DM 1 - sujet A

Thème : Révisions analyse ECG1

Séries

Les 3 questions sont indépendantes.

1. Déterminer la convergence des séries suivantes :

$$\text{A)}\quad \sum_{n\geqslant 0}\frac{n^n}{n!} \qquad \text{B)}\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)^4}{4^{\ln(n)}} \qquad \text{C)}\quad \sum \frac{\ln(n)}{n^{\alpha}} \quad (\alpha\in\mathbb{R}).$$

2. Calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ dans chacun des cas suivants :

$$\text{A)}\quad a_n = \frac{\ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)}{\ln(n+2)\cdot\ln(n+3)} \qquad \text{B)}\quad a_n = \frac{n+(-1)^n}{3^n} \qquad \text{C)}\quad a_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!k!}.$$

3. Soient α, β et γ trois réels dont la somme est nulle. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de limite nulle 0. On pose

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\qquad v_n = \alpha u_n + \beta u_{n+1} + \gamma u_{n+2}.$$

Justifier que la série $\sum v_n$ est convergente et exprimer sa somme à l'aide des premiers termes de la suite u.

Intégrales dépendant d'un paramètre

Extrait de sujet de concours

4. Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, les intégrales suivantes convergent

$$\int_0^{+\infty}\sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad\text{et}\quad \int_0^{+\infty}\cos(xt)\,t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On note $\mathrm{S}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $\mathrm{C}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x\in\mathbb{R}$, par :

$$\mathrm{S}(x) = \int_0^{+\infty}\sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad\text{et}\quad \mathrm{C}(x) = \int_0^{+\infty}\cos(xt)\,t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

5. Établir, pour tout $a\in\mathbb{R}$, et tout $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$|\sin(a+\lambda)-\sin a-\lambda\cos a| \leqslant \frac{\lambda^2}{2}.$$

6. **a)** Démontrer, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{S}(x+h)-\mathrm{S}(x)}{h} - \mathrm{C}(x) \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

b) En déduire que S est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que, pour tout $x\in\mathbb{R}, \mathrm{S}'(x) = \mathrm{C}(x)$.

7. Établir, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\mathrm{C}(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}\mathrm{S}(x).$$

8. Montrer, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$2\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}}\,\mathrm{S}(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t.$$

9. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{S}(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{C}(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t.$$

10. **a)** Utiliser la méthode des rectangles pour écrire une fonction python qui prend en argument x et renvoie une approximation de $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$.
Vous pouvez regarder le lien vers Basthon sur le site de la classe pour des indications.

b) En déduire les graphes de S et C sur $[-10, 10]$.
Je vous encourage à tester vos codes sur machine et vous pouvez vous contenter de m'envoyer une capture d'écran de vos codes et résultats via Slack.

DM 1 - sujet *

Thème : Révisions analyse ECG1

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par E_n l'espace vectoriel des applications f de classe $\mathscr{C}^n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que f et sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$. On note alors pour tout élément f de E_n :

$$\mathrm{M}_0(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_n(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f^{(n)}(x)\right|.$$

On notera simplement M_0 pour $\mathrm{M}_0(f)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la fonction f.
L'objet du problème est d'établir que E_n est inclus dans E_k pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, puis d'obtenir une majoration de M_k en fonction de M_0 et M_n.

Le cas $n = 2$

Soit $f \in \mathrm{E}_2$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\left|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}_2}{2}h^2 \quad \text{et} \quad \left|f(x-h) - f(x) + hf'(x)\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}_2}{2}h^2.$$

2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_*^+$: $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{\mathrm{M}_0}{h} + \dfrac{\mathrm{M}_2}{2}h.$
3. Conclure en montrant que E_2 est inclus dans E_1 et

$$\mathrm{M}_1 \leqslant \sqrt{2\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}.$$

L'inclusion $\mathrm{E}_n \subset \mathrm{E}_k$ avec l'aide d'une famille de matrices

Soit n un entier supérieur à 2.
Pour toute matrice colonne $\mathrm{H} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_{n-1}\end{bmatrix}$, on définit la matrice

$$\mathrm{M_H} = \begin{bmatrix} \dfrac{h_1}{1!} & \dfrac{{h_1}^2}{2!} & \cdots & \dfrac{{h_1}^{n-1}}{(n-1)!} \\ \dfrac{h_2}{1!} & \dfrac{{h_2}^2}{2!} & \cdots & \dfrac{{h_2}^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{h_{n-1}}{1!} & \dfrac{{h_{n-1}}^2}{2!} & \cdots & \dfrac{{h_{n-1}}^{n-1}}{(n-1)!} \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

4. Proposer un programme qui prend en argument une matrice ligne H et renvoie la matrice $\mathrm{M_H}$.

   On limitera le nombre d'opérations dans le calcul de la factorielle. On évitera donc d'utiliser les commandes préprogrammées en Python pour le calcul de la factorielle.
   Vous pouvez regarder le lien vers Basthon sur le site de la classe pour des indications.
5. Justifier que $\mathrm{M_H}$ est inversible si et seulement si les réels h_i sont deux à deux distincts et non nuls.

6. Soient $f \in \mathrm{E}_n$ avec n, un entier supérieur à 2 et $\mathrm{H} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_{n-1} \end{bmatrix}$. Pour tout réel x, on pose :

$$\begin{bmatrix} \mathrm{F}_1(x) \\ \mathrm{F}_2(x) \\ \vdots \\ \mathrm{F}_{n-1}(x) \end{bmatrix} = \mathrm{M}_\mathrm{H} \begin{bmatrix} f'(x) \\ f''(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}.$$

En majorant $\left|f(x+h_k) - f(x) - \mathrm{F}_k(x)\right|$ pour $k \in [\![1; n-1]\!]$, justifier que

$$|\mathrm{F}_k(x)| \leqslant 2\mathrm{M}_0 + \frac{|h_k|^n}{n!}\mathrm{M}_n.$$

7. Déduire des deux dernières questions que, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $f^{(k)}$ est bornée. Conclure en montrant que

$$\forall\, k \in [\![1; n]\!], \qquad \mathrm{E}_n \subset \mathrm{E}_k.$$

Majoration de M_k avec M_0 et M_n

8. Soit $f \in \mathrm{E}_n$ avec $n \geqslant 2$. Vérifier que si f n'est pas constante alors $\mathrm{M}_n(f) > 0$.
9. Justifier que pour toute fonction $f \in \mathrm{E}_n$ avec $n \geqslant 2$,

$$\mathrm{M}_{n-1}(f) \leqslant 2^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{M}_0(f)^{\frac{1}{n}} \mathrm{M}_n(f)^{\frac{n-1}{n}}.$$

10. Conclure en montrant que pour tous $f \in \mathrm{E}_n$ et $k \in [\![1; n]\!]$, on a

$$\mathrm{M}_k(f) \leqslant 2^{\frac{k(n-k)}{2}} \mathrm{M}_0(f)^{\frac{n-k}{n}} \mathrm{M}_n(f)^{\frac{k}{n}}.$$

On pourra s'aider de l'inclusion de la question 7.