Problème B. - partie I

16a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{u^2}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par conséquent, $\gamma_{n+1} - \gamma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.

Par le critère d'équivalence des séries à termes négatifs, et par le critère de Riemann, la série

$$\sum \gamma_{n+1} - \gamma_n$$

est convergente.

Or par télescopage:

$\forall N \in \mathbb{N}^*$ $$\sum_{n=1}^{N-1} \gamma_{n+1} - \gamma_n = \gamma_N - \gamma_1$$

La convergence des sommes partielles induit la convergence de la suite $(\gamma_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$.

16b) On a $\gamma_n = \gamma + o(1)$ car $\gamma_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma$.

D'où $H_n - \ln(n) = \gamma + o(1)$ puis le résultat.

17a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$H_N - H_{2N} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Notons $\mathcal{P}_n$ et I_n respectivement les entiers pairs entre 1 et $2n$ et impair entre 1 et $2n$. On a $\mathcal{P}_n \sqcup I_n = [\![1; 2n]\!]$

De sorte que

$$H_N - H_{2N} = 2\sum_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{p} - \left(\sum_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{p} + \sum_{p \in I_n} \frac{1}{p} \right)$$

$$= \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{p} - \sum_{p \in I_n} \frac{1}{p}.$$

$$= \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{(-1)^p}{p} + \sum_{p \in I_n} \frac{(-1)^p}{p}$$

$$= \sum_{p \in \mathcal{P}_n \cup I_n} \frac{(-1)^p}{p} = \sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^p}{p}.$$

Ce qui conclut.

17.b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n} = H_N - H_{2N}$$

$$= \ln(N) + \gamma + o(1) - \ln(2N) - \gamma + o(1)$$

$$= -\ln(2) + o(1).$$

On a donc
$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln(2)$$

On a aussi
$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{2N} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln(2).$$

En distinguant termes d'indice pair et terme d'indice impair, on peut affirmer que la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ des sommes partielles
$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n}$$
est convergente, de limite $-\ln(2)$. Ce qui conclut.

18. Soit $x \in [0;1]$. En reconnaissant une somme géométrique de raison $-x^2 \neq 1$,
$$\sum_{k=0}^{2N+1} (-x^2)^k = \frac{1-(-x^2)^{2N+1+1}}{1-(-x^2)} = \frac{1-x^{4N+2}}{1+x^2}$$

Par linéarité de l'intégrale
$$\int_0^1 \frac{1-x^{4N+2}}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{2N+1} (-x^2)^k\,dx$$
$$= \sum_{k=0}^{2N+1} (-1)^k \int_0^1 x^{2k}\,dx$$
$$= \sum_{k=0}^{2N+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Ensuite

$$\sum_{k=0}^{2N+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2N+1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2N+1} \frac{1}{2k+1}$$

$$= \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{2\cdot(2p)+1} - \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{2\cdot(2p+1)+1}$$

$$= \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{4p+1} - \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{4p+3}.$$

$$= \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{4p+1} - \frac{1}{4p+3}$$

D'où le résultat.

19. On a

$$\int_0^1 \frac{1-x^{4N+4}}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int_0^1 \frac{x^{4N+4}}{1+x^2}\,dx.$$

Or

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[\arctan(x)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

et $$\left| \int_0^1 \frac{x^{4N+4}}{1+x^2}\,dx \right| \leq \int_0^1 x^{4N+4}\,dx = \frac{1}{4N+5} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

On en déduit

$$\int_0^1 \frac{1-x^{4N+4}}{1+x^2}\,dx \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}$$

Ce qui conclut avec la question précédente.

20. Soit $N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+2}$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ impair}}}^{2N+2} \frac{-1}{p} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ pair}}}^{2N+2} \frac{1}{p} \right).$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{2N+2} \frac{(-1)^p}{p} \xrightarrow[N \to +\infty]{} -\frac{1}{2} \ln(2).$$

d'après la question 17.b.

Enfin

$$\sum_{n=1}^{4N+4} \frac{\varepsilon_n}{n} = \sum_{n=0}^{N} \frac{\varepsilon_{4n+1}}{4n+1} + \sum_{n=0}^{N} \frac{\varepsilon_{4n+2}}{4n+2} + \sum_{n=0}^{N} \frac{\varepsilon_{4n+3}}{4n+3} + \sum_{n=0}^{N} \frac{\varepsilon_{4n+4}}{4n+4}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{\varepsilon_{4n+1}}{4n+1} + \frac{\varepsilon_{4n+3}}{4n+3} + \sum_{n=0}^{N} \frac{\varepsilon_{4n+2}}{4n+2} + \frac{\varepsilon_{4n+4}}{4n+4}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4}$$

$$\xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$$

Ensuite

$$\sum_{n=1}^{4N+5} \frac{\varepsilon_n}{n} = \sum_{n=1}^{4N+4} \frac{\varepsilon_n}{n} + \frac{\varepsilon_{4n+4}}{4n+4} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$$

de même avec $\displaystyle\sum_{n=1}^{4N+\ell} \frac{\varepsilon_n}{n}$ où $\ell \in \{0;1;2;3\}$.

Cela justifie la convergence de $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon_n}{n}\right)_N$ et le calcul de la limite.

Problème B - partie II

21. Par télescopage $A_N - A_{N-1} = a_N$.

D'où

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = \sum_{n=1}^{N} (A_n - A_{n-1}) b_n$$

$$= \sum_{n=1}^{N} A_n b_n - \sum_{n=1}^{N} A_{n-1} b_n$$

$$\underset{p=n-1}{=} \sum_{n=0}^{N} A_n b_n - \sum_{p=0}^{N-1} A_p b_{p+1} \quad \text{car } A_0 = 0$$

$$= A_N b_N - \sum_{p=0}^{N-1} A_p b_p - A_p b_{p+1}$$

$$= A_N b_N - \sum_{p=0}^{N-1} A_p (b_p - b_{p+1})$$

On parle de transformation d'Abel. c'est "l'équivalent" de l'intégration par parties pour les sommes.

22. On a

$$\left| \frac{A_n}{n(n+1)} \right| \leq \frac{m+1}{n(n+1)}$$

avec

$$\frac{m+1}{n(n+1)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{m+1}{n^2}$$

Par le critère de Riemann, la série $\sum 1/n^2$ est convergente.

Par le critère de comparaison, la série $\sum \frac{A_n}{n(n+1)}$ est absolument convergente, donc convergente.

Ensuite, par la question 21, avec $(b_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n} = \frac{A_N}{N} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{A_n}{n(n+1)}$$

car $b_n - b_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$.

On sait que :

- $\left(\frac{A_N}{N}\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 lorsque $N \to +\infty$
- $\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{A_n}{n(n+1)}\right)_N$ converge

Donc, par linéarité, la suite des sommes partielles de $\sum \frac{a_n}{n}$ est convergente. La série converge.

23. D'après le résultat admis

$$P(|S_n| > m+1) \leq 2e^{-n\frac{(m+1)^2}{2}}$$

Or $\frac{(n+m)}{2} - \frac{n(m+1)^2}{2} = \frac{1}{2}\left(m(1-nm-2n)\right) \leq 0$

D'où $\frac{(n+m)}{2} \leq \frac{n(m+1)^2}{2}$ et par décroissance de $t\in\mathbb{R} \mapsto \exp(-t)$

$$e^{-(n+m)/2} \geq e^{-n\frac{(m+1)^2}{2}}.$$ Ce qui conclut.

convergence monotone dans sa version probabiliste

$$P(B_m) = \lim_{N \to +\infty} P\left(\bigcup_{n=1}^{N} [|S_n| > m+1] \right)$$

Ce qui conclut avec $C = 2\sqrt{e}/(\sqrt{e}-1)$.

- Puis

$$P(B_m) = 1 - P(\overline{B_m}) \xrightarrow[m \to +\infty]{} 1.$$

car par encadrement $P(\overline{B_m}) \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$

25. La suite $(B_m)_m$ est croissante pour l'inclusion donc

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \qquad B_N = \bigcup_{m=1}^{N} B_m$$

et par le théorème de convergence monotone

$$P\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} B_m \right) = \lim_{N \to +\infty} P(B_N) = 1.$$

26. Si on note C l'évènement :

$$\left\{ \omega \in \Omega \;\middle|\; \sum \frac{X_n(\omega)}{n} \text{ converge} \right\}.$$

on a d'après la question 22, l'inclusion

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} B_m \subset C \subset \Omega$$

24. On a

$$\overline{B_m} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [|S_n| > m+1]$$

car $B_m = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [|S_n| \leq m+1]$.

Or, à partir de la formule du crible, on démontre par récurrence sur $\mathbb{N}^*$ que :

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{N} [|S_n| > m+1]\right) \leq \sum_{n=1}^{N} P(|S_n| > m+1).$$

$$\leq 2\sum_{n=1}^{N} e^{-n/2} e^{-m/2}$$

Or à partir des résultats sur les sommes géométriques

$$\sum_{n=1}^{N} e^{-n/2} = \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\left(e^{-1/2}\right)^n}_{\geq 0} \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-1/2}\right)^n = \frac{1}{1-e^{-1/2}}$$

$$\leq \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}$$

On a donc

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{N} [|S_n| > m+1]\right) \leq \frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1} e^{-m/2}$$

Enfin, la suite d'événements

$$\left(\bigcup_{n=1}^{N} [|S_n| > m+1]\right)_N$$

est croissante pour l'inclusion, par le théorème de par croissance de la probabilité

$$1 = P\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} B_m\right) \leq P(C) = P(\Omega) = 1$$

D'où $P(C) = 1$. Ce qui conclut.

27. Notons que $X_n = 2Y_n - 1$ suit une loi uniforme sur $\{-1;1\}$. De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{X_n}{n} = 2\sum_{n=1}^{N} \frac{Y_n}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

On constate alors que si la série $\sum \frac{Y_n}{n}$ converge alors la série $\sum \frac{X_n}{n}$ ne peut converger car la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Ainsi, presque surement, la série $\sum \frac{Y_n}{n}$ diverge.