Problème II. Optimisation

10. La matrice J est de rang 1. Ainsi, 0 est valeur propre et d'après la formule du rang

$$\dim E_0(J) = n-1.$$

De plus,

$$J \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0_{n,1}$$

On a une autre valeur propre n.
Par un compte des dimensions, il n'y a pas d'autre valeur propre.

<u>11</u>. On a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j$$

en isolant les termes $x_i x_j$ avec $i=j$.
D'où le résultat.

12. La fonction f est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ avec $x \in \mathbb{R}^n$

$$\forall i \in [\![1;n]\!] \qquad \partial_i f(x) = \frac{1}{2}\left(2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) - 2x_i\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k - x_i = \sum_{k \neq i} x_k.$$

Le gradient est alors

$$\nabla f(x) = \left(\partial_1 f(x) \,;\, \partial_2 f(x) ; \,\dots\, ; \partial_n f(x) \right).$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. x est un point critique si et seulement si

$$\forall i \in [\![1;n]\!] \qquad \partial_i f(x) = 0$$

ssi

$$\forall i \in [\![1;n]\!] \qquad x_i = \sum_{k=1}^{n} x_k .$$

En particulier, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ puis

$$x_1 = \sum_{k=1}^{n} x_k = n x_1 \quad \text{d'où} \quad x_1 = 0 .$$

Le seul point critique est $(0,0,\dots,0)$.

13. Pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$.

Si $i=j$, $\qquad \partial^2_{i,i} f(x) = 0$

Si $i \neq j$, $\qquad \partial^2_{i,j} f(x) = 1$.

On a alors

$$\nabla^2 f(x) = J - I_n .$$

Comme $Sp(J) = \{0 ; n\}$, on a

$$Sp(\nabla^2 f(x)) = \{-1 ; n-1\}.$$

Pour $n \geqslant 2$, il y a deux valeurs propres de signe opposé. On sait alors que le point critique est un point selle.

15. La fonction f est continue sur S_n.
Or S_n est un fermé borné, on sait alors qu'il existe un minimum et un maximum.

16. Soit $(x_1, x_2) \in S_2$. On a donc $x_1^2 + x_2^2 = 1$.
On a $|x_1| \leq 1$ et par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que
$$x_1 = \cos(\theta).$$
(la fonction cosinus est continue).
De plus
$$|x_2| = \sqrt{1 - \cos(\theta)^2} = |\sin(\theta)|.$$
Quitte à changer θ en $-\theta$, on peut considérer x_2 du même signe que θ et
$$x_2 = \sin(\theta) \qquad (x_1 = \cos(\pm\theta)).$$

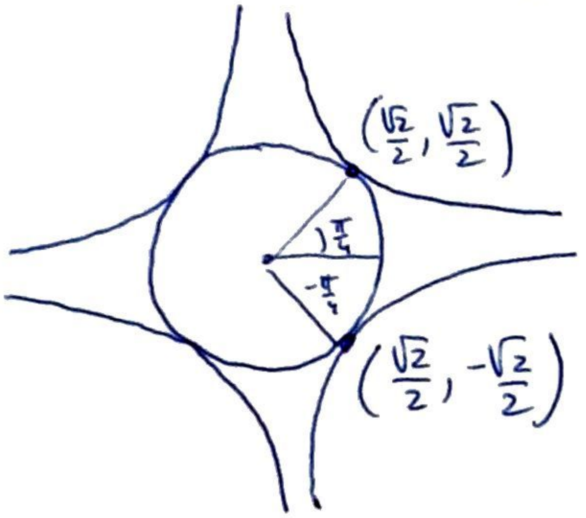
Dans le cas où $n=2$
$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 = \cos(\theta)\sin(\theta)$$
$$= \frac{1}{2}\sin(2\theta).$$

On a alors
$$-\frac{1}{2} \leq f(x_1, x_2) \leq \frac{1}{2}$$
avec égalité pour $\theta_{min} = -\frac{\pi}{4}$, $\theta_{max} = \frac{\pi}{4}$
Le minimum est atteint par exemple pour
$$(x_1, x_2) = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

et le maximum pour

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

17. En regardant les lignes de niveau qui croisent le cercle, on constate que la hauteur la plus haute est 0,5 et la plus basse -0,5



(Les lignes de niveau sont tangentes au cercle).

18. Lorsque $x \in S_n$.

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - 1\right].$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = (x, (1,1\ldots 1))^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|(1,\ldots 1)\|^2$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \times n.$$

$$\leq n.$$

Avec égalité si et seulement si x est colinéaire à $(1,1,\dots,1)$.

Résumons, pour $x \in S_n$,

$$f(x) \leq \frac{1}{2}(n-1).$$

De plus pour $x_0 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1,\dots,1) \in S_n$ on a égalité

$$f(x_0) = \frac{1}{2}(n-1).$$

On a donc un maximum $\frac{1}{2}(n-1)$ pour f sur S_n.

De plus, $x_0' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \dots 0\right) \in S_n$ avec $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, d'où

$$f(x_0') = \frac{1}{2}(0^2 - 1) = -\frac{1}{2}.$$

Et pour tout $x \in S_n$

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2}_{\geq 0} - 1\Big) \geq -\frac{1}{2}.$$

On a donc $-\frac{1}{2}$ qui est le minimum sur S_n de f.