DM 5

Thème : Matrices de Hilbert et Python

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on désigne par H_n la matrice de Hilbert d'ordre n définie par :

$$\mathrm{H}_n = \left[\left(\frac{1}{j+k-1}\right)\right]_{1\leqslant j,k\leqslant n} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}.$$

Soit h_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à H_n. On pose de plus la fonction $q_n : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$q_n(x) = \langle h_n(x), x\rangle$$

où $\langle , \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

- Étude de q

1. Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Vérifier que $q_n(x) = \displaystyle\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} \frac{x_k x_j}{j+k-1}$.
2. Montrer que $q_n(x) = \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1}\right)^2 \mathrm{d}t$.
3. Justifier que $q_n(x) \geqslant 0$ et que l'égalité $q_n(x) = 0$ équivaut à $x = 0$.

- Application à la réduction de H_n

4. Justifier que H_n est diagonalisable.
5. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note :
$$\mu_n = \min\left(\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_n)\right) \quad \text{et} \quad \rho_n = \max\left(\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_n)\right).$$
Expliciter μ_2 et ρ_2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a $0 < \mu_n < \rho_n$.

- Python - conjecture 1

6. Vérifier que H_n est une matrice inversible.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $h_{i,j}^{(-1,n)}$ le coefficient de place (i,j) de la matrice H_n^{-1} et on désigne par s_n la somme des coefficients de la matrice H_n^{-1}, c'est-à-dire :
$$s_n = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} h_{i,j}^{(-1,n)}$$
7. Écrire un programme qui prend en argument n et renvoie la matrice H_n, puis la matrice inverse ${\mathrm{H}_n}^{-1}$.
8. Comment obtenir la somme des coefficients d'une matrice A à l'aide de Python ?
En déduire un programme qui prend en argument n et renvoie s_n. Tester le programme, que peut-on conjecturer sur s_n ?

- Python - conjecture 2

9. Pour obtenir le spectre d'une matrice **A**, on importe la bibliothèque **numpy.linalg as al** et on exécute la commande **al.eigvals(A)**.
Écrire un programme qui prend en argument n et renvoie ρ_n et ρ_n/μ_n. Conjecturer le comportement limite des suites $(\rho_k)_k$ et $(\rho_k/\mu_k)_k$.
10. Comment afficher les n premiers termes de la suite $(\rho_k)_k$?
On enverra via Slack, une capture d'écran des résultats obtenus.

– FIN –

DM 5 - solution

1. Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Si on note $(e_1, \dots e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} h_n(x) &= h_n\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i h(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j+i-1} e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{j+i-1} e_j. \end{aligned}$$

La composante de $h_n(x)$ suivant e_j est alors

$$y_j = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{j+k-1}.$$

Par définition du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \langle h_n(x), x\rangle &= \sum_{j=1}^n y_j x_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{x_j x_k}{j+k-1}. \end{aligned}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1}\right)^2 \mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n x_j t^{j-1}\right)\left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1}\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_k x_j t^{k+j-2} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_k x_j \int_0^1 t^{k+j-2} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{x_k x_j}{k+j-1}. \end{aligned}$$

Car pour $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

3. Pour tout $t \in [0;1]$,

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1}\right)^2 \geqslant 0.$$

Par positivité de l'intégrale, il vient

$$q_n(x) = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1}\right)^2 \mathrm{d}t \geqslant 0.$$

- Traitons le cas d'égalité.

Supposons que $q_n(x) = 0$. Comme la fonction polynomiale

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1}\right)^2$$

est positive et continue sur $[0;1]$,

$$\forall t \in [0;1], \quad \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1}\right)^2 = 0,$$

puis

$$\forall t \in [0;1], \quad \sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} = 0.$$

La fonction polynomiale

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^n x_k t^{k-1}$$

admet une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul. Tous les coefficients sont donc nuls et

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Réciproquement, si $x = 0_{\mathbb{R}^n}$, on a bien $q_n(x) = 0$.
L'équivalence dans le cas d'égalité est prouvée.

4. La matrice H_n est une matrice symétrique réelle, donc H_n est diagonalisable.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{H}_2 - \lambda_2) &= (1-\lambda)\left(\frac{1}{3} - \lambda\right) - \frac{1}{4} \\ &= \lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Un calcul de discriminant donnent 2 racines

$$\lambda_1 = 1/6 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 1/2.$$

Comme $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{H}_2)$ si et seulement si $\mathrm{H}_2 - \lambda \mathrm{I}_2$ est non inversible.

$$\mathrm{Sp}(h_2) = \mathrm{Sp}(\mathrm{H}_2) = \{\lambda_1, \lambda_2\}.$$

On a donc

$$\mu_2 = 1/6 \quad \text{et} \quad \rho_2 = 1/2.$$

- Soit x un vecteur propre associé à une valeur propre λ.

$$h_n(x) = \lambda x \quad \text{et} \quad x \neq 0_{\mathbb{R}^n}.$$

En particulier

$$\begin{aligned} q_n(x) &= \langle h_n(x), x\rangle \\ &= \langle \lambda x, x\rangle \\ &= \lambda \|x\|^2. \end{aligned}$$

Or on a vu que $q_n(x) > 0$ pour $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Donc $\lambda > 0$ et

$$\begin{aligned}\mu_n &= \min \mathrm{Sp}(\mathrm{H}_n)\\ &= \min \mathrm{Sp}(h_n) > 0.\end{aligned}$$

Montrons que $\mu_n < \rho_n$ en raisonnant par l'absurde. Comme $\mu_n \leqslant \rho_n$, on suppose donc $\mu_n = \rho_n$, alors

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_n) = \{\rho_n\}.$$

Or, H_n est diagonalisable, dans ce cas H_n est semblable à la matrice $\rho_n \mathrm{I}_n$. C'est donc $\rho_n \mathrm{I}_n$, absurde. Conclusion

$$\mu_n < \rho_n.$$

6. D'après la question précédente, 0 n'est pas valeur propre de H_n. La matrice est donc inversible.

Python

Avant de commencer, on importe les différente bibliothèques :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
```

7. Pour avoir la matrice de Hilbert de taille n, on peut écrire

```
def Hilbert(n):

    H=np.zeros([n,n])
    for i in range(0,n):
        for j in range(0,n):
            H[i,j]=1/(i+j+1)
            # +1 à cause des décalages d'
                indice en Python
    return H
```

- Pour avoir l'inverse, on peut rajouter

8.

```
def sommeH(n):
    H=Hilbert(n)
    return sum(sum(al.inv(H)))
```

Testons le code :

```
>>> sommeH(2)
4.000000000000001
>>> sommeH(3)
8.99999999999999
>>> sommeH(4)
15.999999999999261
>>> sommeH(5)
24.99999999998454
>>> sommeH(6)
36.00000000168575
```

En prenant en compte les erreurs d'arrondis, on conjecture que pour tout entier $n \geqslant 2$

$$\boxed{s_n = n^2.}$$

9. Pour obtenir le maximum :

```
def MspectreH(n):
    H=Hilbert(n)
    Spectre=al.eigvals(H)
    Max=max(Spectre)
    return Max
```

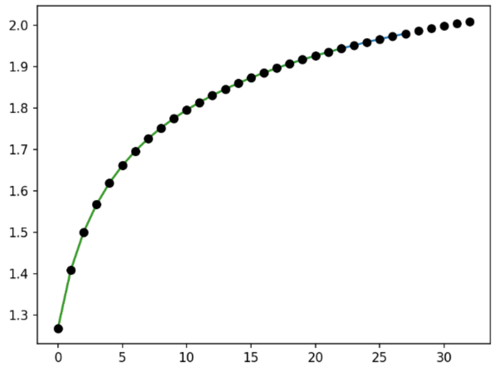
et le quotient

```
def QspectreH(n):
    H=Hilbert(n)
    Spectre=al.eigvals(H)
    Max=max(Spectre)
    Min=min(Spectre)
    return Max/Min
```

10.

```
def Affichage(n):
    m=[]
    for i in range(2,n):
        m.append(MspectreH(i))

    plt.plot(m,'ko')
    plt.show()
```



On conjecture que la suite est croissante et convergente.

Pour aller plus loin et après le cours sur les endomorphismes symétriques, on pourra consulter le sujet HEC 2006 dont on donne un extrait :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $S = \left(a_{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, \quad a_{ij} > 0.$$

On note β la plus grande valeur propre de S et V le sous-espace propre de S associé à β. On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique et de la norme associée $\|\cdot\|$.

1. Soit $X_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in V\backslash\{0\}$. On note $|X_0| = \begin{bmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{bmatrix}$.
   (a) Montrer ${}^tX_0SX_0 \leqslant {}^t|X_0|\,S\,|X_0|$ et en déduire : $|X_0| \in V$.
   (b) Montrer que les coordonnées de $S|X_0|$ sont toutes strictement positives et en déduire que X_0 n'a aucune coordonnée nulle.
   (c) Montrer : ${}^tX_0SX_0 = {}^t|X_0|\,S\,|X_0|$ et en déduire que les coordonnées de X_0 sont toutes de même signe.
2. (a) En déduire qu'il n'existe pas deux vecteurs de $V\backslash\{0\}$ orthogonaux entre eux.
   (b) Conclure : $\dim(V) = 1$.