Problème C - matrice de Hilbert

13. Cours.

14. Pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$

$$\Phi(e_i, e_j) = \int_0^1 t^{i+j-2}\, dt = \frac{1}{i+j-1}.$$

Remarque. H_n est la matrice de Gram de la famille $(e_i)_i$.

$$(H_n)_{ij} = \phi(e_i, e_j).$$

15. On a pour $n=2$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$$

15a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\det(H_2 - \lambda I_2) = (1-\lambda)\left(-\lambda + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}.$$
$$= \lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{12}$$

Le discriminant est $\Delta = \sqrt{13}/3$ on trouve deux valeurs propres $\frac{1}{6}(4 \pm \sqrt{13})$.

b) H_2 est une matrice de taille 2 avec deux valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.

c) On a $\det H_2 = \frac{1}{12} \neq 0$. De plus

$$H_2^{-1} = 12 \begin{bmatrix} 1/3 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

16. H_n est une matrice symétrique réelle, elle est donc diagonalisable.

17. a) On a

$$\phi(P,Q) = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n a_i e_i(t)\right)\left(\sum_{j=1}^n b_j e_j(t)\right) dt$$

$$= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \, \phi(e_i, e_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \, [H_n]_{ij}$$

or $${}^tA H_n B = [a_1 \cdots a_n] \begin{bmatrix} [H_n]_{1,1} & \cdots & [H_n]_{1,n} \\ & \ddots & \\ [H_n]_{n,1} & \cdots & [H_n]_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= [a_1 \cdots a_n] \begin{bmatrix} \vdots \\ \sum_{j=1}^n [H_n]_{ij} b_j \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i [H_n]_{ij} b_j$$

D'où l'égalité!

17b) Soit $\lambda \in Sp(H_n)$. Il existe donc $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$H_n X = \lambda X$$

D'où

$$^tX H_n X = {^tX}(\lambda X) = \lambda \, {^tX}X \quad \text{avec } {^tX}X \in \mathbb{R}_*^+$$

Or, Si P est le polynome dont les coefficients dans la base canonique sont donnés par X

$$^tX H_n X = \phi(P,P) > 0 \quad \text{car } P \neq 0$$

D'où

$$\lambda = \frac{\phi(P,P)}{^tXX} > 0.$$

c) Oui car $0 \notin Sp(H_n)$.

18. Notons que pour $i \in [\![1;n]\!]$

$$\phi(e_i, P_0) = {^tE_i} H_n A_0 \quad \text{où} \quad E_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{ieme ligne}$$

Puis par définition de A_0

$$\phi(e_i, P_0) = {^tE_i} B = B_i = \phi(e_i, f).$$

Finalement

$$\phi(e_i, P_0 - f) = \phi(e_i, P_0) - \phi(e_i, f) = 0.$$

19. Soit $Q = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Par linéarité à gauche du produit scalaire

$$\Phi(Q, P_0 - f) = \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{\phi(e_i, P_0 - f)}_{=0} = 0$$

20. Soit $P \in E_n$

$$\begin{aligned} \| P - f \|^2 &= \| (P - P_0) + (P_0 - f) \|^2 \\ &= \| P - P_0 \|^2 + \| P_0 - f \|^2 \\ &\quad + 2 \underbrace{\langle P - P_0, P_0 - f \rangle}_{=0 \text{ (question 19)}} \\ &= \| P - P_0 \|^2 + \| P_0 - f \|^2. \end{aligned}$$

21. Pour tout $P \in E_n$

$$d(P) \geq \| P_0 - f \|^2 = d(P_0)$$

de plus pour $P \neq P_0$, $\| P - P_0 \|^2 > 0$ et

$$d(P) > d(P_0).$$

Ainsi d admet bien un minimum atteint en un unique point.

22. D'après la question 19, P_0 est orthogonal à $P_0 - f$, Donc d'après le théorème de Pythagore,

$$\|P_0\|^2 + \|-P_0+f\|^2 = \|f\|^2$$

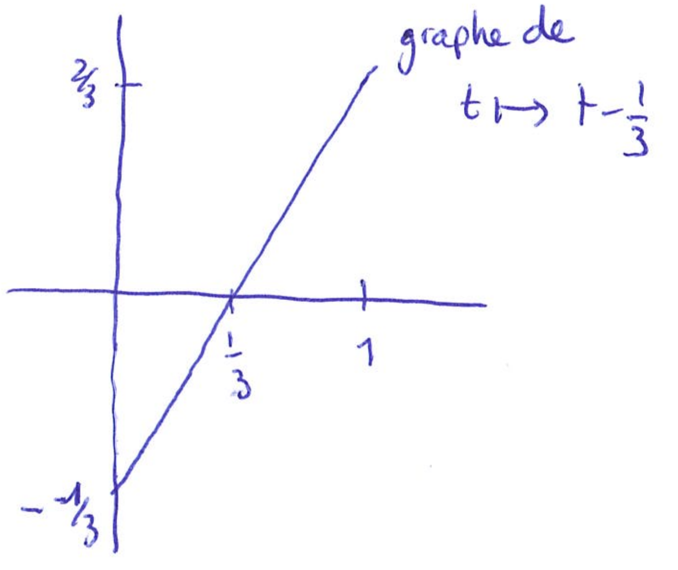
Ce qui conclut.

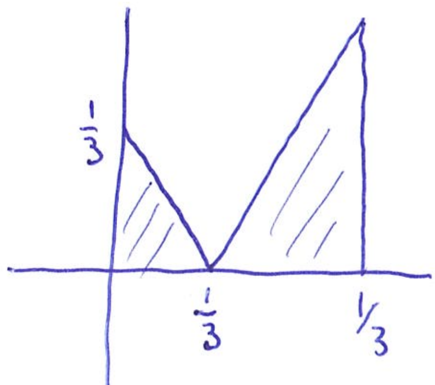
23. Explicitons B.

$$\phi(e_1, f) = \int_0^1 |t - \tfrac{1}{3}| \times 1 \, dt$$
$$= \int_0^{1/3} \left(\tfrac{1}{3} - t\right) dt + \int_{1/3}^1 \left(t - \tfrac{1}{3}\right) dt$$
$$= \int_0^{1/3} u \, du + \int_0^{2/3} u \, du$$
$$= \frac{1}{18} + \frac{2}{18} = \frac{1}{6}$$

Calcul graphique :

Aire $= \int_0^1 |t - \frac{1}{3}| dt$





et on fait la somme de deux aires de triangles puis

$$\phi(e_2, f) = \int_0^1 t\left|t - \frac{1}{3}\right| dt$$

$$= \int_0^{1/3} t\left(\frac{1}{3} - t\right) dt + \int_{1/3}^1 t\left(t - \frac{1}{3}\right) dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{6} - \frac{t^3}{3}\right]_0^{1/3} + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{6}\right]_{1/3}^1 = \frac{29}{162}$$

Puis

$$A_0 = H_2^{-1} B = 12 \begin{bmatrix} +1/3 & -1/2 \\ -1/2 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/6 \\ 29/162 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{2 \times 29}{27} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2/3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 29/27 \end{bmatrix} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} -11 \\ 31 \end{bmatrix}$$

D'où $P_0 = -\frac{11}{27} + \frac{31}{27}$.

Enfin

$$d(P_0) = \|f\|^2 - \|P_0\|^2$$

$$= \frac{19}{270} - \frac{301}{2187} \dots$$