Échauffements

1. La fonction $(x,y) \in \mathcal{D} \longmapsto y-x$ est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$. De plus, la fonction logarithme est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_*^+$. Par composition, $(x,y) \in \mathcal{D} \longmapsto \ln(y-x)$ est C^2 sur $\mathcal{D}$. Par somme avec une fonction polynomiale, f est C^2 sur $\mathcal{D}$.
   Pour $(x,y) \in \mathcal{D}$

$$\partial_1 f(x,y) = 2x + \frac{1}{y-x} \qquad \partial_2 f(x,y) = 2y - \frac{1}{y-x}.$$

et

$$\partial^2_{1,1} f(x,y) = 2 + \frac{1}{(y-x)^2}, \quad \partial^2_{2,2} f(x,y) = 2 + \frac{1}{(y-x)^2}$$

Enfin, par le théorème de Schwarz

$$\partial^2_{1,2} f(x,y) = -\frac{1}{(y-x)^2}$$

2. $(x,y) \in \mathcal{D}$ est point critique si et seulement si

$$\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{y-x} = 0 \\ 2y - \dfrac{1}{y-x} = 0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2y - \dfrac{1}{y-x} = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 2y = \dfrac{1}{2y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Le second cas est à exclure car $(x,y) \in \mathcal{D}$. Finalement, On a un unique point critique donné par

$$(x,y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

3. On a :

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Comme $A \in M_2(\mathbb{R})$, on a

$$Sp(A) = \{2 ; 4\}.$$

La matrice hessienne au point critique est :

$$\nabla^2 f\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

et d'après ce qui précède, le spectre est inclus dans $\mathbb{R}_*^+$. On sait alors que $f\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ est un minimum local car $\mathcal{D}$ est une partie ouverte.

Soit $(x,y) \in \mathcal{D}$. Posons $\alpha = 1/(y-x)^2$ de sorte que

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 2+\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 2+\alpha \end{bmatrix}$$

On a en particulier

$$\nabla^2 f(x,y) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et $$\nabla^2 f(x,y) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2\alpha \\ -2\alpha-2 \end{bmatrix} = (2+2\alpha) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

On en déduit que

$$Sp\left(\nabla^2 f(x,y)\right) = \{2 ; 2+2\alpha\} \subset \mathbb{R}^+ \quad \text{car } \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Enfin, $\mathcal{D}$ est une partie convexe, on sait alors que le minimum est global.

Mathématique et finance

5. R admet une variance car chaque R_i admet un moment d'ordre 2.

$$V(R) = Cov\left(\sum_{i=1}^{n} x_i R_i \,;\, \sum_{j=1}^{n} x_j R_j\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \, Cov(R_i ; R_j)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, Cov(R_i, R_i) + 2 \sum_{i<j} x_j x_i \, Cov(R_i, R_j)$$

D'où le résultat car $Cov(R_i, R_i) = V(R_i)$.

6. Utilisons la formule
$$V(R) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$
pour en déduire le code :

```
def Variance (Q, A):
    n = len (Q) ; S = 0
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            S += Q[i]*Q[j]*A[i,j]
    return S.
```

11. La fonction affine $f : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto x_1 + \dots + x_n$ est continue, donc l'ensemble

7. Calculs

8\. a La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable

b. Si U est vecteur propre pour A avec la valeur propre λ. On a d'une part

$$^tUAU = \lambda\,^tUU = \lambda \|U\|^2$$

et $$^tUAU = V(R) \geq 0$$

Comme $\|U\|^2 > 0$, on a bien $\lambda \geq 0$.

9\. La fonction F est C^2 sur $\mathbb{R}^n$ car polynomiale. De plus, pour tout indice k fixé

$$\partial_k F(x_1, \dots x_n) = 2x_k V(R_k) + 2 \sum_{\substack{i \in [\![1;n]\!] \\ i \neq k}} x_i \times 1 \operatorname{cov}(R_i, R_k)$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{n} x_i \operatorname{cov}(R_i, R_k)$$

car $V(R_k) = \operatorname{Cov}(R_k, R_k)$

et par définition de A et X, le coefficient de 2AX en position k est:

$$[2AX]_k = 2 \sum_{i=1}^{n} [A_{ki}][X]_{i1}$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Cov}(R_k, R_i)\, x_i$$

$$= \partial_k F(x)$$

On a bien

$$\nabla F(x) = 2AX$$

Ensuite, on a pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$

$$\partial^2_{ij} F(x) = 2\,\mathrm{Cov}(R_i, R_j) = 2a_{ij}$$

D'où

$$\nabla^2 F(x) = 2A.$$

10. L'ensemble des points critiques est donné par le noyau de A. En particulier, il y au moins $0_{\mathbb{R}^n}$ comme point critique.

Et, d'après 8.b, pour tout x

$$Sp(\nabla^2 F(x)) = Sp(2A) \subset \mathbb{R}^+$$

Comme $\mathbb{R}^n$ est convexe, on sait que tout point critique donne un minimum global.

Comme il y a en au moins un, F admet un minimum global. (et pas de maximum global).

11. $$H_0 = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = 1 \}.$$
est fermé. Les ensembles
$$H_i = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqslant 0 \}. \quad \text{pour } i \in [\![1,n]\!]$$
sont aussi fermés. Par intersection
$$H = H_0 \cap H_1 \cap \cdots \cap H_n$$
est un fermé.

De plus, pour tout $x \in H$, on a.
$$\forall i \in [\![1;n]\!], \qquad x_i \in [0;1].$$
On en déduit que H est aussi borné.

12. En tant que fonction continue (car polynomiale) sur une partie fermée et bornée, F admet un minimum sur H.

13 D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la covariance, on a
$$|c| = |\operatorname{Cov}(X,Y)| \leq \sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)} = 6.$$

14 a) Soit $a \in [0;1]$
$$\begin{aligned} V(R) &= V(aX + (1-a)Y) \\ &= a^2 V(X) + (1-a)^2 V(Y) + a(1-a) \cdot 2\operatorname{cov}(X,Y) \\ &= 12a^2 + (1-a)^2 \cdot 3 + 2a(1-a)c \end{aligned}$$
$$V(R) = (15-2c)a^2 + 2(c-3)a + 3.$$

14b) La fonction h est polynomiale donc dérivable et

$$\forall x \in [0;1], \quad h'(x) = 2(15-2c)x + 2(c-3).$$
$$= 2(15-2c)\left(x - \frac{3-c}{15-2c}\right).$$
$$= 2(15-2c)(x - c_0).$$

où $c_0 = \dfrac{3-c}{15-2c}$.

Distinguons plusieurs cas.

I. $\to$ Si $c \in [-6,3]$, alors on vérifie que $c_0 \in]0;1[$

On en déduit que h est strictement décroissante sur $[0;c_0]$, strictement croissante sur $[c_0;1]$. On a donc un minimum uniquement atteint en c_0 donné par
$$h(c_0) = \frac{36-c^2}{15-2c}.$$

II. $\to$ Si $c \in [3;6]$ alors $c_0 \leq 0$ et $h'(x) > 0$ sur $]0;1]$.

La fonction est donc strictement croissante sur $[0;1]$ avec un minimum $h(0) = 3$.

$\to$ Dans les deux cas, on a un unique minimum pour $V(R)$

On a donc bien un unique portefeuille.

Lorsque $c \in [-6;3]$, il vaut $(c_0; 1-c_0)$

Lorsque $c \in [3;6]$, il vaut $(0;1)$

15a) Lorsque $c=-6$, on a $c_0 = \frac{1}{3}$, $1-c_0 = \frac{2}{3}$.

Le portefeuille de variance minimale est $\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3}\right)$ et dans ce cas $V(R) = 0$.

On sait alors que la variable est presque surement constante.

15b) Dans ce cas, $c = Cov(X, Y) = 0$ et $c_0 = \frac{1}{5}$.

Le portefeuille est $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

16. On a alors

$$R = \frac{1}{5} X + \frac{4}{5} Y.$$

Et par la stabilité par combinaison linéaire de variables indépendantes de lois normales

$$R \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\frac{18}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

Dans ce cas

$$P(R \geqslant 4) = 1 - P(R < 4) = 1 - P(R \leq 4) \quad (\text{à densité})$$

Or $$P(R \leq 4) = P\left(\frac{R - \frac{18}{5}}{\sqrt{12/5}} \leq \frac{4 - \frac{18}{5}}{\sqrt{12/5}}\right)$$

$$= P\left(R^* \leq \frac{1}{\sqrt{15}}\right) \quad \text{où} \quad R^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$$

Ce qui donne

$$P(R \geqslant 4) \simeq 1 - 0,6 \simeq 0,4.$$

18. On a :

$$E(X) = \frac{12+0}{2} = 6 \qquad E(Y) = \frac{6+0}{2} = 3$$

$$V(X) = \frac{(12-0)^2}{12} = 12 \qquad V(Y) = \frac{(6-0)^2}{12} = 3.$$

19. a)

```
def simu():
    x = 12 * rd.rand()   # simulation de X
    y = 6 * rd.rand()    # simulation de Y.
    return x + 4 * y.
```

19. b) Par exemple

```
def Ech(m):
    E = np.zeros(m)
    for i in range(m):
        E[i] = simu()
    plt.hist(E, 30, density = True)
    plt.show().
```

20. Par les règles de transformation affine des lois uniformes, on sait que

$$4Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0;24]).$$

Appliquons le théorème de sommation

→ X et $4Y$ sont indépendantes

→ pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale

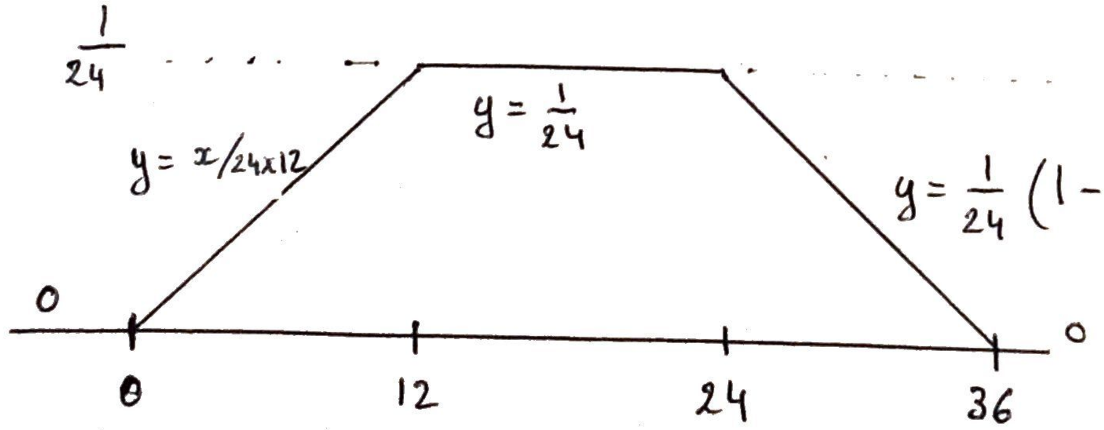
$$h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f \text{ une densité de } X \\ g \text{ une densité de } Y \end{cases}$$

est convergente car f et g sont deux densités bornées (et même nulle en dehors de $[0;6]$ pour f et $[0;24]$ pour g).

On sait alors que $X+4Y$ est une variable aléatoire à densité et une densité est donnée par h.

21.a) Comme f et g sont constantes "par morceaux", h est affine par morceaux.

De plus, l'histogramme semble "converger" vers la courbe ci-dessous



une densité serait

$$\tilde{h} : x\in\mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} x/288 & \text{si } x\in[0;12] \\ 1/24 & \text{si } x\in[12,24] \\ (1-x/36)/24 & \text{si } x\in[24,36] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

21. b) Si $x \in [0;12]$, on a

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt = \frac{1}{12} \int_0^{12} g(x-t)\, dt$$

or

$$g(u) = \begin{cases} 1/24 & \text{si } x \in [0;24] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi $g(x-t) = 0$ dès que $t > x$, on a

$$h(x) = \frac{1}{12} \int_0^x g(x-t)\, dt = \frac{1}{12} \int_0^x \frac{1}{24}\, dx = \frac{x}{288}.$$

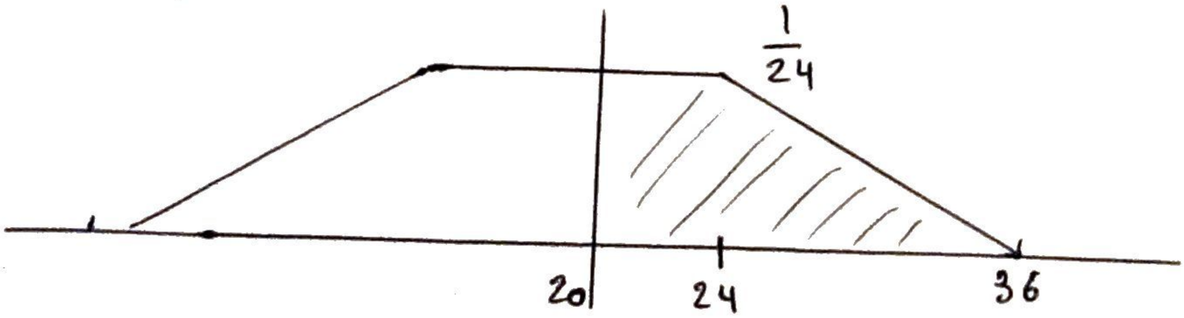
Ce que confirme la simulation.

22. On a dans ce cas $R = \frac{1}{5} X + \frac{4Y}{5} = \frac{1}{5}(X + 4Y)$.

et

$$P(R \geqslant 4) = P(X + 4Y \geqslant 20).$$

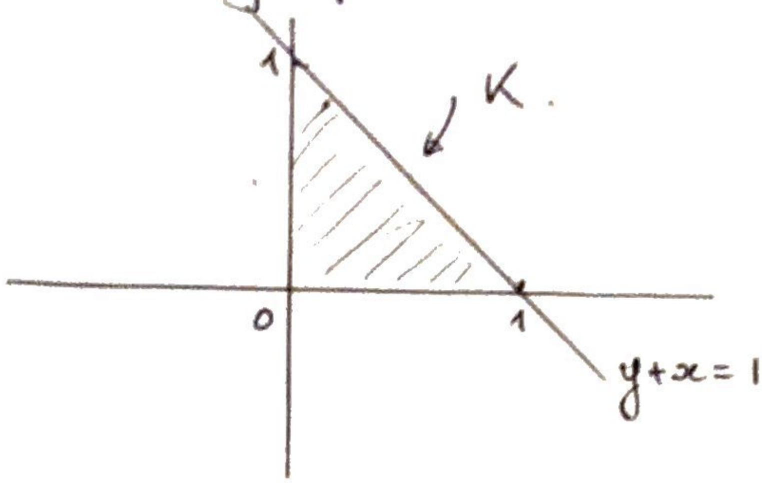
Dit autrement, la probabilité recherchée correspond à l'aire



Soit $(24-20) \times \frac{1}{24} + \frac{(36-24)}{2} \times \frac{1}{24} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{12}.$

Partie 2

23. K est un triangle plein avec ses côtés



Comme f est polynomiale, f est continue sur un fermé borné, il y a donc un minimum sur K.

De plus

$$V(R) = V(xX + yY + zZ)$$
$$= x^2V(X) + y^2V(Y) + z^2V(Z) + 2xy\,Cov(X,Y) + 2xz\,Cov(X,Z) + 2yz\,Cov(Y,Z)$$

On continue avec les valeurs de l'énoncé et $z = 1-x-y$

$$V(R) = 2x^2 + 6y^2 + (1-x-y)^2 6 - 2xy + 4xz + 2yz$$

terme constant

(d'abord je mets l'expression polynomiale) $= \_\_\_\, x^2 + \_\_\_ \pm y^2 \pm \_\_\_\, xy + \_\_\_$
$\_\_\_\, x + \_\_\_\, y$

(et je complète) $= (2+6-4)x^2 + (6+6-2)y^2 + (+2\times6-2-4-2)xy + (-2\times6+4)x$

$+ (-2 \times 6 + 2) + 6 \times 1^2$

$= 4x^2 + 10y^2 + 4xy - 8x - 10y + 6 = f(x,y).$

On cherche à minimiser $V(R)$, soit f.

24. On a ici

$$\partial_1 f(x,y) = 8x + 4y - 8$$

$$\partial_2 f(x,y) = 20y + 4x - 10$$

et (x,y) est point critique si et seulement si

$$\begin{cases} 8x + 4y = 8 \\ 20y + 4x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x + 10y = 5 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 6y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5/6 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

On a bien un unique point critique.

25. Si f admet un minimum sur l'ouvert K_0, alors c'est atteint en un point critique. Or le seul point critique de f n'appartient pas à K_0 $\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3} > 1\right)$. Absurde. Il n'y a pas de minimum pour f sur K_0

26. Si $(x,y) \in K_1$, alors

$$f(x,y) = f(0,y) = 10y^2 - 10y + 6 = h(y)$$

h est polynomiale de degré 2, $h'(y) = 10(2y-1)$

Il y a un minimum pour $y = \frac{1}{2}$.

Sur K_1, f admet $f(0;\frac{1}{2}) = \frac{7}{2}$

Si $(x,y) \in K_2$

$$f(x,y) = 4x^2 - 8x + 6 = (2x-2)^2 + 2 \geq 2$$

Sur K_2, f admet $f(1,0) = 2$ comme minimum.

Enfin sur K_3,

$$f(x,y) = f(x, 1-x) = 10\left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + \frac{11}{10}$$

et le minimum est $\frac{11}{10}$ car $\frac{7}{10} \in [0;1]$.

26.b) Résumons

→ Il n'y a pas de minimum sur K_0

→ $7/2$ est le minimum sur K_1

→ 2 est celui sur K_2

→ et $\frac{7}{10}$ est celui sur K_3.

Le minimum sur $K = K \cup K_1 \cup K_2 \cup K_3$ est donc $7/10$.

Le portefeuille le plus sûr est donc pour

$$(x,y,z) = \left(\frac{7}{10}; \frac{3}{10}; 0\right).$$

Soient $U, W \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

27. Comme A est une matrice symétrique

$$\varphi(U,W) = {}^tUAW = {}^t({}^tUAW)$$
$$= {}^tW\,{}^tA\,{}^t({}^tU) = {}^tWAU = \varphi(W,U).$$

donc φ est symétrique.

De plus, pour $U, V, W \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\lambda U + \mu V, W) = {}^t(\lambda U + \mu V)AW$$
$$= \lambda\, {}^tUAW + \mu\, {}^tVAW$$
$$= \lambda \varphi(U,W) + \mu \varphi(V,W).$$

On a donc la linéarité à droite et par symétrie la linéarité à gauche. φ est bilinéaire.

Soit $U \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Comme A est une matrice symétrique réelle, A est diagonalisable dans une base orthonormée. Soit $(X_1, X_2 \ldots, X_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A. et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées Il existe $\mu_1, \ldots \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que $U = \sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i$

D'où

$$ {}^tUAU = \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\, {}^tX_i\right) A \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j X_j\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mu_i \mu_j\, {}^tX_i A X_j$$

Or $\quad {}^tX_i A X_j = \lambda_j \, {}^tX_i X_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \lambda_j & \text{si } i = 1 \end{cases}$

d'où $\quad {}^tUAU = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i^2.$

Or on a vu que le spectre de A est inclu dans $\mathbb{R}^+$, donc

$$\varphi(U,U) = {}^tUAU \geqslant 0$$

Avec égalité si et seulement si

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \quad \lambda_i \mu_i^2 = 0$$

Or, A est inversible, aucune valeur propre n'est nulle

$$\forall i \in [\![1;n]\!] \quad \mu_i = 0$$

Soit $U = 0$.

On a montré que φ est définie positive, c'est un produit scalaire.

28. Soient $U, W \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. On a

$$N\left(\frac{U+W}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} N(U)^2 + \frac{1}{4} N(W)^2 + \frac{1}{2}\varphi(U,W)$$

$$N\left(\frac{U-W}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} N(U)^2 + \frac{1}{4} N(W)^2 - \frac{1}{2}\varphi(U,W)$$

on obtient le résultat par somme

29. Supposons qu'il existe x, x' deux portefeuilles de variance minimale. Notons X et X' leurs matrices colonnes dans la base canonique. Le rendement de ces deux portefeuilles est identique R.

$$V(R) = {}^tXAX = \varphi(X,X) = N(X)^2$$
$$= {}^tX'AX' = N(X')^2.$$

D'après la relation précédente.

$$N\left(\frac{X+X'}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(V(R)+V(R)\right) - N\left(\frac{X-X'}{2}\right).$$
$$= V(R) - N\left(\frac{X-X'}{2}\right).$$

Or, par définition du minimum

$$N\left(\frac{X+X'}{2}\right) \geq V(R)$$

on obtient alors

$$N\left(\frac{X-X'}{2}\right) \leq 0 \quad \text{puis} \quad N\left(\frac{X-X'}{2}\right) = 0$$

et $X - X' = 0$, $X = X'$ car N est une norme.

Il y a unicité du portefeuille.