Problème Loi de Gumbel

19. Comme V est à valeur dans $\mathbb{R}_*^+$, W est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$F_W(x) = P(W \leq x) = P(-\ln V \leq x)$$

$$= P(V \geqslant e^{-x}) \quad \text{car exp. est strict. croiss.}$$

$$= 1 - P(V \geqslant e^{-x}) \quad V \text{ à densité}$$

$$= 1 - (1 - e^{-e^{-x}}) \quad \text{car } e^{-x} > 0$$

$$F_W(x) = e^{-e^{-x}}$$

La fonction de répartition de W est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, W est une variable à densité. Une densité est obtenue par dérivation.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_W(x) = e^{-x} \cdot e^{e^{-x}}$$

20. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$F_{Y_n}(x) = P(Y_n \leq x)$$

$$= P([X_1 \leq x] \cap \ldots \cap [X_n \leq x]) \quad \text{indépendance}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x)$$

$$= F(X_1 \leq x)^n \qquad \text{même loi}$$

$$= F_X(x)^n.$$

Par produit, F_{Y_n} est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et continue sur $\mathbb{R}$.
Y_n est une variable à densité et une densité est

$$\forall x \in \mathbb{R}. \quad f_{Y_n}(x) = n f_X(x) F_X(x)^{n-1}.$$

21. On a d'après ce qui précède

$$\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))dt = \int_0^{+\infty} (1-(1-e^{-t})^n dt.$$

Comme l'intégrande est continue sur $[0;+\infty[$, on a une intégrale généralisée en $+\infty$. De plus,

$$1-(1-e^{-t})^n \underset{t\to+\infty}{\sim} ne^{-t} \quad \text{car } e^{-t} \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est clairement convergente, par le critère d'équivalence d'intégrales de fonctions positives,

$$\int_0^{+\infty} (1-F_Y(t))dt$$

est convergente.

22. Procédons par intégration par parties (les fonctions sont C^1 sur $[0;x]$)

$$\int_0^x 1\times(1-F_{Y_n}(t))dt = \left[t(1-F_{Y_n}(t))\right]_0^x - \int_0^x t(-F_{Y_n}'(t))dt$$

$$= x(1-F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)dt$$

23. On a pour $x \in \mathbb{R}_*^+$

$$x(1-F_{Y_n}(x)) = x\left(1-(1-e^{-x})^n\right)$$

$$\underset{x\to+\infty}{\sim} x \cdot ne^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

via les croissances comparées.

On en déduit la convergence de

$$\int_0^{+\infty} t f_{Y_n}(t)\,dt.$$

On a même la convergence absolue car l'intégrande est positive. Par définition, Y_n admet une espérance et comme Y_n est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$

$$E(Y_n) = \int_0^{+\infty} t f_{Y_n}(t)dt = \int_0^{+\infty} (1-F_{Y_n}(t))^n dt.$$

24. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Le changement de variable $u = (1-e^{-t})$ est C^1 avec

$$\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))dt = \int_0^x 1-(1-e^{-t})^n dt$$

$$= \int_0^{1-e^{-x}} (1-u^n) \cdot \frac{1}{1-u} du.$$

car $\frac{du}{dt} = e^{-t} = 1-u$, "$dt = \frac{1}{1-u} du$"

25. On utilise une somme géométrique et la linéarité de l'intégrale.

$$\int_0^{1-e^{-x}} \frac{1-u^n}{1-u} du = \int_0^{1-e^{-x}} \sum_{k=0}^{n-1} u^k du$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{1-e^{-x}} u^k du$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{u^{k+1}}{k+1}\right]_0^{1-e^{-x}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} (1-e^{-x})^{k+1}$$

On conclut avec le changement d'indice $k \leftarrow k+1$.

Par passage à la limite $x \mapsto +\infty$ (la somme est finie)

$$E(Y_n) = \int_0^{+\infty} 1 - F_{Y_n}(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

26.
```
def SimuG():
    v = rd.exponential(1).
    return - np.log(v).
```

27.
```
def SimuZ(n):
    return np.max(rd.exponential(1,n))
                - np.log(n)
```

28. Plus n est grand, plus l'histogramme de Z_n semble s'approcher de celui obtenu pour une loi de Gumbel. Si X suit une loi de Gumbel, on s'attend à

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a < b \qquad P(a \leq Z_n \leq b) \xrightarrow[n \to +\infty]{} P(a \leq X \leq b).$$

On conjecture donc une convergence en loi de la suite $(Z_n)_n$ vers une variable de loi de Gumbel

29. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$F_{Z_n}(x) = P(Z_n \leq x)$$
$$= P(Y_n - \ln n \leq x)$$
$$= P(Y_n \leq x + \ln(n))$$
$$= F_{Y_n}(x + \ln(n)).$$

30 Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N \qquad x + \ln(n) > 0$$

Ainsi

$$F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n)).$$
$$= \left(1 - e^{-(x+\ln(n))}\right)^n$$
$$= \left(1 - \frac{1}{n}e^{-x}\right)^n$$

Or $\left(1 - \frac{1}{n}e^{-x}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}e^{-x}\right)\right)$

$$= \exp\left(n\left(-\frac{1}{n}e^{-x} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right).$$
$$= \exp\left(-e^{-x} + o(1)\right).$$

puis par continuité de la fonction exponentielle.

$$F_{Z_n}(x) \xrightarrow[n\infty]{} e^{-e^{-x}}.$$

Ce qui prouve bien la conjecture.