

DS 11 - sujet A

THÈMES : UN PEU DE TOUT

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Problème A

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose

$$u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^2}.$$

On se propose de montrer que la série de terme général u_n converge et de calculer sa somme. Pour cela, on pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $w_n = v_n - \ln(n)$. On rappelle que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$

1. a) Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de $\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$.
b) En déduire que, au voisinage de $+\infty$: $w_n - w_{n+1} = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
2. a) Montrer que la série de terme général $(w_n - w_{n+1})_n$ est convergente.
b) En déduire que la suite (w_n) converge. On note γ sa limite.
3. Montrer que la série de terme général u_n converge.
4. a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$.
b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} = v_{2n+1} - \frac{1}{2}v_n - 1$.
c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n u_k = 24(v_n - v_{2n+1}) + 24 - \frac{6n}{n+1}$.
5. Justifier que $v_n - v_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\ln(2)$. Exprimer alors $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ en fonction de $\ln 2$.
6. Proposer un programme python qui prend en argument n et renvoie $\sum_{k=1}^n u_k$.

Problème B - les quaternions

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On note E l'espace vectoriel engendré par (I, J, K, L) et id_E l'endomorphisme identité de E . On pose $A = J + K$.

7. Montrer que (I, J, K, L) est une base de E et donner la dimension de E .
8. On donne les calculs python suivants :

Editeur

```
import numpy as np
I=np.eye(4)
J=np.array([[0,-1,0,0],[1,0,0,0],[0,0,0,1],[0,0,-1,0]])
K=np.array([[0,0,-1,0],[0,0,0,-1],[1,0,0,0],[0,1,0,0]])
L=np.array([[0,0,0,1],[0,0,-1,0],[0,1,0,0],[-1,0,0,0]])
```

```
>>> np.dot(J,K)
array([[ 0,  0,  0,  1],
       [ 0,  0, -1,  0],
       [ 0,  1,  0,  0],
       [-1,  0,  0,  0]])
```

```
>>> np.dot(K,L)
array([[ 0, -1,  0,  0],
       [ 1,  0,  0,  0],
       [ 0,  0,  0,  1],
       [ 0,  0, -1,  0]])
```

```
>>> np.dot(L,J)
array([[ 0,  0, -1,  0],
       [ 0,  0,  0, -1],
       [ 1,  0,  0,  0],
       [ 0,  1,  0,  0]])
```

- Exprimer JK, KL et LJ en fonction respectivement de L, J et K.
- Calculer J^2, K^2 et L^2 puis en déduire que : $KJ = -L, LK = -J$ et $JL = -K$.
- En déduire que E est stable pour le produit matriciel. C'est-à-dire :

$$\forall N, M \in E, \quad NM \in E.$$

- Calculer A^2 . En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.
- On considère maintenant l'application φ_A qui à toute matrice M de E associe :

$$\varphi_A(M) = AMA^{-1}.$$

- Montrer que φ_A est un endomorphisme de E.
 - Préciser $\varphi_A \circ \varphi_A(M)$ pour $M \in E$. En déduire un polynôme annulateur de φ_A . Est-ce que φ_A est un isomorphisme de E?
- Écrire la matrice Φ_A de φ_A dans la base (I, J, K, L), puis justifier que φ_A est diagonalisable.
 - Donner toutes les valeurs propres de φ_A .

On rappelle que l'application, notée Tr, qui à toute matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ associe sa trace (c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux) est une application linéaire de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

On rappelle également que l'application qui à tout couple (M, N) de $E \times E$ associe le réel noté (M/N) défini par $\langle M, N \rangle = \text{Tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire sur E. On munit désormais E de ce produit scalaire.

- Établir alors que φ_A est un endomorphisme symétrique de E.
 - En déduire que $\text{Ker}(\varphi_A - \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(\varphi_A + \text{id}_E)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Problème C - matrice de Hilbert

On note E l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

- Montrer que l'application $\Phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(f, g) \longmapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt \text{ est un produit scalaire sur E.}$$

on note $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On note E_n le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales définies sur $[0, 1]$ et de degré inférieur ou égal à $n-1$, et, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, e_i l'application

$$e_i : t \in [0; 1] \mapsto t^{i-1} \in \mathbb{R}.$$

On rappelle que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E_n .

- Calculer, pour tout (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\Phi(e_i, e_j)$.

On considère la matrice carrée réelle d'ordre n :

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

- Étude du cas $n = 2$
 - Déterminer les valeurs propres de la matrice H_2 .
 - La matrice H_2 est-elle diagonalisable?
 - Montrer que la matrice H_2 est inversible et calculer son inverse.
- Dans toute la suite du problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
- Établir que la matrice H_n est diagonalisable.

17. Soient $P \in E_n$, $Q \in E_n$.

On note $a_1, \dots, a_n$ les réels tels que $P = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, et $b_1, \dots, b_n$, les réels tels que $Q = \sum_{i=1}^n b_i e_i$. On note aussi A et B les matrices-colonnes définies par :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

- a) Montrer : $\Phi(P, Q) = {}^t A H_n B$ où ${}^t A$ désigne la transposée de A .
- b) En déduire que les valeurs propres de la matrice H_n sont toutes strictement positives.
- c) La matrice H_n est-elle inversible?

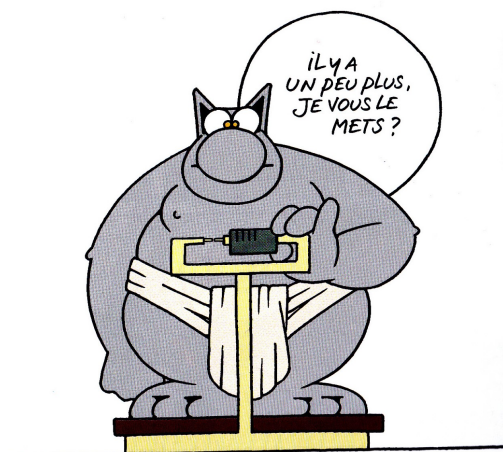
• Soit $f \in E$. On note, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\beta_i = \Phi(e_i, f)$. On considère les matrices-colonnes B et A_0 définies par $B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$ et $A_0 = H_n^{-1} B$.

On note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les réels tels que $A_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, et P_0 le polynôme défini par : $P_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$.

On considère l'application $d : E_n \rightarrow \mathbb{R} : P \mapsto \|P - f\|$.

- 18. Montrer : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \Phi(e_i, P_0 - f) = 0$.
- 19. En déduire : $\forall Q \in E_n, \Phi(Q, P_0 - f) = 0$.
- 20. Établir : $\forall P \in E_n, \|P - f\|^2 = \|P - P_0\|^2 + \|P_0 - f\|^2$.
- 21. Démontrer que d admet un minimum et que ce minimum est atteint en P_0 et en P_0 seulement.
- 22. Montrer : $\|P_0 - f\|^2 = \|f\|^2 - \|P_0\|^2$.
- 23. Un exemple : On choisit ici $n = 2$ et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \left| t - \frac{1}{3} \right|$.

Calculer P_0 et $d(P_0)$, et donner une valeur approchée décimale de $d(P_0)$ à 10^{-8} près.



Problème D - convergence de $\sum \varepsilon_n / n$

Comme au premier problème, on note, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. On a donc

$$u_n = \ln(n) + \gamma + o(1) \quad (*)$$

24. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_N = \sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ pair}}}^N \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad T_N = \sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ impair}}}^N \frac{1}{p}.$$

- a) Exprimer u_N à l'aide de S_N et T_N .
- b) Établir, pour tout entier naturel N non nul, l'égalité : $\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n} = u_N - u_{2N}$.

c) À l'aide du développement limité (★), déduire la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ et l'égalité $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.

- On suppose dans les trois prochaines questions, que, pour tout entier naturel n ,

$$\varepsilon_{4n+1} = \varepsilon_{4n+2} = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{4n+3} = \varepsilon_{4n+4} = -1.$$

25. Pour $x \in [0; 1]$, simplifier la somme $\sum_{n=0}^{2N+1} (-x^2)^n$. En déduire, pour tout entier naturel N , les égalités :

$$\int_0^1 \frac{1-x^{4N+4}}{1+x^2} dx = \sum_{k=0}^{2N+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right) = \sum_{k=0}^{2N+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

26. Justifier que $\int_0^1 \frac{x^{4N+4}}{1+x^2} dx$ tend vers 0 lorsque $N \rightarrow +\infty$. En déduire l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{\pi}{4}$.

27. À l'aide de la question 24.c), justifier l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4} \right) = \ln(2)/2$. En déduire que la série $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ est convergente avec

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(2).$$

– FIN –



DS 11 - sujet *

THÈMES : ALGÈBRE, ANALYSE ET PROBABILITÉS

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Problème A - Méthode de Newton

L'objet de ce problème est l'étude d'un algorithme d'approximation d'une racine carrée de certains éléments de $\mathbb{R}$, ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la construction d'une suite convergeant vers un élément dont le carré est donné.

Partie I. Algorithme de Newton dans $\mathbb{R}$

Soit a un réel strictement positif.

1. a) Donner le tableau de variation de la fonction définie, pour x élément de $\mathbb{R}_+^*$, par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right).$$

- b) Justifier rapidement l'existence de la suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $x_0 = a$ et de la relation de récurrence : $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout entier naturel n .
2. a) Pour tout entier naturel n , établir les égalités :

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n} (x_n - \sqrt{a})^2 \quad \text{et} \quad x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{1}{2x_{n+1}} (a - x_{n+1}^2).$$

- b) En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$.
3. a) Pour tout entier naturel n non nul, prouver les inégalités :

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} (x_n - \sqrt{a})^2.$$

- b) Soit b un réel strictement positif et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs vérifiant l'inégalité : $u_{n+1} \leq bu_n^2$ pour tout entier naturel n non nul.
Pour tout entier naturel n non nul, donner une majoration de u_n en fonction de n, b, u_1 .
- c) En déduire, pour tout entier n non nul, une majoration de $x_n - \sqrt{a}$ en fonction de n, x_1 et a .
4. Proposer un programme Python qui prend en arguments deux réels a, e strictement positifs et renvoie une approximation de $\sqrt{a}$ à e -près.

Partie II. Racine carrée d'une matrice

Dans cette partie n désigne un entier naturel au moins égal à 2.

- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients réels ayant n lignes et n colonnes.
- On note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes à coefficients réels ayant n lignes et une colonne.
- On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle dont on note $\|\cdot\|$ la norme.

- On identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ aux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de telle sorte que si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ on écrira Mx pour M

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

- Soit A une matrice carrée à coefficients réels. On appelle racine carrée de A toute matrice B vérifiant $B^2 = A$.

• A. Quelques exemples

5. Montrer que la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.
6. On se propose, dans cette question, de généraliser le résultat de la question précédente. On considère l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A est donc la matrice dont le coefficient en ligne i et colonne j est nul sauf si $1 \leq i \leq n-1$ et $j = i+1$ auquel cas il vaut 1.

On suppose qu'il existe une matrice B racine carrée de A et on note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ ayant, dans la base canonique, B pour matrice.

- L'endomorphisme g est-il bijectif?
 - Prouver que $\text{Im } g$ est stable par g (c'est-à-dire que $g(\text{Im } g) \subset \text{Im } g$), puis que la restriction de g à $\text{Im } g$ est un automorphisme de $\text{Im } g$.
 - Que vaut g^{2n} ? En déduire que la matrice A n'a pas de racine carrée.
7. Donner un exemple d'élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ possédant une infinité de racines carrées.

• B. Racine carrée d'une matrice symétrique strictement positive

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle matrice symétrique strictement positive, tout élément de $\mathcal{S}_n$ dont les valeurs propres sont strictement positives. On note $\mathcal{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques réelles strictement positives. On suppose désormais que A est un élément de $\mathcal{S}_n^+$.

8. Montrer que A admet une racine carrée symétrique réelle strictement positive.
9. Soit B et C deux racines carrées symétriques réelles strictement positives de A.
- Justifier l'existence de deux matrices P et Q inversibles et de deux matrices diagonales D et Δ telles que : $A = PD^{2t}P = Q\Delta^{2t}Q$.
 - En déduire l'existence d'une matrice inversible R telle que $RD^2 = \Delta^2R$. Établir l'égalité : $RD = \Delta R$. On comparera les coefficients de ligne i et de colonne j ($1 \leq i, j \leq n$) de ces deux matrices.
 - Conclure qu'il existe une unique racine carrée de A symétrique réelle strictement positive, qu'on notera $A^{1/2}$.

Jusqu'à la fin de cette partie B, on note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A et, pour tout entier j , $1 \leq j \leq p$, E_j le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ_j .

10. Pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq p$ et pour tout réel x , on pose :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p \frac{x - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}$$

- Montrer que la famille $(L_1, L_2, \dots, L_p)$ est une base de l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré strictement inférieur à p .
 - Montrer qu'il existe un unique polynôme P à coefficients réels de degré strictement inférieur à p tel que, pour tout entier i de $\{1, 2, \dots, p\}$, $P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$.
11.
 - Pour tout entier j , $1 \leq j \leq p$, et pour tout vecteur x_j de E_j , calculer $P(A)(x_j)$ et en déduire l'égalité : $P(A)^2 = A$.
 - Montrer que les valeurs propres de P(A) sont toutes strictement positives.
 - Conclure à l'égalité :

$$A^{1/2} = \sum_{i=1}^p \sqrt{\lambda_i} L_i(A).$$

Partie III. Algorithme de Newton dans $\mathcal{S}_n^+$.

Dans toute cette partie on considère un élément A de $\mathcal{S}_n^+$ et une base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A, le vecteur propre e_i étant, pour tout entier i , $1 \leq i \leq n$, associé à la valeur propre λ_i (les réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n'étant pas nécessairement distincts).

12. Soit M un élément de $\mathcal{S}_n^+$ dont $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est aussi une base de vecteurs propres. On note $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ les valeurs propres correspondantes (i.e. $Me_i = \mu_i e_i$, pour tout entier i , $1 \leq i \leq n$). Montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est encore une base de vecteurs propres de la matrice $M' = \frac{1}{2}(M + M^{-1}A)$. Pour tout entier i , $1 \leq i \leq n$, quelle relation existe-t-il entre la valeur propre μ'_i de M' associée à e_i et μ_i ?

13. Déduire de la question précédente qu'il est possible de définir une suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{S}_n^+$ telle que : $A_0 = A$ et, pour tout entier naturel k , $A_{k+1} = \frac{1}{2} (A_k + A_k^{-1}A)$.
14. Pour tout entier i , $1 \leq i \leq n$, on note $\lambda_{i,k}$ la valeur propre de A_k associée à e_i .   tudier, pour tout entier i , $1 \leq i \leq n$, la convergence de la suite $(\lambda_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$.
15. On dit qu'une suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ converge vers la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'il existe une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que, pour tout entier i , $1 \leq i \leq n$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|M_k \varepsilon_i - M \varepsilon_i\| = 0$.

Montrer que la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $A^{1/2}$.

Bonus Où est Newton ?



Problème B - convergence de $\sum \varepsilon_n/n$

L'objet du problème est l'étude, dans différents contextes, de la convergence et, parfois, de la valeur de la somme d'une série de terme général $\frac{\varepsilon_n}{n}$ où, pour tout entier naturel n non nul, ε_n vaut 1 ou -1 .

Partie I : Deux cas déterministes

On note, pour tout entier naturel n non nul, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

16. a) On pose, pour tout entier naturel n non nul, $\gamma_n = H_n - \ln n$.
En s'aidant de la série $\sum \gamma_{n+1} - \gamma_n$, montrer que la suite de terme général $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On note γ sa limite.
- b) En déduire que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
17. a)   tablir, pour tout entier naturel N non nul, l'égalité : $\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n} = H_N - H_{2N}$.
- b) En déduire la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ et l'égalité $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.
- On suppose dans les trois prochaines questions, que, pour tout entier naturel n ,

$$\varepsilon_{4n+1} = \varepsilon_{4n+2} = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{4n+3} = \varepsilon_{4n+4} = -1.$$

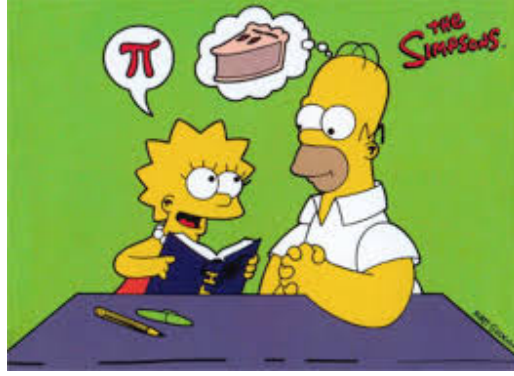
18. Prouver, pour tout entier naturel N , les égalités :

$$\int_0^1 \frac{1-x^{4N+4}}{1+x^2} dx = \sum_{k=0}^{2N+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right) = \sum_{k=0}^{2N+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

19. En déduire l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{\pi}{4}$.

20.    l'aide de la question 17.b), justifier l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4} \right) = \ln(2)/2$. En déduire que la série $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ est convergente avec

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$$



Partie II : Un cas aléatoire

- *Preliminaire : une condition suffisante de convergence*

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites réelles. On pose pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$A_0 = 0 \quad \text{et} \quad A_N = \sum_{n=1}^N a_n.$$

21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Préciser $A_n - A_{n-1}$. En déduire que

$$\sum_{n=1}^N a_n b_n = A_N b_N - \sum_{n=1}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1}).$$

22. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On dit que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}_m$ si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |A_n| \leq m + 1.$$

Justifier que si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie $\mathcal{P}_m$, la série $\sum \frac{A_n}{n(n+1)}$ est convergente. En déduire la convergence de $\sum \frac{a_n}{n}$.

- *Retour sur le cas aléatoire*

Dans la suite, on s'intéresse à la convergence de la série $\sum X_n/n$ où $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme sur $\{-1; 1\}$. C'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X_n = -1) = \mathbf{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}.$$

On pose aussi $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on considère l'événement

$$B_m = \left\{ \omega \in \Omega \text{ tel que la suite } (X_n(\omega))_n \text{ vérifie } \mathcal{P}_m \right\}.$$

23. On admet¹ dans la suite que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$, $\mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2e^{-n \frac{\varepsilon^2}{2}}$.
Justifier que pour tous $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbf{P}(|S_n| > m + 1) \leq 2e^{-(n+m)/2}.$$

24. Prouver l'existence de $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(\bar{B}_m) \leq C e^{-m/2} \quad \text{puis} \quad \mathbf{P}(B_m) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1.$$

25. Justifier alors que

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} B_m\right) = 1.$$

26. Conclure en montrant que presque sûrement la série $\sum X_n/n$ est convergente.

27. On considère maintenant une suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Étudier la convergence de $\sum Y_n/n$.

– FIN –

1. On pourrait le démontrer, voir DS6 de l'année dernière par exemple.

DS 11 A- solution

Problème A

1.a) On sait que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

et

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$$

donc

$$\frac{x}{1+x} = x - x^2 + o(x^2).$$

On en déduit que

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} - x + x^2 + o(x^2) = \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

D'où

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} = \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

1.b) Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on peut écrire

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} \\ = w_n - w_{n+1},$$

il vient

$$w_n - w_{n+1} = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

2.a) D'après la question précédente

$$w_n - w_{n+1} \sim \frac{1}{2n^2}.$$

De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad w_n - w_{n+1} \geq 0,$$

et la série de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

est convergente. Par le critère d'équivalence de séries à termes positifs, la série de terme général $w_n - w_{n+1}$ est convergente.

2.b) Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, on a par télescopage

$$w_n = (w_n - w_1) + w_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (w_{k+1} - w_k) + w_1 \\ = - \sum_{k=1}^{n-1} (w_k - w_{k+1}) + w_1.$$

La suite de terme général $\sum_{k=1}^{n-1} (w_k - w_{k+1})$ est donc convergente car la série de terme général $w_n - w_{n+1}$ converge. Par conséquent la suite de terme général $-\sum_{k=1}^{n-1} (w_k - w_{k+1}) + w_1$ converge. Alors la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ converge.

3. Comme $\sum_{k=1}^n k^2 \geq n^2$, on a

$$0 \leq u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{2n^2}$ est convergente, par le critère de comparaison, la série $\sum u_n$ converge.

4.a) Comme $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, on a

$$u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^2} = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}.$$

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une réduction au même dénominateur donne

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1} = \frac{(2a+2b+c)n^2 + (3a+b+c)n + a}{n(n+1)(2n+1)}.$$

Par identification, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$$

si et seulement si

$$2a+2b+c=0, \quad 3a+b+c=0, \quad a=6.$$

La résolution de ce système linéaire donne

$$\begin{cases} a=6 \\ b=6 \\ c=-24 \end{cases}$$

On obtient finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{6}{n} + \frac{6}{n+1} - \frac{24}{2n+1}.$$

4.b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} \\ = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} + 1 \\ = \frac{1}{2} v_n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} + 1.$$

Ce qui conclut.

4.c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{6}{k} + \frac{6}{k+1} - \frac{24}{2k+1} \right) \\ &= 6 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + 6 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - 24 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} \\ &= 6v_n + 6 \left(v_n + \frac{1}{n+1} - 1 \right) - 24 \left(v_{2n+1} - \frac{1}{2} v_n - 1 \right) \\ &= 12v_n - \frac{6n}{n+1} - 24v_{2n+1} + 12v_n + 24. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

5. Dans un premier temps,

$$\begin{aligned} v_n - v_{2n+1} &= w_n + \ln n - w_{2n+1} - \ln(2n+1) \\ &= w_n - w_{2n+1} - \ln \left(2 + \frac{1}{n} \right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma - \gamma - \ln 2 = -\ln 2. \end{aligned}$$

Par passage à la limite, on prouve la convergence et l'égalité

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 24(-\ln 2) + 24 - 6 = 18 - 24\ln 2.$$

6.

```
def suiteUn(n):
    S=0
    for i in range(1,n):
        S+=6/(i*(i+1)*(2*i+1))
    return S

# test

print(suiteUn(100))
print(18-24*np.log(2))

1.364317668436219
1.364467666561314
```

Problème B

7. On vérifie que la famille est libre. Comme elle est génératrice par construction, c'est une base de E. Dès lors

$$\dim(E) = 4.$$

8.a) On lit directement

$$JK = L, \quad KL = J, \quad LJ = K.$$

8.b)

```
>>> np.dot(J,J)
array([[ -1,  0,  0,  0],
       [  0, -1,  0,  0],
       [  0,  0, -1,  0],
       [  0,  0,  0, -1]])

J^2 = -I.

>>> np.dot(K,K)
array([[ -1,  0,  0,  0],
       [  0, -1,  0,  0],
       [  0,  0, -1,  0],
       [  0,  0,  0, -1]])
```

$$K^2 = -I.$$

```
>>> np.dot(L,L)
array([[ -1,  0,  0,  0],
       [  0, -1,  0,  0],
       [  0,  0, -1,  0],
       [  0,  0,  0, -1]])

L^2 = -I.
```

• On en déduit que

$$KJ = -J^2KJ = -J(JK)J = -JLJ = -J(LJ) = -JK = -L.$$

Le raisonnement est identique pour les trois autres.

8.c) Soient $N, M \in E$. Il existe des réels n_i et m_i tels que

$$N = n_1I + n_2J + n_3K + n_4L,$$

$$M = m_1I + m_2J + m_3K + m_4L.$$

Ainsi le produit NM s'obtient comme combinaison linéaire de produit de deux éléments de $\{I, J, K, L\}$. Or on a vu que ces produits s'expriment uniquement avec $\{I, J, K, L\}$. Dès lors, NM est combinaison linéaire d'éléments de $\{I, J, K, L\}$, $NM \in E$.

Finalement E est bien stable par produit.

9.

```
>>> A=J+K

>>> np.dot(A,A)
array([[ -2,  0,  0,  0],
       [  0, -2,  0,  0],
       [  0,  0, -2,  0],
       [  0,  0,  0, -2]])
```

$$A^2 = -2I.$$

On en déduit que A est inversible d'inverse

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}A.$$

10.a) La linéarité est claire et si $M \in E$, $\varphi_A(M) \in E$ par stabilité par produit de E .

10.b) On a pour tout $M \in E$

$$\varphi_A(\varphi_A(M)) = \text{id}_E$$

Un polynôme annulateur est donné par $x^2 - 1$. Le spectre de φ_A est inclus dans $\{-1; 1\}$. Comme 0 n'appartient pas au spectre, φ_A est bijective.

11.a) Soyons paresseux et utilisons Python :

```
def phi(M):
    J=np.array([[0,-1,0,0],[1,0,0,0],
               [0,0,0,1],[0,0,-1,0]])
    K=np.array([[0,0,-1,0],[0,0,0,-1],
               [1,0,0,0],[0,1,0,0]])
    A=J+K
    Ainv=-1/2*A
    return np.dot(A,np.dot(M,Ainv))

>>> phi(I)
array([[1., 0., 0., 0.],
       [0., 1., 0., 0.]])
```

```

[0., 0., 1., 0.],
[0., 0., 0., 1.]]

>>> phi(J)
array([[ 0.,  0., -1.,  0.],
       [ 0.,  0.,  0., -1.],
       [ 1.,  0.,  0.,  0.],
       [ 0.,  1.,  0.,  0.]])

>>> phi(K)
array([[ 0., -1.,  0.,  0.],
       [ 1.,  0.,  0.,  0.],
       [ 0.,  0.,  0.,  1.],
       [ 0.,  0., -1.,  0.]])

>>> phi(L)
array([[ 0.,  0.,  0., -1.],
       [ 0.,  0.,  1.,  0.],
       [ 0., -1.,  0.,  0.],
       [ 1.,  0.,  0.,  0.]])

```

Ainsi

$$\varphi_A(I) = I, \quad \varphi_A(J) = K, \quad \varphi_A(K) = J, \quad \varphi_A(L) = -L.$$

La matrice de φ_A dans la base (I, J, K, L) est alors

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

La matrice de φ_A est symétrique à coefficients réels. Par le théorème spectral, la matrice (et donc φ_A) sont diagonalisable.

11.b) Si vous lisez bien l'énoncé, la réponse est donnée à la question 12.b).

Comme φ_A est diagonalisable et n'est pas du type λid_E , on sait que le spectre de φ_A contient au moins deux réels. Or on a vu que le spectre de φ_A est inclus dans $\{-1; 1\}$ (polynôme annulateur). Il y a donc exactement deux valeurs propres données par -1 et 1 .

12.a) Notons que A est antisymétrique. Son inverse aussi.

Soient $M, N \in E$

$$\begin{aligned} \langle \varphi_A(M), N \rangle &= \text{Tr}({}^t(AMA^{-1})N) \\ &= \text{Tr}({}^tA^{-1}{}^tM{}^tAN) \\ &= \text{Tr}(A^{-1}{}^tMAN) \\ &= \text{Tr}({}^tMANA^{-1}) \\ &= \text{Tr}({}^tM\varphi_A(N)) = \langle M, \varphi_A(N) \rangle. \end{aligned}$$

12.b) C'est une conséquence directe du fait que les espaces propres pour un endomorphisme symétrique sont orthogonaux. De plus comme il n'y a que deux valeurs propres 1 et -1 , ces deux espaces propres sont supplémentaires (car φ_A est diagonalisable).

→ Voir la correction manuscrite pour le problème C et le sujet * pour la version complète du problème D.