Nom :

Mathématiques approfondies

Cours ECG 2

Chapitres

Lycée Saint Louis 2025/2026

CHAPITRE 4

Révisions et compléments sur les variables aléatoires

Le hasard ne profite qu'aux esprits préparés.

LOUIS PASTEUR (1822-1895)

1 Rappels et compléments sur les séries

1.1 Définitions

Définition-Rappel 1 (série numérique)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. La **série** associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\qquad \mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{n}u_k.$$

On dit que la série converge si la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie.

Attention. Il ne faut pas confondre :

- $\sum u_n$: la série de terme général u_n ;
- $\mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$: la somme partielle d'ordre n de la série ;
- $\sum_{k=0}^{+\infty}u_k$: la somme de la série, i.e, sous réserve de convergence, la limite des sommes partielles ;
- $\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k$: le reste d'ordre n de la série si cette dernière est convergente.

Exercice 1

✧ *D'après EDHEC 2022*

Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier n, un réel x non nul et renvoie la somme partielle d'ordre n de la série $\sum 1/\,\mathrm{sh}(kx)$. Que dire de la convergence ?
La fonction sh *est la fonction sinus hyperbolique définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $\mathrm{sh}(x)=(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x})/2$.

PY89

Remarques.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\qquad u_n=\mathrm{S}_n-\mathrm{S}_{n-1}$.
- Si la série de terme général u_n converge, alors $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

La série harmonique $\sum 1/n$ montre que la réciproque est fausse.

- Soient u et v deux suites réelles telles que les séries de termes généraux u_n et v_n convergent.

Pour tous $\lambda,\,\mu\in\mathbb{R}$, la série de terme général $\lambda u_n+\mu v_n$ converge et

$$\forall\, n_0\in\mathbb{N},\qquad \sum_{k=n_0}^{+\infty}(\lambda u_k+\mu v_k)=\lambda\sum_{k=n_0}^{+\infty}u_k+\mu\sum_{k=n_0}^{+\infty}v_k.$$

Théorème 2 (convergence absolue)

- On dit que la série de terme général u_n **converge absolument** si la série de terme général $|u_n|$ converge.
- **Si** une série converge absolument, **alors** elle converge.

Remarque. La réciproque est fausse. La série $\sum(-1)^n/n$ donne un contre exemple.

Théorème 3 (famille sommable)

Soit I un ensemble dénombrable, indexé par $\mathbb{N}$ sous la forme $\mathrm{I} = \{\varphi(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ où φ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans I.

Si la série $\sum u_{\varphi(n)}$ converge absolument,

alors sa somme est indépendante de l'indexation φ. On peut donc noter sans ambiguïté $\sum\limits_{i\in\mathrm{I}} u_i$.

1.2 Séries de références

Théorème 4 (séries géométriques, série exponentielle)

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Les séries de terme généraux x^k, kx^{k-1} et $k(k-1)x^{k-2}$ sont convergentes si et seulement si $|x| < 1$. Dans ce cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad , \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

- Pour tout réel x, la série de terme général $\dfrac{x^k}{k!}$ est convergente et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$.
- On appelle **série de Riemann**, une série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
Cette série est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

1.3 Critères de convergence pour les séries à termes positifs

Théorème 5 (critère de comparaison)

Soient u et v deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

- Si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n aussi.
- Si la série de terme général u_n diverge, alors la série de terme général v_n aussi.

Exercice 2

✦ *Les questions 1 et 2 sont indépendantes.*

1. Soit $\sum u_k$ une série à termes positifs. On suppose que la série $\sum k^2 {u_k}^2$ est convergente.
   a) Montrer que la série $\sum u_k$ est convergente.
   b) Étudier la réciproque.
2. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente. Justifier la convergence des séries :

$$\sum \frac{3u_n}{1+{u_n}^2}, \quad \sum \ln(1+u_n) \quad \text{et} \quad \sum \int_0^{u_n} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}.$$

RA11

Théorème 6 (critères de négligeabilité et d'équivalence)

Soient u et v deux suites réelles.

- **Si** ⇀ $u_n = o(v_n)$ ⇀ v est positive à partir d'un certain rang
  ⇀ la série de terme général v_n converge,

alors la série de terme général u_n converge.

- **Si** ⇀ $u_n \sim v_n$ ⇀ v est positive à partir d'un certain rang,

alors les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

Remarque. On a des critères analogues si v est négative à partir d'un certain rang.

⚠ **Attention.** Il ne faut pas oublier les conditions de signes lors de l'application de ces théorèmes.

Exercice 3

Exemples

✦ Déterminer la nature des séries suivantes :

- $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{3}{\sqrt{n}}\right)$; • $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{n^3}{2^n}$; • $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n^n}{n!}$; • $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^4}{4^{\ln(n)}}$.

✦✦ Discuter, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, de la nature de la série :

- $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)^{\alpha}$; • $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n+7}-\sqrt{n}\right)^{\alpha}$ • $\sum \arctan\left(\frac{n^{\alpha}}{1+n}\right)$.

RA12

2 Révision sur les probabilités

2.1 L'application probabilité

On représente le résultat d'une expérience aléatoire comme un élément ω de l'ensemble Ω de tous les résultats possibles. Dans la suite, $\mathscr{A}$ est un ensemble composé de partie de Ω ($\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$). Il vérifie

- $\Omega \in \mathscr{A}$.
- *$\mathscr{A}$ est stable par passage au complémentaire :* $\forall A \in \mathscr{A}, \quad \overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathscr{A}$.
- *$\mathscr{A}$ est stable par union et intersection finie ou dénombrable* : si I est un ensemble fini ou dénombrable et si pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathscr{A}$, alors

$$\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathscr{A} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i\in I} A_i \in \mathscr{A}.$$

Vocabulaire. Les éléments de $\mathscr{A}$ sont des événements. Autrement dit, $\mathscr{A}$ est l'ensemble des événements. On parle aussi de tribu ou de σ-algèbre.

Définition 7 (l'application probabilité)

Soient Ω, un univers des possibles et $\mathscr{A}$ un ensemble d'événements.
Une **probabilité** est une application **P** réelle définie sur $\mathscr{A}$ vérifiant les conditions suivantes.

⇀ $\mathbf{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$;
⇀ $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
⇀ **P** est σ-**additive** :
Pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ finie ou dénombrable d'événements deux à deux disjoints,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbf{P}(A_i).$$

Pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\mathbf{P}(A)$ est appelée **la probabilité de l'événement** A.

Remarque. Dans le cas où l'ensemble des indices I est dénombrable (par exemple, $\mathbb{N}$), la définition suppose implicitement la convergence de la série $\sum_{i\in I} \mathbf{P}(A_i)$.

Vocabulaire.
- La donnée d'un triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ où Ω est un univers des possibles, $\mathscr{A}$ un ensemble d'événements sur Ω et $\mathbf{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$, définit un **espace probabilisé**.
- Un événement de probabilité nulle est dit **négligeable**.
- Un événement de probabilité 1 est dit **presque-sûr**.

Théorème 8 (de la limite monotone)

Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'événements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

- **Si** la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** pour l'inclusion (c'est-à-dire, $\forall\, i \in \mathbb{N}$, $A_i \subset A_{i+1}$),

Alors $$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

- **Si** la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** pour l'inclusion ($\forall\, i \in \mathbb{N}$, $B_{i+1} \subset B_i$),

Alors $$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(B_n).$$

2.2 Probabilité conditionnelle et indépendance

Définition 9 (probabilité conditionnelle)

Soient $\left(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}\right)$ un espace probabilisé et $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mathbf{P}(A) \neq 0$. Soit $B \in \mathscr{A}$.
La **probabilité conditionnelle** de B sachant A est

$$\mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Remarques.
- À partir de la définition, on prouve une première **formule de Bayes**.

Si $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$, alors $$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}_A(B) \cdot \mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} \qquad (\bullet).$$

- Si A est un événement non négligeable, alors $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}_A)$ est un espace probabilisé.

Définition 10 (indépendance deux à deux et mutuelle)

- Deux événements A et B sont dits **indépendants** pour la probabilité $\mathbf{P}$ si

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B).$$

- Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie ou dénombrable d'événements. Les événements de cette famille sont dits **mutuellement indépendants** si pour toute partie finie non vide $\{i_1, i_2, \cdots, i_p\} \subset I$,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{p} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{p} \mathbf{P}(A_{i_k}).$$

2.3 Formules des probabilités composées et probabilités totales

Proposition 11 (formule des probabilités composées)

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$, des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ tels que

$$\mathbf{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}\right) \neq 0.$$

Alors $$\mathbf{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}_{A_1}\left(A_2\right) \cdot \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}\left(A_3\right) \ldots \mathbf{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}\left(A_n\right).$$

Théorème 12 (formule des probabilités totales)

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in I}$ un système complet d'événements non négligeables (I est un ensemble fini ou dénombrable). Pour tout événement B,

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{n \in I} \mathbf{P}(A_n \cap B) = \sum_{n \in I} \mathbf{P}(A_n) \mathbf{P}_{A_n}(B).$$

Exercice 4

✦ ✎ Soient a, b, n, $m \in \mathbb{N}^*$. Considérons deux urnes contenant respectivement a et b boules blanches et n et m boules noires. On suppose de plus que le nombre de boules dans les deux urnes est identique.
On procède de la manière suivante :

- On choisit (de façon équiprobable) une des deux urnes.
- On effectue ensuite des tirages mutuellement indépendants avec remise dans cette **même** urne.

1. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au k-ième tirage, puis la probabilité d'obtenir k boules blanches consécutives.
2. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au $(k+1)$-ième tirage sachant que l'on a déjà obtenu k boules blanches aux tirages précédents.

RVA1

3 Variable aléatoire réelle

3.1 Définition

Définition 13 (variable aléatoire réelle)

Étant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, on appelle **variable aléatoire réelle** toute application X définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leqslant t\right\} \in \mathscr{A}.$$

Notation. Dans la suite, pour I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$, on note :

$$[X \in I] = \left\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in I\right\}, \quad [X \leqslant t] = \left\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leqslant t\right\} \quad \text{et} \quad [X = t] = \left\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = t\right\}.$$

Ainsi, X est une variable aléatoire si pour tout réel t, l'ensemble $[X \leqslant t]$ est un événement.

Remarque. La donnée des probabilités $\mathbf{P}\big([X \in]a, b]]\big)$ pour tous réels $a < b$ définit **la loi de probabilité** de la variable aléatoire réelle X.

Proposition 14 (Opérations sur les variables aléatoires)

Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Alors

- la combinaison linéaire $\lambda X + \mu Y$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
- le produit $X \cdot Y$,
- le maximum $\max(X, Y)$ et le minimum $\min(X, Y)$

sont encore des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Remarque. Cela s'étend à un nombre fini de variables aléatoires.

3.2 Fonction de répartition

Définition 15 (fonction de répartition)

Soit X, une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On définit la fonction F_X sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad F_X(t) = \mathbf{P}\big([X \leqslant t]\big).$$

La fonction F_X est la **fonction de répartition** de la variable aléatoire X.

Exercice 5

Soit X, la variable aléatoire donnant la valeur d'un dé équilibrée.
Donner le graphe sur $[-1;7]$ de F_X.

\# RVA2

Proposition 16 (propriétés de la fonction de répartition)

Soient X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et F_X sa fonction de répartition.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_X(t) \in [0;1]$.
- F_X est croissante : pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $\quad t_1 \leqslant t_2 \quad \Rightarrow \quad F_X(t_1) \leqslant F_X(t_2)$.
- $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$.
- F_X est continue à droite : pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\substack{t \to a \\ t > a}} F_X(t) = F_X(a).$$

- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $\qquad \mathbf{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Astuce. À la fin de chaque calcul d'une fonction de répartition, il est toujours utile de vérifier rapidement les trois premiers points.

Proposition 17 (caractérisation de la loi)

Une fonction de répartition caractérise une loi de probabilité. Cela signifie que deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition si et seulement si elles ont la même loi.

4 Révisions sur les variables aléatoires discrètes

4.1 Rappels : variables aléatoires finies et discrètes

Dans le cas où $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, la définition de la variable aléatoire se simplifie.

Définition 18 (variable aléatoire discrète)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Une **variable aléatoire discrète** est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$

telle que
- $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ où I est une partie finie ou infinie de $\mathbb{N}$,
- pour tout $i \in I$, $[X = x_i]$ est un événement.

Vocabulaire. Donner **la loi** d'une variable aléatoire discrète X signifie donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X et pour chaque $x \in X(\Omega)$, la probabilité $\mathbf{P}\big([X = x]\big)$.

Remarque. À une v.a discrète X est associée le système complet d'événements $\big([X = x]\big)_{x \in X(\Omega)}$.

En particulier, il vient
$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}\big([X = x]\big) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Définition 19 (indépendance, cas discret)

- Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
On dit que X et Y sont **indépendantes** si
$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbf{P}\big([X = x] \cap [Y = y]\big) = \mathbf{P}\big([X = x]\big) \cdot \mathbf{P}\big([Y = y]\big).$$
- Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si
$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega), \quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\big([X = x_i]\big).$$

4.2 Lois usuelles

Rappelons que donner la loi d'une variable aléatoire X discrète revient à la donnée de :
- $X(\Omega)$: l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire.
- Pour chaque $k \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}\big([X = k]\big)$.

Dans chacun des cas, on précisera la loi, une représentation à l'aide d'un diagramme en bâtons, des exemples concrets d'application. De plus, on distinguera bien
- les cas finis : loi certaine, loi uniforme discrète, loi de Bernoulli, loi binomiale.
- les cas infinis dénombrables : loi géométrique, loi de Poisson.

Variable aléatoire certaine

Une variable X est dite **variable aléatoire certaine**, ou **presque sûrement constante** s'il existe un réel c tel que
$$\mathbf{P}\big([X = c]\big) = 1.$$

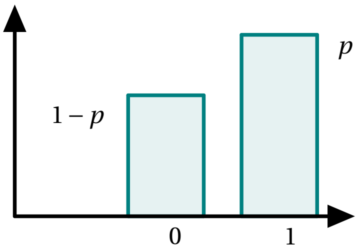
Loi de Bernoulli

Définition 20 (loi de Bernoulli)

Soit $p \in [0;1]$. La variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli**, noté $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, si
$$X(\Omega) = \{0;1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}\big([X = 1]\big) = p, \quad \mathbf{P}\big([X = 0]\big) = 1 - p.$$

Exemple. Pour $A \in \mathscr{A}$ alors la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(A)$.

Représentation de $\mathscr{B}(p)$
Ci-contre, le diagramme en bâtons associé à une loi de Bernoulli de paramètre p.



Exemples de modélisation.
→ Le résultat d'un lancer d'une pièce de monnaie équilibrée (1 pour pile, 0 face) suit une loi $\mathscr{B}(1/2)$.
→ Plus généralement, la variable aléatoire associée à une expérience aléatoire ayant seulement deux issues (0 pour échec, 1 pour succès) suit une loi $\mathscr{B}(p)$ où p est la probabilité de succès.

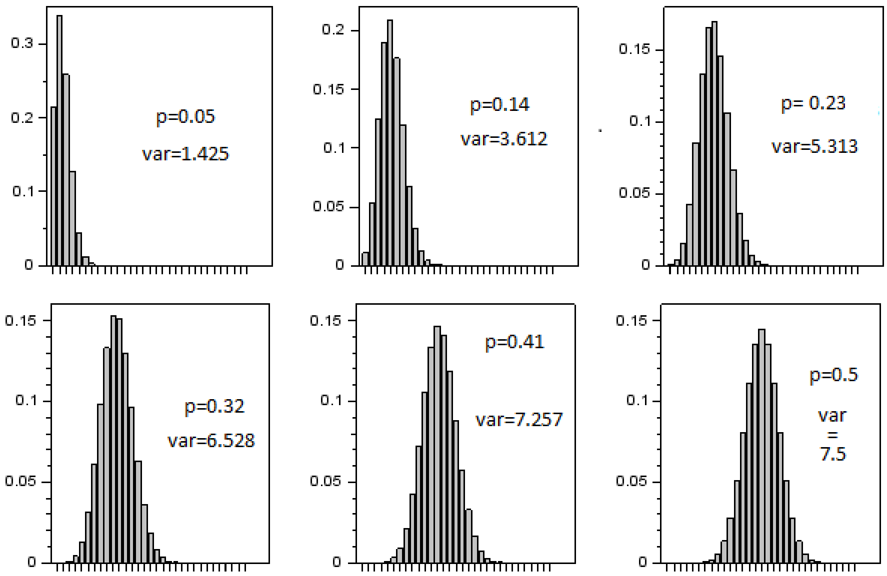
Loi binomiale

Définition 21 (loi binomiale)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$. On dit que X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p, noté $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, si

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![0,n]\!], \quad \mathbf{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Représentation de $\mathscr{B}(n;p)$
Donnons quelques diagrammes en bâtons associés aux lois $\mathscr{B}(n;p)$ avec $n = 30$ et
$p \in \{0,05\,;0,14\,;0,23\,;0,32\,;0,41\,;0,5\}$.



Exemples de modélisation.
→ On lance n fois un dé et X compte le nombre de « 6 » obtenus. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1/6)$.
→ Plus généralement, lorsqu'on répète n *expériences* de Bernoulli (à deux issues : succès/échec) *identiques, mutuellement indépendantes,* dont la probabilité de succès est p, la variable X qui *compte le nombre de succès* suit alors une loi binomiale de paramètre (n,p).

⚠ **Attention.** Ne pas oublier la condition de mutuelle indépendance.

Loi uniforme

Définition 22 (loi discrète uniforme)

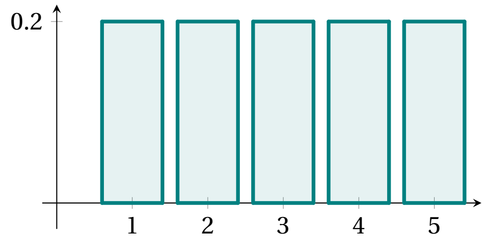
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a < b$.
La variable aléatoire X suit une **loi discrète uniforme sur** $[\![a,b]\!]$, noté $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$, si

$$X(\Omega) = [\![a,b]\!] \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![a,b]\!], \quad \mathbf{P}\big([X=k]\big) = \frac{1}{b-a+1}.$$

Remarque. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ avec $n = b-a+1$, alors $Y = X+a-1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$.

Représentation
Ci-contre le diagramme en bâtons de la loi :

$$\mathcal{U}([\![1;5]\!]).$$



Exemples de modélisation.
— Le résultat d'un lancer d'un dé équilibré à 6 faces suit une loi uniforme sur $[\![1;6]\!]$.
— Une urne contenant n boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à n. On tire au hasard une boule. Le numéro obtenu suit une loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$.

Loi géométrique

Définition 23 (loi géométrique $\mathcal{G}(p)$)

Soit $p \in]0;1[$ et $q = 1-p$.
On dit que la variable aléatoire X suit la **loi géométrique** de paramètre p, notée $\mathcal{G}(p)$, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}\big([X=k]\big) = (1-p)^{k-1}p = q^{k-1}p.$$

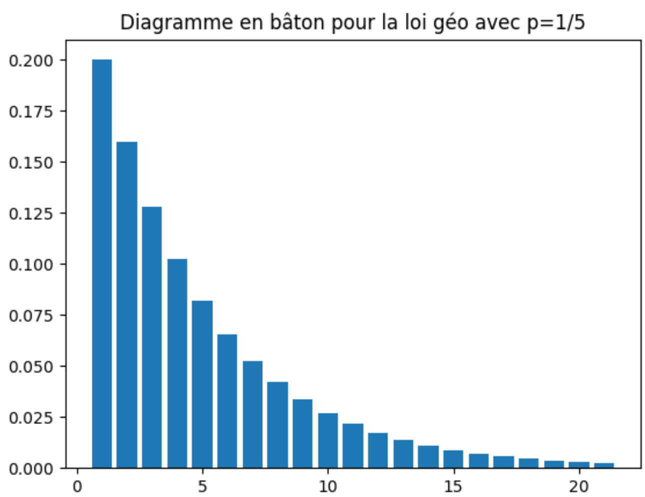
Représentation de $\mathcal{G}(p)$

Exercice 6

✦✦ **Diagramme en bâton de la loi géométrique**

1. Soient $p \in]0;1[$ et $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Écrire un programme qui prend en argument p et renvoie la plus petite valeur entière n_p telle que $\mathbf{P}\big([X > n_p]\big) \leqslant 1\%$.
2. En déduire un second programme qui prend en argument p renvoie le diagramme en bâton sur $[\![0;n_p]\!]$.

RVA3



Exemple de modélisation.

- Une loi géométrique modélise un **premier temps d'arrêt**.

Si X renvoie *le rang du premier succès* dans une succession d'expériences de Bernoulli *identiques, mutuellement indépendantes*, alors X suit une loi géométrique où p est la probabilité de succès d'une expérience de Bernoulli.

- Une autre manière de caractériser la loi géométrique : c'est une loi sans mémoire.

Exercice 7

✦ ✎ **Loi discrète sans mémoire**

Soient $p \in]0;1[$ et X une variable aléatoire de loi $\mathscr{G}(p)$.

1. Justifier que : $\forall\, s, t \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbf{P}_{[X>s]}\big([X > s+t]\big) = \mathbf{P}\big([X > t]\big) \qquad (\bullet)$
2. *Réciproque.*
   Soit X une variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$ vérifiant $(\bullet)$. Posons $p = \mathbf{P}\big([X = 1]\big)$.
   a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer $\mathbf{P}\big([X > k]\big)$ en fonction de p.
   b) En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre p.

RVA4

Loi de Poisson

Définition 24 (loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$)

Soit λ un réel strictement positif.
On dit que la variable aléatoire X suit la **loi de Poisson** de paramètre λ, notée $\mathscr{P}(\lambda)$, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}\big([X = k]\big) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Remarque. La loi est bien définie. Les probabilités sont bien positives et à partir de la série exponentielle

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}\big([X = k]\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1.$$

Représentation de $\mathscr{P}(\lambda)$

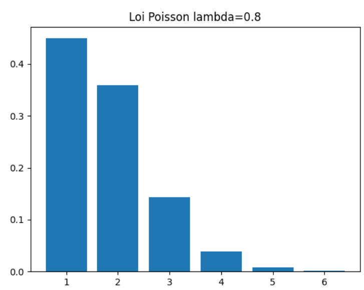
Exercice 8

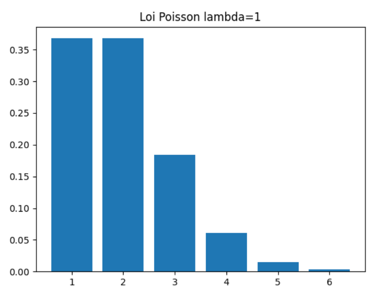
✦✦ ✎ **Diagramme en bâtons de la loi de Poisson**

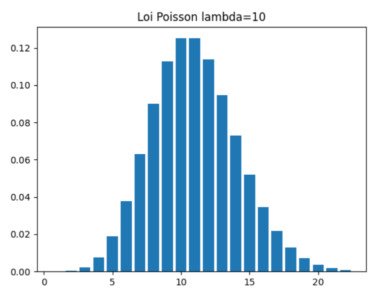
1. Soient $\lambda \in]0,+\infty[$ et $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. Écrire un programme qui prend en argument n, λ et renvoie la liste
$$[p_0 \quad p_1 \quad \dots \quad p_n] \quad \text{où} \quad p_i = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}.$$
   On pourra remarquer que $p_{i+1} = \lambda p_i/(i+1)$.
2. Écrire un programme qui prend en argument λ et renvoie la plus petite valeur entière n_λ telle que $\mathbf{P}\big([X \geqslant n_\lambda]\big) \leqslant 1\%$.
3. En déduire un second programme qui prend en argument p renvoie le diagramme en bâtons sur $[\![0;n_\lambda]\!]$.

RVA5

Quelques exemples pour différentes valeurs du paramètre.







"On a sanctionné les copies dans lesquelles Poisson (ou tout autre mathématicien) était écrit sans majuscule."

Rapport de Jury : HEC 2021

5 Simulation des lois usuelles

Pour simuler des variables aléatoires, on peut utiliser la bibliothèque `random` que l'on importe par :

Editeur
```
import numpy.random as rd
```

- **rd.random()**

La commande `rd.random()` renvoie un réel choisi au hasard dans l'intervalle $[0;1[$ suivant une loi de probabilité uniforme continue sur $[0;1[$.
Pour simuler à l'aide de Python une variable de loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, on peut écrire `rd.random() < p` qui renverra `True` avec une probabilité p.

- **rd.randint(debut,fin)**

Pour une loi uniforme discrète, la commande à utiliser est `rd.randint(début,fin)` qui tire au hasard avec une probabilité uniforme un entier dans l'intervalle `[début,fin[`.

Remarque. On peut aussi écrire `np.floor((b-a)*random()+a`.

- **rd.geometric(p)**

La fonction `rd.geometric(p)` permet de simuler une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p.

- **rd.binomial(n,p)**

De la même façon, on peut simuler une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n, p avec la commande `rd.binomial(n,p)`. Pour rappel, le nombre de succès obtenus lors d'une répétition de n expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes de probabilité de succès p suit une loi binomiale de paramètres n, p.

- **rd.poisson(lambda)**

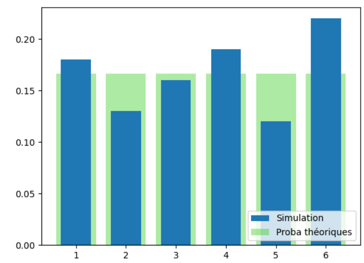
Enfin, `rd.poisson(lambda)` simule une variable qui suit une loi de Poisson de paramètre `lambda`.

Remarque. Toutes les méthodes précédentes peuvent aussi renvoyer une liste de valeurs tirées selon les différentes lois de probabilité plutôt qu'une seule valeur. Pour faire cela, il suffit de donner comme argument supplémentaire à l'instruction la taille de la liste voulue. Par exemple, `rd.randint(1,100,200)` renvoie un tableau `numpy` contenant 200 entiers pris aléatoirement entre 1 et 100. De plus, la commande `rd.randint(1,100,[200,10])` renvoie une matrice de taille (200,10).

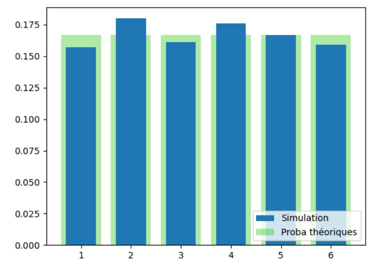
Exemple avec des histogrammes

Editeur
```
# La loi de la variable
val=[1,2,3,4,5,6]
loi=[1/6,1/6,1/6,1/6,1/6,1/6]

# Simulation de la variable aléatoire
ech=np.floor(6*np.random.rand(m))+1

# Tracé du diagramme en bâtons
        # bar(abscisses,ordonnées)
plt.bar(val,loi,color=(0.2, 0.8, 0.1, 0.4),label=
    'Proba théoriques')

# Tracé de l'histogramme
        # hist(echantillon, bins=classe)
classe=[0.5,1.5,2.5,3.5,4.5,5.5,6.5]
plt.hist(ech,bins=classe,density='true',rwidth
    =0.6,label='Simulation')

plt.legend( loc = 'lower right')
plt.show()
```

Échantillon de taille $m = 100$:



Échantillon de taille $m = 1000$:



Exercices

Révisions sur les séries

Exercice 9. ✧ **Série alternée et contre-exemple**

On définit les suites u et v pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, $\qquad u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$

1. a) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Justifier que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
   b) En déduire la convergence de la série $\sum u_n$.
2. Vérifier les équivalents : $\quad u_n \sim v_n \quad \text{et} \quad u_n - v_n \sim \dfrac{1}{n}.$
3. Prouver que la série $\sum v_n$ est divergente ?

Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont les termes généraux équivalents mais la nature des séries est différente. Cet exemple montre l'importance de l'hypothèse de positivité pour appliquer le critère d'équivalence. # RA13

Exercice 10. ✦

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier.
2. En déduire que la série de terme général $\sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$ est absolument convergente.

RA14

Exercice 11. ✦✦ Représenter dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ l'ensemble des points de coordonnées (α, β) telles que la série de terme général $u_n = \dfrac{n^\alpha}{n^2+n^\beta}$ soit convergente. # RA15

Exercice 12. ✦✦ **Produit de Cauchy** *D'après EDHEC 2020*

On considère deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in}$ à termes positifs et on suppose que les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes, de sommes respectives $A = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $B = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$. Pour tout entier naturel n, on pose : $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} c_k \leqslant \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum\limits_{k=0}^{n} b_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{2n} c_k.$
2. En déduire que la série de terme général c_n converge et que l'on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$
3. *Application*
   Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^{+2}$. En utilisant le résultat précédent, démontrer que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!}\right).$$

RA17

Exercice 13. ✦✦ **Comparaison série-intégrale, une série de Bertrand**

Prouver que la série $\sum \dfrac{1}{n\left(\ln(n)\right)^2}$ est convergente. # RA18

Exercice 14. ✦✦✦ *D'après Oral ESCP 2009*

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle décroissante de limite nulle. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $b_n = n(a_{n-1} - a_n)$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\right) - na_n$.
2. On suppose dans cette question que la série de terme général a_n converge.
   a) Montrer que $na_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
   b) En déduire que la série de terme général b_n converge et que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.
3. On suppose dans cette question que la série de terme général b_n converge.
   a) Montrer que pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, on a : $n\left(a_n - a_{n+k}\right) \leqslant \sum\limits_{j=n+1}^{n+k} b_j$.

b) En déduire que la série de terme général a_n converge et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

RA19

Exercice 15. ✦ ✎ *D'après oral HEC 2014*

Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$ on pose : $u_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$.

1. 🔑 Déterminer les réels a et b pour que la série de terme général u_n soit convergente.

2. Calculer alors la somme de cette série. # RA21

Exercice 16. ✦ ✎ **Produit infini**

Soit $(u_n)_n$ une suite à termes positifs.

1. 🔑 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \prod_{k=1}^{n} (1+u_k) \leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right).$$

2. En déduire que la suite de terme général $\prod\limits_{k=1}^{n} (1+u_k)$ admet une limite finie lorsque $n \to \infty$ si et seulement si la série $\sum u_n$ converge. # RA22

Exercice 17. ✦✦ **Transformation d'Abel**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle et que la suite de terme général $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ est bornée.

1. a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_n v_n - S_0 v_1.$$

b) En déduire la convergence de la série $\sum u_n v_n$.

2. Étudier la nature de la série $\sum(-1)^n / n$.

RA23

Probabilités

Exercice 18. ✦✦ 🔑 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons n urnes numérotées de 1 à n, contenant chacune r boules bleues et s boules rouges $(1 < s)$. On réalise l'expérience suivante. On choisit au hasard une première boule dans la première urne que l'on replace dans la seconde et on répète l'opération jusqu'à la dernière urne.
Quelle est la probabilité qu'une boule tirée au hasard dans la dernière urne soit bleue ? # RVA9

Exercice 19. ✦✦✦ Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements mutuellement indépendants.

1. Montrer que $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = 1 - \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\prod\limits_{k=1}^{n} (1 - \mathbf{P}(A_k))\right)$.

2. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(A_n) \neq 0$. Montrer que

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = 1 \iff \sum \ln(1 - \mathbf{P}(A_k)) \text{ diverge} \iff \sum \mathbf{P}(A_k) \text{ diverge.}$$

3. *Application*
On dispose d'une urne d'une capacité illimitée, d'une boule rouge et d'une quantité illimitée de boules blanches. Dans chacun des cas suivants, déterminer la probabilité de tirer au moins une fois la boule rouge.

a) On place la boule rouge et une boule blanche dans l'urne. On effectue une suite infinie de tirages avec remise.

b) On effectue une suite infinie de tirages de la façon suivante. Pour le premier tirage, on place la boule rouge et une boule blanche dans l'urne. Puis, après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne et on y ajoute une boule blanche.

c) On effectue une suite infinie de tirages de la façon suivante. Pour le premier tirage, on place la boule rouge et trois boules blanches dans l'urne. Après le n-ième tirage, on remet la boule tirée dans l'urne et on y ajoute $2n+3$ boules blanches.
Indication. On commencera par déterminer le nombre de boules dans l'urne avant le n-ième tirage. # RVA10

Exercice 20. ✦ Soit $n \geqslant 2$. On lance n fois une pièce équilibrée de manière indépendante et on considère les événements suivants :

- A=« on obtient au plus une fois Pile » ;
- B=« les résultats des différents lancers ne sont pas tous identiques ».

Les événements A et B sont-ils indépendants ? # RVA11

Exercice 21. ✦ Soient U et V deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ avec U et V suivant une loi uniforme sur $\{-1; 0; 1\}$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on définit $N(\omega)$ comme le nombre de racines du polynôme

$$Q_\omega(x) = x^2 + 2U(\omega)x + V(\omega).$$

1. Proposer un programme python qui simule N.
2. Donner la loi de N.

\# RVA12

Exercice 22. ✦✦ ✎ *Le sujet d'oral à HEC de votre Kholleuse Mme Deseuste ;)*

Montrer que, pour tous événements A et B, on a

$$\left|\mathbf{P}(A\cap B)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\right|\leqslant\frac{1}{4}.$$

\# RVA13

Exercice 23. ✦✦✦ ✎ **Lemme de Borel-Cantelli**

Soient $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

1. On suppose que la série $\sum\mathbf{P}(A_n)$ converge.
   a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$,
   $$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{k\geqslant n}A_k\Big)\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}\mathbf{P}(A_n).$$
   b) En déduire que l'événement $\bigcap_{m\geqslant 0}\bigcup_{k\geqslant m}A_k$ est négligeable.
   c) Comment interpréter ce résultat ?
2. On suppose que la série $\sum\mathbf{P}(A_n)$ diverge et que les événements $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants. On pose pour tous $n,p\in\mathbb{N}$, $p>n$,
   $$C_{n,p}=\bigcap_{k=n}^{p}\overline{A_k}\quad\text{et}\quad C_n=\bigcap_{k=n}^{+\infty}\overline{A_k}.$$
   a) Justifier que pour tout réel x positif, $1-x\leqslant\exp(-x)$.
   b) En déduire que
   $$\mathbf{P}\big(C_{n,p}\big)\leqslant\exp\Big(-\sum_{k=n}^{p}\mathbf{P}(A_k)\Big).$$
   c) Vérifier que $\mathbf{P}(C_n)=0$.
   d) Conclure en prouvant que l'événement $\bigcap_{n\geqslant 0}\bigcup_{k\geqslant n}A_k$ est presque sûr.
3. *Application. Le singe savant*
   Un singe tape sur le clavier d'un ordinateur de manière complètement aléatoire. Justifier qu'à partir d'un certain moment, le singe écrira *À la recherche du temps perdu* puis l'intégrale des Tweets de Donald Trump.

\# RVA14

Variables aléatoires discrètes

Exercice 24. ✧ Pour chaque énoncé, proposer une loi pour la variable aléatoire réelle X. On précisera les paramètres de la loi et les éventuelles hypothèses.

1. On lance un dé à 6 faces et on note X la variable égale au nombre obtenu.
2. On lance 10 fois un dé à 6 faces et on note X la variable égale au nombre de numéro pair obtenu.
3. Une urne contient 15 boules (5 noires, 3 blanches et 7 rouges). On tire successivement et avec remise 20 boules et on note X la variable égale au nombre de boules noires.
4. Un jeu de 52 cartes est aligné, faces cachées, sur une table de façon aléatoire. On découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir la dame de cœur. Soit X la variable égale au nombre de cartes découvertes.
5. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire au hasard un à un avec remise jusqu'à obtenir le jeton 1. On note X la variable égale au nombre de tirages effectués.
6. On pose m questions à un étudiant. Pour chaque question, n réponses sont possibles dont une seule uniquement est correcte. L'élève répond au hasard. Soit X la variable égale au nombre de bonnes réponses.

\# RVA16

Exercice 25. ✦✦ ✎ **Matrices de rang 1 et indépendance de variables aléatoires** *D'après EMLyon 2013*

1. Montrer que $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si, et seulement si, il existe deux matrices colonnes non nulles U, V telles que $M=U^tV$.
2. On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$. On suppose de plus : $X(\Omega)=Y(\Omega)=[\![1;n]\!]$. On note, pour tout $(i,j)\in[\![1;n]\!]^2$,
   $$m_{i,j}=\mathbf{P}\big([X=i]\cap[Y=j]\big),$$
   puis $$M=\big(m_{i,j}\big)_{i,j}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\quad U_X=\Big(\mathbf{P}\big([X=i]\big)\Big)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\quad\text{et}\quad U_Y=\Big(\mathbf{P}\big([Y=i]\big)\Big)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$
   a) On suppose, dans cette question, que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
   Calculer $U_X{}^tU_Y$. En déduire que la matrice M est de rang 1.
   b) On suppose, dans cette question, que la matrice M est de rang 1. Notons $C_1,C_2,\ldots,C_n$, les colonnes de M.
      i) Vérifier que $C_1+\cdots+C_n=U_X$.

ii) En déduire que, pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, il existe $\beta_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j = \beta_j U_X$.

iii) Montrer que pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, $\mathbf{P}([Y = j]) = \beta_j$.

iv) En déduire que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

\# RVA17

Exercice 26. ✦✦ ✎ Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de même paramètre p. Calculer la probabilité que la matrice suivante soit inversible

$$A = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y & X \end{bmatrix}.$$

\# RVA18

Exercice 27. ✦✦ **Étude asymptotique de la queue d'une loi de Poisson.** *d'après oral HEC 2012*

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant \lambda - 1$, on a $\mathbf{P}([X \geqslant n]) \leqslant \mathbf{P}([X = n])\frac{n+1}{n+1-\lambda}$.
2. En déduire que $\mathbf{P}([X \geqslant n]) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathbf{P}([X = n])$.
3. Montrer que $\mathbf{P}([X > n]) = \underset{n\to+\infty}{o}\Big(\mathbf{P}([X = n])\Big)$.

\# RVA19

Dans la suite des exercices, on appelle ***mode*** *d'une variable aléatoire réelle discrète* X *toute valeur* $x_0 \in X(\Omega)$ *telle que*

$$\forall\, x \in X(\Omega), \qquad \mathbf{P}\Big([X = x]\Big) \leqslant \mathbf{P}([X = x_0]).$$

Exercice 28. ✦ Comment écrire un programme qui prend en argument la liste des probabilités $\Big(\mathbf{P}([X = x])\Big)_{x\in X(\Omega)}$ et renvoie le ou les modes de X.

\# RVA20

Exercice 29. ✦✦✦ **Mode(s) de la loi de Poisson**

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que, selon la valeur de λ, la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ admet un ou deux modes que l'on précisera.
   Indication. On distinguera 3 cas : $\lambda \in]0,1]$, $\lambda \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$ et $\lambda \in]1,+\infty[\setminus\mathbb{N}$.
2. Illustrer par des représentations graphiques en Python les différents cas obtenus.

\# RVA22

Sujets de révision

Exercice 30. ✦✦ **Une caractérisation de la loi géométrique**

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes et de même loi, toutes deux définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On pose

$$I = \min(X, Y), \quad M = \max(X, Y) \quad \text{et} \quad D = M - I.$$

1. Dans cette question, on suppose que la loi commune de X et Y est géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ (on pose $q = 1 - p$).
   a) Reconnaître la loi de la variable I.
   b) Calculer $\mathbf{P}\big([I = i] \cap [D = d]\big)$ pour tout $(i, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. *On séparera les cas* $d = 0$ *et* $d > 0$.
   c) Déterminer la loi de la variable D.
   d) Vérifier que les variables I et D sont indépendantes.
2. Dans cette question, la loi commune de X et Y est inconnue et on suppose que les variables I et D sont indépendantes.
   On note $b = \mathbf{P}(D = 0)$ et, pour tout entier naturel k non nul, $p_k = \mathbf{P}(X = k)$. On suppose $p_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   a) Exprimer le réel b à l'aide de la famille $(p_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$.
   b) Exprimer, pour tout entier naturel k, la probabilité $\mathbf{P}(I > k)$ à l'aide de la famille $(p_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$.
   c) Soit $k \in \mathbb{N}$. En calculant la probabilité $\mathbf{P}\big([I > k] \cap [D = 0]\big)$ établir l'égalité
   $$\sum_{i=k+1}^{+\infty} {p_i}^2 = b\left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)^2.$$
   d) i) En déduire, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $(1 - b)p_k = 2b\mathbf{P}(X > k)$.
      ii) Calculer p_1 en fonction de b
      iii) Établir, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $p_{k+1} = \frac{1-b}{1+b}p_k$.
   e) En déduire que la loi commune des variables X et Y est une loi géométrique.

\# RVA23

Exercice 31. ✦✦ **Taux de panne et caractérisation des lois géométriques**

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbf{P}(X \geqslant n) > 0.$$

On appelle taux de panne (ou encore taux de défaillance) associé à la variable X la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \mathbf{P}(X = n \mid X \geqslant n).$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, comment exprimer $p_n = \mathbb{P}(\mathrm{X} = n)$ à l'aide des réels u_k ?

2. **a)** Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0;1[$.

b) Montrer la divergence de la série $\sum u_k$.

3. Réciproquement, soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite à valeurs dans $]0,1[$ telle que la série $\sum u_k$ diverge. Justifier qu'il existe une variable aléatoire dont le taux de panne est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. Montrer que la variable X suit une loi géométrique si, et seulement si, son taux de panne est une suite constante.

RVA24

CHAPITRE 5

Espérance et espérance conditionnelle

If there is a 50-50 chance that something can go wrong, then nine times out of 10 it will.

PAUL HARVEY
Animateur radio américain (1918-2009).

1 Rappels : espérance et variance (cas discret)

1.1 Espérance et la formule de transfert

Définition-Rappel 25 (espérance)

Soit X une variable aléatoire discrète infinie. On note $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$. On dit que X admet une **espérance** si la série de terme général $x_k\, \mathbf{P}\big([X = x_k]\big)$ est *absolument convergente*. Alors on définit l'espérance de X par

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k\, \mathbf{P}(X = x_k).$$

⚠ **Attention.** Il ne faut pas oublier de vérifier la convergence absolue. Elle est nécessaire pour justifier que l'espérance est bien définie et ne dépend pas du choix de l'indexation $X(\Omega)$.

Exercice 32

✦ On effectue une infinité de tirages successifs, mutuellement indépendants, dans une urne contenant initialement une boule rouge et une boule bleue. À chaque tirage, on note la couleur de la boule et on la remet dans l'urne en y ajoutant une boule bleue.
On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule bleue (respectivement rouge). Pour que ces deux variables aléatoires soient bien définies, on admet que presque sûrement une boule bleue ou rouge finit par apparaître.

1. **a)** Donner la loi de X.
   b) X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
2. Reprendre la question 1 avec la variable aléatoire Y.

Proposition 26 (existence par domination)

Soient X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur un même espace probabilisé.

Si
- $0 \leqslant |X| \leqslant Y$.
- Y admet une espérance.

Alors X admet une espérance et $|\mathbf{E}(X)| \leqslant \mathbf{E}(Y)$.

⚠ **Attention.** Il ne faut pas confondre l'énoncé précédent avec la propriété de croissance de l'espérance dont on rappelle l'énoncé :

Si
- X et Y admettent une espérance,
- $X \leqslant Y$,

alors $\mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y)$.

Théorème 27 (formule de transfert)

Soient X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et g une application définie sur $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in I\}$. Les énoncés suivants sont équivalents.

i) La variable aléatoire $g(X)$ possède une espérance.

ii) La série de terme général $g(x_k)\,\mathbf{P}\big([X = x_k]\big)$ est absolument convergente.

Dans ce cas
$$\mathbf{E}\big(g(X)\big) = \sum_{k \in I} g(x_k)\,\mathbf{P}\big([X = x_k]\big).$$

Exercice 33

✦ *Les questions 1 et 2 sont indépendantes*

1. Si X est une variable aléatoire admettant une espérance et X et $1 - X$ ont même loi. Que dire de l'espérance de X ?
2. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$.
   a) Établir l'existence de $\mathbf{E}\left(\frac{1}{1+X}\right)$.
   b) Montrer que $\mathbf{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$.

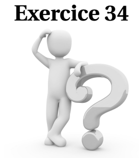
1.2 Moments et variance

Pour tout entier naturel s, le moment d'ordre s d'une variable aléatoire X est le nombre $m_s(X)$ défini par :
$$m_s(X) = \mathbf{E}(X^s).$$

En particulier pour $s = 1$, on retrouve l'espérance $m_1(X) = \mathbf{E}(X)$.
Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, et sous réserve de convergence absolue, la formule de transfert donne :
$$m_s(X) = \sum_{k \in I} {x_k}^s\,\mathbf{P}\big(X = x_k\big).$$

Remarque. On montre que si X a un moment d'ordre r alors, X admet un moment d'ordre s pour tout entier $s \leqslant r$.

Exercice 34



1. ✦✦ Prouver la remarque précédente.
2. Soit $r \in \mathbb{N}^*$, construire une variable aléatoire admettant un moment d'ordre r mais pas de moment d'ordre $r + 1$.

Définition 28 (variance et écart-type)

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

- On appelle **variance** d'une variable aléatoire X, la quantité $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\Big(\big(X - \mathbf{E}(X)\big)^2\Big)$.
- On appelle **écart-type** de X, la quantité $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

Proposition 29 (propriétés de la variance)

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

- $\mathbf{V}(X) = 0$ si et seulement si X est une application presque sûrement constante.
- Pour tous réels a, b,
$$\mathbf{V}(aX+b) = a^2\mathbf{V}(X) \qquad ; \qquad \sigma(aX+b) = |a|\sigma(X).$$

Vocabulaire. Une variable aléatoire X est dite **centrée** si $\mathbf{E}(X) = 0$. Elle est dite **réduite** si $\sigma(X) = 1$. Soit X une variable aléatoire. La variable aléatoire $Y = \frac{X-\mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée, réduite.

Théorème 30 (formule de Koenig-Huygens)

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, alors $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)^2$.

1.3 Cas les lois usuelles discrètes

La variable X est dite **certaine**, ou **presque sûrement constante** s'il existe un réel c tel que $\mathbf{P}(X = c) = 1$. Alors,

$$\mathbf{E}(X) = c \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = 0.$$

Proposition 31 (espérance et variance des lois usuelles)

Soit X, une variable aléatoire. Soient $p \in]0;1[$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, alors $\quad \mathbf{E}(X) = p \quad$ et $\quad \mathbf{V}(X) = p(1-p)$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, alors $\quad \mathbf{E}(X) = np \quad$ et $\quad \mathbf{V}(X) = np(1-p)$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,n]\!])$, alors $\quad \mathbf{E}(X) = \dfrac{n+1}{2} \quad$ et $\quad \mathbf{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

Exercice 35

✦ ✎ **Preuve via les fonctions génératrices**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans $[\![0;n]\!]$. On définit alors la fonction génératrice G_X de X par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}([X = k])\, t^k.$$

1. Justifier que $\mathbf{E}(X) = G'_X(1)$.
2. Trouver une relation entre $\mathbf{V}(X), G''_X(1)$ et $G'_X(1)$.
3. Retrouver les résultats énoncés à la proposition précédente pour la loi binomiale.

Proposition 32 (espérance et variance, cas discret dénombrable)

Soit $p \in]0;1[$. Posons $q = 1-p$.

- Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, alors X admet une espérance et une variance avec
$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \frac{q}{p^2}.$$
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance avec
$$\mathbf{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \lambda.$$

Exercice 36

✦ *Les questions sont indépendantes.*

1. Prouver les énoncés de la proposition précédente.
2. Soit X une v.a suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Calculer $\mathbf{E}(1/X)$.
   On pourra admettre que pour tout $x \in]-1;1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

2 Espérance conditionnelle

Rappelons qu'un **système complet d'événements** d'un univers Ω est une famille finie ou dénombrable d'événements $(A_n)_{n \in I}$ telle que

$$\left(\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing\right) \quad \text{et} \quad \bigcup_{n \in I} A_n = \Omega.$$

Définition 33 (espérance conditionnelle, cas discret)

- Soient X, une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et A un événement de probabilité non nulle.
L'**espérance de** X **sachant** A est défini, sous réserve d'existence, comme l'espérance de X pour la probabilité $\mathbf{P}_A$. Elle est notée $\mathbf{E}(X\,|\,A)$.
- Dans le cas où X est une variable discrète, si la série $\sum x\mathbf{P}_A\big([X=x]\big)$ converge absolument alors X admet une espérance sachant A et

$$\mathbf{E}(X\,|\,A) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbf{P}_A\big([X=x]\big).$$

Remarque. Comme le montre l'exemple suivant, l'espérance conditionnelle permet d'éviter certains biais statistiques.

Exercice 37

✦ *Dans la classe d'ECG, on compte qu'en moyenne les étudiants ont* 1.7 *frères et sœurs. Ce qui donne* 2.7 *enfants par femme alors que le nombre d'enfants par femme n'est que de* 1.8 *dans la population française. Donc les enfants de familles nombreuses font plus facilement des études.*
Commenter cette affirmation en vous appuyant sur la notion d'espérance conditionnelle.

Remarque. Si X est une variable aléatoire finie, alors la convergence absolue est automatique. Ainsi, pour tout événement A possible ($\mathbf{P}(A) \neq 0$), X admet une espérance conditionnelle sachant A.

Exercice 38

✦ Soient X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ avec $X(\Omega) = \{x_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ et A un événement de probabilité non nulle. Justifier que si $\mathbf{E}(X)$ existe, alors $\mathbf{E}(X\,|\,A)$ existe aussi et

$$\big|\mathbf{E}(X\,|\,A)\big| \leqslant \frac{1}{\mathbf{P}(A)}\mathbf{E}\big(|X|\big).$$

Théorème 34 (formule de l'espérance totale)

Soit X, une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Si
- $(A_n)_{n \in I}$ est un système complet d'événements possibles.
- Pour tout $n \in I$, $\mathbf{E}(X\,|\,A_n)$ existe.
- La série $\sum_n \mathbf{P}(A_n)\,\mathbf{E}\big(|X|\,|A_n\big)$ converge absolument.

Alors X admet une espérance et
$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n \in I} \mathbf{P}(A_n)\,\mathbf{E}(X\,|\,A_n).$$

Exercice 39

✦ Lors d'une ponte, un esturgeon pond des œufs suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 500\,000$. Chaque œuf a une probabilité $p = 1/100\,000$ d'être un adulte. On suppose que les événements "l'œuf devient adulte est indépendant des autres œufs".
Combien, en moyenne, une ponte donne d'adulte esturgeon ?

⚠ **Attention.** Il faut bien noter les valeurs absolues dans la somme $\sum_n \mathbf{P}(A_n)\,\mathbf{E}(|X|\,|A_n)$ même s'il arrive souvent que la variable X soit positive. L'exercice 61 illustre l'importance de cette condition.

Exercice 40

✦✦ ✎ Une urne contient des boules blanches (dans une proportion $p \in]0;1[$) et des boules noires. Dans un premier temps, on tire avec remise dans l'urne jusqu'à obtenir pour la première fois une boule blanche et on note N le nombre de tirages nécessaires. Dans un second temps, si la première boule blanche est apparu à la n-ième pioche, alors on retire maintenant n fois dans l'urne avec remise et l'on note X le nombre de boules blanches obtenus lors de ces n nouveaux lancers.

1. Donner la loi de N.
2. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}\big(X\,|\,[N = n]\big)$.
3. En déduire l'existence et la valeurs de $\mathbf{E}(X)$.

Exercices

Révisions et compléments

Exercice 41. ✦✦ *D'après Oraux HEC*

Soient $p \in]0;1[$ et la fonction Python X ci-contre.

1. En s'aidant d'un lancer d'une pièce dont la probabilité d'obtenir "face" est p, interpréter ce que simule la fonction X?
2. Soit X la variable aléatoire simulée par la fonction ci-dessus.
   a) Quelle est la loi de X?
   b) Quelle est l'espérance de X si elle existe?

Editeur

```
import random as rd

def X(p) :
    k=1
    y=0
    a=rd.random()
    while a>p :
        y=y+1
        k=k+1
        a=rd.random()
    while a<p :
        k=k+1
        a=rd.random()
    return k-1-y
```

Exercice 42. ✦

On tire (avec remise) une boule d'une urne contenant n boules numérotées.

1. On note T la variable aléatoire égale au numéro du tirage où pour la première fois deux boules différentes ont été tirées. Déterminer l'espérance de T.
2. Interpréter la variable aléatoire V_n dont la fonction Python suivante calcule une simulation.

Editeur

```
import random as rd
def V(n) :
    A=[]
    compteur=0
    while len(A)<n :
        u=rd.randint(1,n+1)
        if not(u in A) :
            A.append(u)
        compteur=compteur+1
    return compteur
```

Exercice 43. ✦ ✎ Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \left]0,1\right[$. On suppose que $X \hookrightarrow \mathscr{B}(m,p)$. On note $Y = \frac{1}{X+1}$. Calculer l'espérance de Y.

Exercice 44. ✦ Soit X une variable aléatoire discrète telle que :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad 4\mathbf{P}\big([X=k+2]\big) = 9\mathbf{P}\big([X=k+1]\big) - 2\mathbf{P}\big([X=k]\big).$$

1. Donner la loi de X.
2. Justifier que X admet une espérance et une variance et les calculer.
   On pourra remarquer que la variable $Y = X+1$ *suit une loi usuelle.*

Exercice 45. ✦ ✎ **Rang du premier Pile-Face**
Considérons une infinité de lancers mutuellement indépendants d'une pièce équilibrée. On note X la variable aléatoire qui donne le rang d'apparition du premier Pile-Face (dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k). Si une telle succession ne se produit pas, on pose $X = 0$. Notons A_i l'événement : « Un pile apparaît au i-ème lancer ».

1. En utilisant le système complet d'événements $(A_1, \overline{A_1})$, prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$,
$$\mathbf{P}\big([X=k+1]\big) = \frac{1}{2}\mathbf{P}\big([X=k]\big) + \frac{1}{2^{k+1}}.$$
2. En déduire $\mathbf{P}\big([X=k]\big)$ pour tout $k \geqslant 2$.
3. Préciser $\mathbf{P}\big([X \geqslant 2]\big)$ puis $\mathbf{P}\big([X=0]\big)$.
4. Justifier que X admet une espérance. La calculer.

Exercice 46. ✦ Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$.

1. Soit $Y = (-1)^X X$. Est-ce que Y possède une espérance? Si oui, la calculer.
2. Soit Z définie par :

- Si X prend une valeur paire, alors Z prend la valeur $\frac{X}{2}$
- Si X prend une valeur impaire, alors Z prend la valeur 0.

a) Quelle relation a-t-on entre X, Y et Z ?

b) Est-ce que Z possède une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 47. ✦ ✎ Soit X, une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et admettant une espérance.

1. Justifier que $1/X$ admet une espérance et exprimer $\mathbf{E}(1/X)$ en fonction des réels x_k et $p_k = \mathbf{P}\big([X = x_k]\big)$.

2. En déduire que $\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(1/X) \geqslant 1$.
Indication. On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$:

$$\forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} {y_k}^2\right).$$

Exercice 48. ✦✦ **Un peu de dénombrement**
On dispose d'une urne remplie de N boules numérotées de 1 à N. On effectue k tirages sans remise avec $k \leqslant N$. Soit X le plus petit numéro obtenu.

1. Donner la loi de X. En déduire l'égalité : $\sum\limits_{j=0}^{m} \binom{n+j}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que $\mathbf{E}(X) = \sum\limits_{i=1}^{N-k+1} \mathbf{P}(X \geqslant i)$.

3. En déduire que $\mathbf{E}(X) = \frac{N+1}{k+1}$.

Exercice 49. ✎ **Nouvelle expression de l'espérance**

- ✦✦✦ *Première version : sans indication*

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. On suppose dans cette question que X admet une espérance.
Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(X > k)$ converge, et que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > k) \qquad \text{(E)}.$$

2. Réciproquement, on suppose dans cette question que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(X > k)$ converge. Montrer que X admet une espérance, et que la relation (E) est valable.

3. Adapter le raisonnement pour montrer que si X admet un moment d'ordre 2

$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)\,\mathbf{P}(X > k).$$

- ✦ *Seconde version détaillée*

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=0}^{n} k\mathbf{P}(X = k) = \left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(X > k)\right) - n\mathbf{P}(X > n)$.

2. On suppose dans cette question que X admet une espérance.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n\mathbf{P}(X > n) \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbf{P}(X = k)$.

b) Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(X > k)$ converge, et que $\mathbf{E}(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > k) \qquad$ (E).

3. Réciproquement, on suppose dans cette question que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(X > k)$ converge. Montrer que X admet une espérance, et que la relation (E) est valable.

4. Adapter le raisonnement pour montrer que si X admet un moment d'ordre 2

$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)\,\mathbf{P}(X > k).$$

Exercice 50. ✦✦ Soient X une variable aléatoire réelle et a, b deux réels. On note $m = \mathbf{E}(X)$.

1. Montrer que $\mathbf{E}\big((X-a)(b-X)\big) = (m-a)(b-m) - \mathbf{V}(X)$.

2. On suppose $a < b$ et $X(\Omega) \subset [a, b]$.

a) Montrer que $(m-a)(b-m) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$. En déduire $\mathbf{V}(X) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$.

b) Ce majorant peut-il être amélioré ?

Exercice 51. ✦✦✦ **Est-ce que les moments déterminent la loi d'une variable finie finie ?**

1. Soit Y une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ qui prend les valeurs 0 , 1 et 2 avec les probabilités p_0, p_1 et p_2 respectivement. On suppose que $\mathbf{E}(Y) = 1$ et $\mathbf{E}\left(Y^2\right) = 5/3$.
Calculer p_0, p_1 et p_2.
2. Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $(n+1)$ réels distincts et soit φ l'application de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ qui, à tout polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$, associe le $(n+1)$-uplet $\left(Q(x_0), Q(x_1), \ldots, Q(x_n)\right)$.
   - **a)** Montrer que φ est une application linéaire bijective.
   - **b)** Déterminer la matrice A de φ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.
   - **c)** Soit X une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs x_0, x_1, …, x_n. On suppose que l'on connaît les valeurs de $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}\left(X^2\right)$, …, $\mathbf{E}\left(X^n\right)$. Peut-on en déduire la loi de X?

Exercice 52. ✦✦✦ *D'après oral HEC*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère une variable aléatoire réelle discrète X admettant des moments jusqu'à l'ordre 4 et vérifiant :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(X) = \alpha \\ \mathbf{E}\left(X^2\right) = \mathbf{E}\left(X^4\right) = 1. \end{cases}$$

1. Montrer que α est nécessairement compris entre -1 et $+1$.
2. Trouver la loi de X.

Exercice 53. ✦✦✦ **Kurtosis**

On définit, sous réserve d'existence, le moment centré d'ordre n d'une variable aléatoire réelle X par $\mu_n(X) = \mathbf{E}\left[\left(X - \mathbf{E}(X)\right)^n\right]$. Lorsque $\mu_2(X)$ et $\mu_4(X)$ existent avec $\mu_2(X) \neq 0$, on définit de plus le kurtosis de X par

$$K(X) = \frac{\mu_4(X)}{\left(\mu_2(X)\right)^2} - 3.$$

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$. Justifier que si X possède un kurtosis, alors $\alpha X + \beta$ en possède un aussi et que $K(\alpha X + \beta) = K(X)$.
2. Montrer que toute variable aléatoire X possédant un kurtosis vérifie $K(X) \geqslant -2$.
3. *Calculatoire..* Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$. Montrer que X possède un kurtosis et le calculer.
On pourra admettre que pour tous $p \in \mathbb{N}$, $x \in]0;1[$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^k = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$.

Exercice 54. ✦✦ ✎ Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n;p)$. La valeur de X s'affiche sur un écran. Mais ce dernier est défectueux, la valeur 0 ne s'affiche pas. Si X prend la valeur 0, alors l'écran affiche une valeur entière prise au hasard dans $[\![1;n]\!]$, sinon elle affiche la bonne valeur de X. Notons Y_n, la variable aléatoire égale à la valeur affichée par l'écran.

1. - **a)** Proposer un programme Python qui prend en arguments n, p et simule la variable Y_n.
   - **b)** En déduire une approximation de $\mathbf{E}(Y_{10})$ avec $p = 1/2$.
2. Exprimer $\mathbf{E}(Y_n)$ en fonction de n et p.

Exercice 55. ✦ **Inégalité de Hölder**

1. Soient $p, q \in \mathbb{R}_*^+$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
   - **a)** Soient $a \in \mathbb{R}_*^+$. On pose $f : x \in \mathbb{R}_*^+ \longmapsto \dfrac{x^q}{q} + \dfrac{a^p}{p} - ax$. Vérifier que f admet un minimum atteint en $a^{1/(q-1)}$. Préciser la valeur de ce minimum.
   - **b)** En déduire l'inégalité : $\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+, \quad ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires positives telles que $\mathbf{E}\left(X^p\right)$ et $\mathbf{E}\left(Y^q\right)$ existent.
   - **a)** Justifier que XY admet une espérance.
   - **b)** En considérant $\tilde{X} = X/\mathbf{E}\left(X^p\right)^{1/p}$ et $\tilde{Y} = Y/\mathbf{E}\left(Y^q\right)^{1/q}$, justifier que : $\quad \mathbf{E}(XY) \leqslant \mathbf{E}\left(X^p\right)^{1/p} \mathbf{E}\left(Y^q\right)^{1/q}$.
3. 🔍 *Application*
Soit Z une variable aléatoire discrète positive admettant un moment d'ordre n. Montrer que, pour tous réels r, s tels que $0 < r < s \leqslant n$, on a

$$\mathbf{E}\left(Z^r\right)^{1/r} \leqslant \mathbf{E}\left(Z^s\right)^{1/s}.$$

Exercice 56. ✦ ✎ **Inégalité de Jensen**
Soit X une variable aléatoire finie et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Démontrer que $\varphi\big(\mathbf{E}(X)\big) \leqslant \mathbf{E}\big(\varphi(X)\big)$.

Exercice 57. ✦✦ **Variables de Bernoulli et fonctions indicatrices**
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, un espace probabilisé.

1. Soit A, un événements. Rappeler la loi de $\mathbf{1}_A$.
2. Montrer pour tous événements A et B les égalités :
$$\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B, \qquad \mathbf{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$$
$$\mathbf{1}_{A\setminus B} = \mathbf{1}_A \times \left(\mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_B\right), \qquad \mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B.$$
3. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Démontrer que
$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - \mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n} \left(\mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_{A_k}\right)\right).$$

Exercice 58. ✦ Soient X et Y deux variables aléatoires réelles admettant des moments d'ordre 2. Montrer que $X+Y$ admet un écart type et
$$\sigma(X+Y) \leqslant \sigma(X) + \sigma(Y).$$
Généraliser.

Espérance conditionnelle

Exercice 59. ✧ **Vrai ou faux?**
Pour tout A, un événement avec $\mathbf{P}(A) \notin \{0; 1\}$ et X, Y, deux variables aléatoires admettant une espérance.

1. $\mathbf{E}(X \mid \Omega) = \mathbf{E}(X)$.
2. $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(X \mid A) + \mathbf{E}(X \mid \bar{A})$.
3. $\mathbf{E}(X) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{E}(X \mid A) + \mathbf{P}(\bar{A}) \cdot \mathbf{E}(X \mid \bar{A})$.
4. Si, pour tout $x \in X(\Omega)$, les événements $[X = x]$ sont indépendants de A, $\mathbf{E}(X \mid A) = \mathbf{E}(X)$.
5. Si $X \leqslant Y$ alors $\mathbf{E}(X \mid A) \leqslant \mathbf{E}(Y \mid A)$.
6. Si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbf{E}(Y \mid [X = x]) = \mathbf{E}(Y)$.

Exercice 60. ✦ Alice et Bob font une partie de Tennis de Table. Alice commence et renvoie la balle avec la même probabilité p_A. Bob fait de même avec probabilité p_B. On suppose les coups mutuellement indépendants et on note X, la variable aléatoire correspondant au nombre de coups valides en fonctions de p_A et p_B.

1. Donner la loi de X. Vérifier que l'espérance existe et la calculer.
2. Préciser $\mathbf{E}\big(X \mid [X \geqslant 1]\big)$.

Exercice 61. ✦ ✎ Une urne contient initialement N boules numérotées de 1 à N. On effectue des tirages dans cette urne suivant le protocole suivant : si la boule numéro i vient d'être tirée alors on la remet dans l'urne et on enlève toutes les boules portant un numéro strictement supérieur à i.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue lors du k-ième tirage.

1. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1, n]\!]$, Préciser $\mathbf{E}\left(X_{k+1} \mid X_k = i\right)$.
2. Donner une relation entre $\mathbf{E}\left(X_{k+1}\right)$ et $\mathbf{E}\left(X_k\right)$.
3. En déduire $\mathbf{E}\left(X_k\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 62. ✦✦ Un sachet contient initialement n bonbons Scoubidous. À chaque étape, on tire au hasard deux extrémités de Scoubidous dans le sachet.

- Si ces deux extrémités appartiennent à un même Scoubidou, on les noue pour fabriquer un rond que l'on sort du sachet.
- Si ces deux extrémités appartiennent à deux Scoubidous différents, on les noue pour fabriquer un seul Scoubidou que l'on remet dans le sachet.

1. Justifier que le processus s'arrête avec un sachet vide à la fin.
2. Soit X_n le nombre de ronds obtenus après avoir complètement vider l'assiette. Quelles sont les valeurs possibles par X_n ? Préciser $\mathbf{P}(X_n = 1)$ et $\mathbf{P}(X_n = n)$.
3. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$. En déduire que $\mathbf{E}(X_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{2} \ln n$.

Exercice 63. ✦✦ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite définie par $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

1. Déterminer la nature et la somme éventuelle des séries $\sum a_n$ et $\sum n a_n$.
2. Soit X, une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^*$ telle que

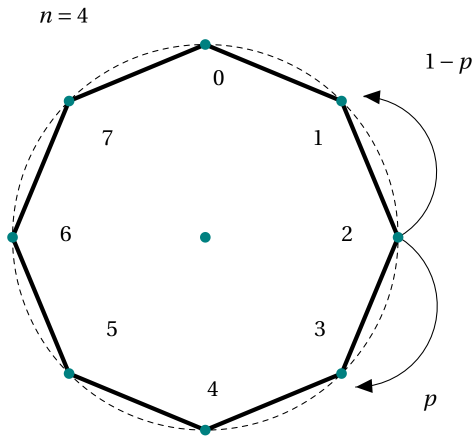
$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \qquad \mathbf{P}\big([X = n]\big) = \alpha\, a_{|n|} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

   Déterminer α.
3. **a)** Que peut-on dire de la famille d'événements (A_n) avec $A_n = [X = n] \cap [X = -n]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?
   b) Vérifier que $\mathbf{E}(X \mid A_n)$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Préciser sa valeur.
   c) Montrer que la série de terme général $\mathbf{E}(X \mid A_n)\,\mathbf{P}(A_n)$ est absolument convergente et calculer sa somme.
4. Est-ce que la variable X admet-elle une espérance ? Commenter ce résultat en comparant à la formule de l'espérance totale.

Exercice 64. ✦ **Mobile sur un polygone**

On place $2n$ points numérotés de 0 à $2n-1$ sur un cercle. Les points sont répartis uniformément.
Un mobile part initialement de 0 et à chaque étape, il avance d'une unité avec une probabilité p et recule avec probabilité $1-p$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, le nombre d'étapes
On note :

- Pour tout $k \in [\![0; N]\!]$, on note X_k la position du mobile à la k-ième étape.
- T_p la variable aléatoire égale au temps de retour à l'origine. Si le mobile ne retourne pas à l'origine au bout des N étapes, on pose $T_p(\omega) = 0$.



1. Écrire un programme qui prend en argument p, simule les 100 premières étapes du mobile et renvoie la position finale du mobile.*La commande* X%2n *renvoie le reste de la division euclidienne par* $2n$.
2. Modifier le programme pour afficher le temps T_p de premier retour à l'origine 0.
3. En déduire une approximation de l'espérance de T.
   Pour cela, on produira $m = 2000$ réalisations de la variable T. *La moyenne arithmétique de ces m évaluations donne une approximation de l'espérance. C'est la loi des grands nombres.*
4. Vérifier numériquement et expliquer l'égalité $\mathbf{E}(T_p) = \mathbf{E}(T_{1-p})$?

Exercice 65. ✦✦✦ **Moments de la loi de Poisson** $\mathscr{P}(1)$

1. L'objectif est de cette question est de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme L_n tel que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \Big(Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}\big(Y^n\big) = L_n(\lambda) \Big) \qquad (\bullet)$$

   a) Préciser L_1 et L_2.
   b) 🔑 On définit les polynômes $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ par :

$$Q_0 = 1 \quad \text{et pour tout } i \in \mathbb{N}^* \quad Q_i(x) = x(x-1)\cdots(x-i+1).$$

   Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha_{0,n}, \alpha_{1,n}, \ldots, \alpha_{n,n}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_{i,n} Q_i(x)$.
   c) 🔑 Soient $i \in \mathbb{N}$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. Préciser $\mathbf{E}\big(Q_i(Y)\big)$.
   d) Vérifier que le polynôme défini par $L_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_{i,n} x^i$ est solution du problème $(\bullet)$.

2. *Relation de récurrence*
   a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que si on pose pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$, $\psi(\lambda) = e^{\lambda} L_n(\lambda)$ alors pour $\psi(\lambda) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} i^n \dfrac{\lambda^i}{i!}$.
   b) En admettant que l'on puisse dériver ψ comme une somme finie, montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_*^+, \qquad L_{n+1}(\lambda) = \lambda L_n'(\lambda) + \lambda L_n(\lambda).$$

   c) 🔑 Justifier que la relation précédente est valable pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
   d) En déduire l'égalité : $\quad L_{n+1}(1) = \sum\limits_{i=0}^{n} i\,\alpha_{i,n} + L_n(1)$.

3. *Moments de la loi* $\mathscr{P}(1)$
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit l'endomorphisme : $\quad \Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[x] \\ P & \longmapsto & P(x+1) - P(x). \end{array} \right.$
   a) Expliciter $\Delta\big(x^n\big)$. Vérifier ensuite que : $\quad \forall i \in [\![1; n]\!], \quad \Delta\big(Q_i\big) = i\, Q_{i-1}$.

b) Justifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} x^i = \sum_{i=1}^{n} i\, \alpha_{i,n} \mathrm{Q}_{i-1}(x).$$

En déduire que si $\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathscr{P}(1)$, alors $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \mathbf{E}\left(\mathrm{Y}^i\right) = \sum_{i=0}^{n} i\, \alpha_{i,n}$.

c) Conclure en montrant que

$$\mathbf{E}\left(\mathrm{Y}^{n+1}\right) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathbf{E}\left(\mathrm{Y}^i\right).$$

d) Proposer un programme python qui prend en argument un entier n et renvoie la matrice ligne

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{E}(\mathrm{Y}) & \mathbf{E}\left(\mathrm{Y}^2\right) & \dots & \mathbf{E}\left(\mathrm{Y}^n\right) \end{bmatrix}.$$

On pourra utiliser la commande **sp.binom(i,j)** *de la bibliothèque* **scipy.special** pour le coefficient $\binom{i}{j}$.