x_0, +\infty[$ dans $]-\infty, \varphi(x_0)[$, donc il existe un unique réel $z_2 \in]x_0, +\infty[$ tel que $\varphi(z_2) = 0$.

— Si $a = \frac{1}{\sqrt{2e}}$, alors $\varphi(x_0) = 0$ et, d'après le tableau de variation déterminé en question 2., $\varphi(x) < 0$ pour $x \neq x_0$. Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution : x_0.

— Si $a > \frac{1}{\sqrt{2e}}$, étant donné les variations de φ, cette fonction est strictement négative et l'équation $\varphi(x) = 0$ n'admet aucune solution.

3. Les fonctions (d'une variable réelle) ln et $t \mapsto t^a$ étant de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_*^+$. De plus, les fonctions coordonnées $(x, y) \in U \mapsto x$, $(x, y) \in U \mapsto y$ et polynomiale $(x, y) \in U \mapsto xy$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$. Par composition les fonctions

$$(x, y) \in U \mapsto \ln(x), \quad (x, y) \in U \mapsto \ln(y) \quad \text{et} \quad (x, y) \in U \mapsto (xy)^a$$

sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur R. Finalement f est aussi $\mathscr{C}^2$ par produit et somme.
Pour tout $(x, y) \in U$:

$$\partial_1(f)(x, y) = \frac{1}{x}\ln(y) - ax^{a-1}y^a \quad ; \quad \partial_2(f)(x, y) = \frac{1}{y}\ln(x) - ax^a y^{a-1}.$$

4. Les points critiques de f sont les points (x, y) de U annulant le gradient de f :

$$\begin{aligned}
\nabla(f)(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad & \iff \quad \begin{cases} \partial_1(f)(x, y) = 0 \\ \partial_2(f)(x, y) = 0 \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} \frac{1}{x}\ln(y) - ax^{a-1}y^a = 0 \\ \frac{1}{y}\ln(x) - ax^a y^{a-1} = 0 \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} \frac{1}{x}(\ln(y) - ax^a y^a) = 0 \\ \frac{1}{y}(\ln(x) - ax^a y^a) = 0 \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} \ln(y) = ax^a y^a \\ \ln(x) = ax^a y^a \end{cases} \quad (1/x \text{ et } 1/y \text{ sont non nuls}) \\
& \iff \quad \begin{cases} \ln(y) = ax^a y^a \\ \ln(x) = \ln(y) \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\
& \iff \quad \begin{cases} \ln(x) = ax^a x^a \\ x = y \end{cases} \quad (\ln \text{ est bijective sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ ; report dans } L_1) \\
& \iff \quad \begin{cases} \varphi(x) = 0 \\ x = y \end{cases}
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $\varphi(x) = 0$ sont données par la question 2. ; on obtient donc

— Si $a < \frac{1}{\sqrt{2e}}$: f admet deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2).

— Si $a = \frac{1}{\sqrt{2e}}$: f admet un unique point critique : (x_0, x_0).

— Si $a > \frac{1}{\sqrt{2e}}$: f n'admet pas de point critique.

5. Pour tout $(x, y) \in U$:

$$\begin{cases}
\partial^2_{1,1}(f)(x, y) & = & \frac{-1}{x^2}\ln(y) - a(a-1)x^{a-2}y^a \\
\partial^2_{1,2}(f)(x, y) & = & \frac{1}{xy} - a^2(xy)^{a-1} \\
\partial^2_{2,1}(f)(x, y) & = & \frac{1}{xy} - a^2(xy)^{a-1} \\
\partial^2_{2,2}(f)(x, y) & = & \frac{-1}{y^2}\ln(x) - a(a-1)x^a y^{a-2}
\end{cases}$$

6. Comme z_1 vérifie $\varphi(z_1) = \ln(z_1) - az_1{}^{2a} = 0$, on a :

$$\partial^2_{1,1}(f)(z_1,z_1) = \frac{-1}{z_1{}^2}\underbrace{\ln(z_1)}_{=az_1{}^{2a}} - a(a-1)z_1{}^{a-2}z_1{}^{a} = \cancel{-az_1{}^{2a-2}} - a(a\cancel{-1})z_1{}^{2a-2} = -a^2 z_1{}^{2a-2}.$$

Les expressions de $\partial^2_{1,1}(f)(x,y)$ et $\partial^2_{2,2}(f)(x,y)$ étant identiques en échangeant x et y, le même calcul donne :

$$\partial^2_{2,2}(f)(z_1,z_1) = -a^2 z_1{}^{2a-2}.$$

Enfin :

$$\partial^2_{1,2}(f)(z_1,z_1) = \partial^2_{2,1}(f)(z_1,z_1) = \frac{1}{z_1{}^2} - a^2\left(z_1{}^2\right)^{a-1} = \frac{1}{z_1{}^2} - a^2 z_1{}^{2a-2}$$

7. On a :

$$MX_1 = \begin{bmatrix} -a^2 z_1{}^{2a-2} & \frac{1}{z_1{}^2} - a^2 z_1{}^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1{}^2} - a^2 z_1{}^{2a-2} & -a^2 z_1{}^{2a-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_1{}^2} - 2a^2 z_1{}^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1{}^2} - 2a^2 z_1{}^{2a-2}\end{bmatrix}$$

donc
$$MX_1 = \left(\frac{1}{z_1{}^2} - 2a^2 z_1{}^{2a-2}\right)X_1.$$

De même,
$$MX_2 = \begin{bmatrix} -a^2 z_1{}^{2a-2} & \frac{1}{z_1{}^2} - a^2 z_1{}^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1{}^2} - a^2 z_1{}^{2a-2} & -a^2 z_1{}^{2a-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_1{}^2} \\ -\frac{1}{z_1{}^2}\end{bmatrix}$$

donc $MX_2 = -\frac{1}{z_1{}^2}X_2$.

Par conséquent, les nombres $\lambda_1 = \frac{1}{z_1{}^2} - 2a^2 z_1{}^{2a-2}$ et $\lambda_2 = -\frac{1}{z_1{}^2}$ sont valeurs propres de la matrice M (et X_1, X_2 sont des vecteurs propres associés respectivement à ces deux valeurs). Puisque (X_1, X_2) est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, il ne peut y avoir d'autre valeur propre :

$$\mathrm{Sp}(M) = \left\{\frac{1}{z_1{}^2} - 2a^2 z_1{}^{2a-2}, -\frac{1}{z_1{}^2}\right\}.$$

8. Avec les notations précédentes, clairement : $\lambda_2 < 0$.
On peut utiliser la question 2. pour déterminer le signe de λ_1 en remarquant que :

$$\lambda_1 = \frac{1}{z_1{}^2} - 2a^2 z_1{}^{2a-2} = \frac{1 - 2a^2 z_1{}^{2a}}{z_1{}^2} = \frac{1}{z_1}\varphi'(z_1)$$

Comme z_1 est dans $]0, x_0[$, intervalle sur lequel φ' est strictement positive, on en déduit : $\lambda_1 > 0$.
Par conséquent, la matrice hessienne de f au point critique (z_1, z_1) admet deux valeurs propres non nulles et de signes opposés, donc f ne présente pas en ce point d'extremum local (il s'agit d'un point col).

9. En (z_2, z_2), les calculs sont similaires et on obtient :

$$\mathrm{Sp}\big(\nabla^2(f)(z_2,z_2)\big) = \Big\{\underbrace{\frac{1}{z_2{}^2} - 2a^2 z_2{}^{2a-2}}_{=\lambda'_1}, \underbrace{-\frac{1}{z_2{}^2}}_{=\lambda'_2}\Big\}.$$

Comme à la question précédente :

$$\lambda'_1 = \frac{1}{z_2}\varphi'(z_2).$$

Mais ici, comme z_2 est dans $]x_0, +\infty[$, intervalle sur lequel φ' est strictement *négative*, on en déduit : $\lambda'_1 < 0$.
Par conséquent, la matrice hessienne de f au point critique (z_2, z_2) admet deux valeurs propres strictement négatives, donc f présente en ce point un maximum local.

. *Le corrigé l'exercice est celui de Romain Meurant pour l'APHEC (ECRICOME 2017).*

Pour les problèmes II et III, voir la correction manuscrite et pour le dernier problème, voir le sujet *.

DS 9 - solution - sujet *

Kurtosis

30. Considérons l'application

$$P : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{E}\left((A+\lambda B)^2\right)$$

La fonction P est polynomiale de degré au plus 2 car

$$P(\lambda) = \mathbf{E}\left(A^2\right) + 2\lambda \mathbf{E}(AB) + \lambda^2 \mathbf{E}\left(B^2\right).$$

Si $\mathbf{E}\left(B^2\right) = 0$ alors le résultat est directement vérifié car la variable B est alors nulle.
Supposons donc $\mathbf{E}\left(B^2\right) \neq 0$. Le polynôme P est de degré 2 et son discriminant est

$$\Delta = 4\left(\mathbf{E}(AB)^2 - \mathbf{E}\left(A^2\right)\mathbf{E}\left(B^2\right)\right).$$

Comme P est positive, P ne change pas de signe, son discriminant est négatif. On en déduit que

$$\mathbf{E}(AB) \leqslant \sqrt{\mathbf{E}\left(A^2\right)} \cdot \sqrt{\mathbf{E}\left(B^2\right)}.$$

Il y a égalité si et seulement il existe un réel λ tel que

$$\mathbf{E}\left((A+\lambda B)^2\right) = 0.$$

Comme $(A+\lambda B)^2$ est une variable positive, on a nécessairement que $A+\lambda B$ est presque sûrement nul.

31. Soit X une variable aléatoire admettant un kurtosis.
Soient α et β deux réels, avec $\alpha \neq 0$.
Alors X a une espérance donc $\alpha X+\beta$ a une espérance et

$$[\alpha X+\beta - \mathbf{E}(\alpha X+\beta)]^n = \alpha^n [X - \mathbf{E}(X)]^n$$

qui bien définit pour $n = 2$, 3 et 4. Donc $\alpha X+\beta$ a des moments centré d'ordre 2, 3 et 4 et

$$\mu_n(\alpha X+\beta) = \alpha^n \mu_n(X)$$

De plus,

$$\mathbf{V}(\alpha X+\beta) = \alpha^2 \mathbf{V}(X) \neq 0$$

car $\alpha \neq 0$. on en déduit que $\alpha X+\beta$ admet un kurtosis.
De plus

$$\begin{aligned}\kappa(\alpha X+\beta) &= \frac{\mu_4(\alpha X+\beta)}{(\mathbf{V}(\alpha X+\beta))^2} - 3 \\ &= \frac{\alpha^4 \mu_4(X)}{\left(\alpha^2 \mathbf{V}(X)\right)^2} - 3 \\ &= \kappa(X)\end{aligned}$$

Finalement, $\kappa(\alpha X+\beta) = \kappa(X)$.

32. Soit X ayant un kurtosis et $Y = X - \mathbf{E}(X)$. D'après ce qui précède

$$\kappa(X) = \kappa(Y).$$

Comme $\mathbf{E}(Y) = 0$, on a

$$\kappa(Y) = \frac{\mathbf{E}\left(Y^4\right)}{\mathbf{E}\left(Y^2\right)^2} - 3$$

et comme

$$\mathbf{E}\left(\left(Y^2\right)^2\right) \geqslant \mathbf{E}\left(Y^2\right)^2 > 0 \qquad (\mathbf{V}(Y) \neq 0)$$

alors

$$\frac{\mathbf{E}\left(Y^4\right)}{\mathbf{E}\left(Y^2\right)^2} \geqslant 1.$$

Finalement, si X a un kurtosis, il est supérieur ou égal à -2.
Dès lors, s'il y a égalité alors

$$\mathbf{V}(Y^2) = \mathbf{E}\left(Y^4\right) - \mathbf{E}\left(Y^2\right)^2 = 0.$$

Ainsi Y^2 est presque surement constante. Il existe $c \in \mathbb{R}_*^+$ et $p \in [0;1]$ tels que

$$\mathbf{P}(Y = c) = p \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(Y = -c) = 1-p.$$

On peut reformuler le tout en disant qu'à une translation affine près $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha X+\beta \hookrightarrow \mathscr{B}(p).$$

La question suivante permet justement de vérifier qu'il n'y a égalité que si $p = 1/2$.

33. La variable X est finie donc admet des moments et des moments centrés de tous ordres. Par théorème de transfert on a :

$$\begin{aligned}\mu_4(X) = \mathbf{E}(X-p)^4 &= (0-p)^4 \times (1-p) + (1-p)^4 \times p \\ &= p(1-p)\left[p^3 + (1-p)^3\right] \\ &= p(1-p)\left[p^3 + 1 - 3p + 3p^2 - p^3\right] \\ &= p(1-p)\left[3p^2 - 3p + 1\right].\end{aligned}$$

De plus $\mathbf{V}(X) = p(1-p) \neq 0$ donc X admet un kurtosis. Enfin

$$\begin{aligned}\kappa(X) &= \frac{p(1-p)\left[3p^2-3p+1\right]}{[p(1-p)]^2} - 3 \\ &= \frac{3p^2-3p+1}{p(1-p)} - 3 \\ &= \frac{3p^2-3p+1-3p(1-p)}{p(1-p)} \\ &= \frac{6p^2-6p+1}{p(1-p)}.\end{aligned}$$

34. Par une intégration par partie, on montre que si X suit une loi normale centrée réduite alors

$$\mu_{n+2}(X) = (n+1)\mu_n(X)$$

En particulier

$$\mu_4(X) = 3\mu_2(X) = 3\mathbf{V}(X) = 3.$$

On obtient bien un kurtosis nul.
Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors

$$X^* = \frac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1).$$

En utilisant la question 31,

$$\kappa(X) = \kappa(X^*) = 0.$$

35. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, centrées, admettant un kurtosis. En développant $(X+Y)^4$, on obtient une combinaison linéaire de terme X^iY^j avec $i+j=4$. Or, X, Y admettent des moments d'ordre 4 et X, Y sont indépendantes. Donc X^iY^j admet une espérance, et par extension $(X+Y)^4$ aussi. La variable $(X+Y)$ admet donc un moment d'ordre 4 et un kurtosis. Précisons le calcul :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left((X+Y)^4\right) \\
&= \mathbf{E}\left(X^4 + 4X^3Y + 6X^2Y^2 + 4XY^3 + Y^4\right) \text{ par linéarité} \\
&= \mathbf{E}\left(X^4\right) + 4\mathbf{E}\left(X^3Y\right) + 6\mathbf{E}\left(X^2Y^2\right) + 4\mathbf{E}\left(XY^3\right) + \mathbf{E}\left(Y^4\right) \\
&= \mathbf{E}\left(X^4\right) + 4\mathbf{E}\left(X^3\right)\mathbf{E}(Y) + 6\mathbf{E}\left(X^2\right)\mathbf{E}\left(Y^2\right) + 4\mathbf{E}(X)\mathbf{E}\left(Y^3\right) + \mathbf{E}\left(Y^4\right)
\end{aligned}$$

par indépendance de X et de Y. Or $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) = 0$, on obtient la simplification :

$$\mathbf{E}\left((X+Y)^4\right) = \mathbf{E}\left(X^4\right) + 6\mathbf{E}\left(X^2\right)\mathbf{E}\left(Y^2\right) + \mathbf{E}\left(Y^4\right).$$

Sachant que pour des variables centrées, le moment d'ordre 2 s'identifie avec la variance :

$$\mathbf{E}\left((X+Y)^4\right) = \mathbf{E}\left(X^4\right) + 6\mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y) + \mathbf{E}\left(Y^4\right).$$

36. On a alors

$$\mu_4(X+Y) = \mathbf{E}\left([X+Y-\mathbf{E}(X+Y)]^4\right) = \mathbf{E}\left((X+Y)^4\right)$$

et $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$ par indépendance

$$\begin{aligned}
&\kappa(X+Y) \\
&= \frac{\mathbf{E}(X^4) + 6\mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y) + \mathbf{E}(Y^4)}{[\mathbf{V}(X)+\mathbf{V}(Y)]^2} - 3 \\
&= \frac{\mathbf{E}(X^4) + 6\mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y) + \mathbf{E}(Y^4) - 3\mathbf{V}(X)^2 - 3\mathbf{V}(Y)^2 - 6\mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y)}{[\mathbf{V}(X)+\mathbf{V}(Y)]^2} \\
&= \frac{\mathbf{E}(X^4) - 3\mathbf{V}(X)^2 + \mathbf{E}(Y^4) - 3\mathbf{V}(Y)^2}{[\mathbf{V}(X)+\mathbf{V}(Y)]^2}
\end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{V}(X)^2\kappa(X) = \mathbf{E}\left(X^4\right) - 3\mathbf{V}(X)^2$$

$$\mathbf{V}(Y)^2\kappa(Y) = \mathbf{E}\left(Y^4\right) - 3\mathbf{V}(X)^2$$

On obtient le résultat annoncé.
La formule est encore valable pour les variables non centrées d'après la relation de la question 31 et la formule

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(X+\beta).$$

37. Procédons par récurrence sur la propriété

$$\mathscr{P}(n): \qquad \kappa\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k)^2 \kappa(X_k)}{\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k)\right)^2}$$

où les variables X_i sont indépendantes.

→ *Initialisation.* La formule est claire pour $n=1$.

→ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. Alors X_{n+1} étant indépendante des précédentes et admettant un kurtosis

$$\begin{aligned}
&\kappa\left(\sum_{k=1}^{n} X_k + X_{n+1}\right) \\
&= \frac{\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 \kappa\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) + \mathbf{V}(X_{n+1})^2\kappa(X_{n+1})}{\left[\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) + \mathbf{V}(X_{n+1})\right]^2}.
\end{aligned}$$

et comme $\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \left[\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k)\right]$ par indépendance et

$$\kappa\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k)^2 \kappa(X_k)}{\left[\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k)\right]^2}$$

par hypothèse alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 \kappa\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) &= \left[\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k)\right]^2 \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k)^2 \kappa(X_k)}{\left[\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k)\right]^2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k)^2 \kappa(X_k)
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\kappa\left(\sum_{k=1}^{n} X_k + X_{n+1}\right) &= \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k)^2 \kappa(X_k) + \mathbf{V}(X_{n+1})^2\kappa(X_{n+1})}{\left[\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k) + \mathbf{V}(X_{n+1})\right]^2} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \mathbf{V}(X_k)^2 \kappa(X_k)}{\left[\sum_{k=1}^{n+1} \mathbf{V}(X_k)\right]^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie si $\mathscr{P}(n)$ l'est.
Et donc la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

Remarque.
Soient X une variable admettant un kurtosis, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même

loi que X. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

On a donc pour tout k : $\kappa\left(X_k\right) = \kappa(X)$ et $\mathbf{V}\left(X_k\right) = \mathbf{V}(X)$ donc

$$\kappa\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X)^2 \kappa(X)}{\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X)\right)^2} = \frac{n\mathbf{V}(X)^2\kappa(X)}{[n\mathbf{V}(X)]^2} = \frac{1}{n}\kappa(X).$$

38. Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ alors X a la même loi (et donc même kurtosis) que

$$\sum_{k=1}^{n} X_k$$

où les variables sont toutes indépendantes et de loi $\mathscr{B}(p)$. En reprenant la remarque précédente et la question 33

$$\kappa(X) = \frac{1-6pq}{pqn}.$$

39.a) Par la remarque

$$\kappa(S_n) = \frac{\kappa(X_1)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

39.b) Le kurtosis de S_n est le même que celui de S_n^* (la variable centrée réduite obtenue à partir de S_n). Or d'après le théorème central limite (les variables X_i sont mutuellement indépendantes et admettent un moment d'ordre 2)

$$S_n^* \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z$$

avec $$Z \hookrightarrow \mathscr{N}(0;1).$$

Et on a vu que le kurtosis d'une loi $\mathscr{N}(0,1)$ est nul. Donc dans ces hypothèses, la limite du kurtosis d'une suite de variables est le kurtosis de la limite en loi.