DM 1 - sujet A

THÈME : RÉVISIONS ANALYSE ECG1

Séries

Les 3 questions sont indépendantes.

1. Déterminer la convergence des séries suivantes :

$$\text{A)} \quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^n}{n!} \qquad \text{B)} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^4}{4^{\ln(n)}} \qquad \text{C)} \quad \sum \frac{\ln(n)}{n^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

2. Calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ dans chacun des cas suivants :

$$\text{A)} \quad a_n = \frac{\ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)}{\ln(n+2)\cdot\ln(n+3)} \qquad \text{B)} \quad a_n = \frac{n+(-1)^n}{3^n} \qquad \text{C)} \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!}.$$

3. Soient α, β et γ trois réels dont la somme est nulle. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de limite nulle 0. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \alpha u_n + \beta u_{n+1} + \gamma u_{n+2}.$$

Justifier que la série $\sum v_n$ est convergente et exprimer sa somme à l'aide des premiers termes de la suite u.

Intégrales dépendant d'un paramètre

Extrait de sujet de concours

4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intégrales suivantes convergent

$$\int_0^{+\infty} \sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \cos(xt)\,t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On note $\mathrm{S}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $\mathrm{C}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x\in\mathbb{R}$, par :

$$\mathrm{S}(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{C}(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)\,t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

5. Établir, pour tout $a \in \mathbb{R}$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$|\sin(a+\lambda) - \sin a - \lambda\cos a| \leqslant \frac{\lambda^2}{2}.$$

6. **a)** Démontrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{S}(x+h)-\mathrm{S}(x)}{h} - \mathrm{C}(x) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

b) En déduire que S est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que, pour tout $x\in\mathbb{R}, \mathrm{S}'(x) = \mathrm{C}(x)$.

7. Établir, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\mathrm{C}(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}\mathrm{S}(x).$$

8. Montrer, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$2\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}}\mathrm{S}(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t.$$

9. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{S}(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{C}(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t.$$

10. **a)** Utiliser la méthode des rectangles pour écrire une fonction python qui prend en argument x et renvoie une approximation de $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$.
Vous pouvez regarder le lien vers Basthon sur le site de la classe pour des indications.

b) En déduire les graphes de S et C sur $[-10, 10]$.
Je vous encourage à tester vos codes sur machine et vous pouvez vous contenter de m'envoyer une capture d'écran de vos codes et résultats via Slack.

DM 1 - sujet *

Thème : Révisions analyse ECG1

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par E_n l'espace vectoriel des applications f de classe $\mathscr{C}^n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que f et sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$. On note alors pour tout élément f de E_n :

$$\mathrm{M}_0(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_n(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f^{(n)}(x)\right|.$$

On notera simplement M_0 pour $\mathrm{M}_0(f)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la fonction f.
L'objet du problème est d'établir que E_n est inclus dans E_k pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, puis d'obtenir une majoration de M_k en fonction de M_0 et M_n.

Le cas $n = 2$

Soit $f \in \mathrm{E}_2$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\left|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}_2}{2}h^2 \quad \text{et} \quad \left|f(x-h) - f(x) + hf'(x)\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}_2}{2}h^2.$$

2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_*^+$: $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{\mathrm{M}_0}{h} + \dfrac{\mathrm{M}_2}{2}h$.

3. Conclure en montrant que E_2 est inclus dans E_1 et

$$\mathrm{M}_1 \leqslant \sqrt{2\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}.$$

L'inclusion $\mathrm{E}_n \subset \mathrm{E}_k$ avec l'aide d'une famille de matrices

Soit n un entier supérieur à 2.
Pour toute matrice colonne $\mathrm{H} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_{n-1}\end{bmatrix}$, on définit la matrice

$$\mathrm{M_H} = \begin{bmatrix} \frac{h_1}{1!} & \frac{{h_1}^2}{2!} & \dots & \frac{{h_1}^{n-1}}{(n-1)!} \\ \frac{h_2}{1!} & \frac{{h_2}^2}{2!} & \dots & \frac{{h_2}^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{h_{n-1}}{1!} & \frac{{h_{n-1}}^2}{2!} & \dots & \frac{{h_{n-1}}^{n-1}}{(n-1)!} \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

4. Proposer un programme qui prend en argument une matrice ligne H et renvoie la matrice $\mathrm{M_H}$.

On limitera le nombre d'opérations dans le calcul de la factorielle. On évitera donc d'utiliser les commandes préprogrammées en Python pour le calcul de la factorielle.
Vous pouvez regarder le lien vers Basthon sur le site de la classe pour des indications.

5. Justifier que $\mathrm{M_H}$ est inversible si et seulement si les réels h_i sont deux à deux distincts et non nuls.

6. Soient $f \in \mathrm{E}_n$ avec n, un entier supérieur à 2 et $\mathrm{H} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_{n-1} \end{bmatrix}$. Pour tout réel x, on pose :

$$\begin{bmatrix} \mathrm{F}_1(x) \\ \mathrm{F}_2(x) \\ \vdots \\ \mathrm{F}_{n-1}(x) \end{bmatrix} = \mathrm{M}_\mathrm{H} \begin{bmatrix} f'(x) \\ f''(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}.$$

En majorant $\left|f(x+h_k) - f(x) - \mathrm{F}_k(x)\right|$ pour $k \in [\![1; n-1]\!]$, justifier que

$$|\mathrm{F}_k(x)| \leqslant 2\mathrm{M}_0 + \frac{|h_k|^n}{n!}\mathrm{M}_n.$$

7. Déduire des deux dernières questions que, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $f^{(k)}$ est bornée. Conclure en montrant que

$$\forall\, k \in [\![1; n]\!], \qquad \mathrm{E}_n \subset \mathrm{E}_k.$$

Majoration de M_k avec M_0 et M_n

8. Soit $f \in \mathrm{E}_n$ avec $n \geqslant 2$. Vérifier que si f n'est pas constante alors $\mathrm{M}_n(f) > 0$.

9. Justifier que pour toute fonction $f \in \mathrm{E}_n$ avec $n \geqslant 2$,

$$\mathrm{M}_{n-1}(f) \leqslant 2^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{M}_0(f)^{\frac{1}{n}} \mathrm{M}_n(f)^{\frac{n-1}{n}}.$$

10. Conclure en montrant que pour tous $f \in \mathrm{E}_n$ et $k \in [\![1; n]\!]$, on a

$$\mathrm{M}_k(f) \leqslant 2^{\frac{k(n-k)}{2}} \mathrm{M}_0(f)^{\frac{n-k}{n}} \mathrm{M}_n(f)^{\frac{k}{n}}.$$

On pourra s'aider de l'inclusion de la question 7.

DM 1 - éléments de solution

Sujet A

1.A) Soit n un entier supérieur à 2

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n\times n\times n\times\cdots\times n}{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}$$
$$\geqslant n\times \overbrace{\frac{n\times\cdots\times n}{2\times\cdots\times n}}^{\geqslant 1} \geqslant n.$$

Ainsi, $$\frac{n^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

La série diverge grossièrement.

1.B) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$4^{\ln(n)} = \mathrm{e}^{\ln(4)\ln(n)} = n^{\ln(4)}.$$

Ainsi, $$\frac{\ln(n)^4}{4^{\ln(n)}} = \frac{\ln(n)^4}{n^{\ln(4)}}.$$

Précisons de plus que

$$\ln(4) = 2\ln(2) \simeq 2\times 0,69 \simeq 1,4$$

À l'aide des croissances comparées, on vérifie :

$$\frac{\ln(n)^4}{4^{\ln(n)}} = o\left(\frac{1}{n^{1,2}}\right)$$

→ La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{1,2}}$ est convergente (car $1,2>1$).
→ La série $\sum \frac{1}{n^{1,2}}$ est à termes positifs.
→ Le critère de négligeabilité s'applique, la série $\sum \ln(n)^4/4^{\ln(n)}$ est convergente.

1.C) Procédons par disjonction des cas :

→ Pour $\alpha\leqslant 0$.
$$\frac{\ln(n)}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$
On a donc une divergence grossière de la série.

→ Pour $\alpha\in]0;1]$, on peut remarquer que

$$\frac{\ln(n)}{n^\alpha} \geqslant \frac{1}{n}.$$

La série harmonique $\sum 1/n$ est divergente. Par la contraposée du critère de majoration, la série est divergente.

→ Pour $\alpha>1$. Posons $\tilde\alpha = (1+\alpha)/2$. Notons que $\tilde\alpha>1$ et par les croissances comparées

$$\frac{\ln(n)}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{n^{\tilde\alpha}}\right).$$

Car par les croissances comparées

$$\frac{\ln(n)/n^\alpha}{1/n^{\tilde\alpha}} = \frac{\ln(n)}{n^{\alpha-\tilde\alpha}} = \frac{\ln(n)}{n^{(\alpha-1)/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

La série de Riemann $\sum 1/n^{\tilde\alpha}$ est convergente donc par le critère de négligeabilité, la série est convergente.

En résumé, la série $\sum \ln(n)/n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

2.A) Soit $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{\ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)}{\ln(n+2)\cdot\ln(n+3)} = \frac{\ln(n+3)-\ln(n+2)}{\ln(n+2)\cdot\ln(n+3)}$$
$$= \frac{1}{\ln(n+2)} - \frac{1}{\ln(n+3)}$$

Calculons les sommes partielles.
Soit $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$, Il vient :

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{\ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)}{\ln(n+2)\cdot\ln(n+3)} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\ln(n+2)} - \frac{1}{\ln(n+3)}$$
$$= \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(\mathrm{N}+3)}.$$

On a donc convergence et l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)}{\ln(n+2)\cdot\ln(n=3)} = \frac{1}{\ln(2)}.$$

2.B) Soit $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{n+(-1)^n}{3^n} = n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

On reconnaît les termes généraux des séries de type géométrique et géométrique dérivée de raison respective $1/3$ et $-1/3$ (dans $]-1;1[$). On a donc la convergence avec :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+(-1)^n}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1-1/3)^2} + \frac{1}{(1+1/3)}$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+(-1)^n}{3^n} = \frac{3}{2}.$$

2.C) Notons que pour $n\in\mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!}$$
$$= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

D'après la formule du binôme de Newton

$$a_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} = \frac{1}{n!}(1+1)^n = \frac{2^n}{n!}.$$

La série $\sum 2^n/n!$ est la série exponentielle de paramètre 2, il y a donc convergence et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!} = \mathrm{e}^2.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \alpha\sum_{k=0}^{n} u_k + \beta\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} + \gamma\sum_{k=0}^{n} u_{k+2}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \Big(\sum_{k=2}^{n} u_k\Big)$$
$$\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} = u_1 + \Big(\sum_{k=2}^{n} u_k\Big) + u_{n+1}$$
$$\sum_{k=0}^{n} u_{k+2} = \Big(\sum_{k=2}^{n} u_k\Big) + u_{n+1} + u_{n+2}.$$

Dès lors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} v_k =& \alpha(u_0+u_1) + \beta(u_1+u_{n+1})\\ &+ \gamma(u_{n+1}+u_{n+2}) + (\alpha+\beta+\gamma)\sum_{k=2}^{n} u_k\\ =& \alpha u_0 + (\alpha+\beta)u_1\\ &+ (\beta+\gamma)u_{n+1} + \gamma u_{n+2}.\end{aligned}$$

Comme $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on a la convergence

$$\sum_{k=0}^{n} v_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha u_0 + \underbrace{(\alpha+\beta)}_{=-\gamma} u_1.$$

C'est la définition de la convergence de la série $\sum v_k$ avec

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_k = \alpha u_0 - \gamma u_1.$$

– – –

Le sujet qui suit est extrait du sujet EML 2006. Seule la partie Python est rajoutée au sujet initial.
Il existe bien des théorèmes de dérivation des intégrales à paramètres (hors-programme en ECG). La démarche proposée est caractéristique et présente dans de nombreux sujets sur ce thème. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, on prouve la dérivabilité en revenant à la définition du nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions

$$t \mapsto \sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2} \quad \text{et} \quad t \mapsto \cos(xt)t\mathrm{e}^{-t^2}$$

sont continues sur $\mathbb{R}^+$, on a donc deux intégrales généralisées en $+\infty$.
Comme les fonctions sinus et cosinus sont encadrées par ± 1, on a pour tout $t \in [0,+\infty[$,

$$\left|\sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}, \quad \left|\cos(xt)t\mathrm{e}^{-t^2}\right| \leqslant t\mathrm{e}^{-t^2}.$$

Par les croissances comparées

$$\mathrm{e}^{-t^2} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{-t^2} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

D'où

$$\left|\sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\right| = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad \left|\cos(xt)t\mathrm{e}^{-t^2}\right| = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} 1/t^2\,\mathrm{d}t$ est convergente et l'intégrande est positive. Par le critère de négligeabilité, on a bien convergence en $+\infty$ des intégrales généralisées.

5. Soit $f : t \mapsto \sin t$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
Sachant que $f'(t) = \cos(t)$ et $f''(t) = -\sin(t)$, on a

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|f''(t)\right| = 1.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 appliquée à f entre a et $a+\lambda$ donne

$$\left|f(a+\lambda) - f(a) - \lambda f'(a)\right| \leqslant \frac{\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|f''(t)\right|}{2!}\lambda^2 \leqslant \frac{\lambda^2}{2}.$$

D'où le résultat.

6.a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale dans le cas convergent

$$\frac{\mathrm{S}(x+h)-\mathrm{S}(x)}{h} - \mathrm{C}(x) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(xt+ht)-\sin(xt)}{h} - t\cos(xt)\right)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

D'après l'inégalité triangulaire et la question précédente, on a pour tout $(t,h) \in \mathbb{R}^2$,

$$|\sin(xt+ht) - \sin(xt) - ht\cos(xt)| \leqslant \frac{h^2t^2}{2}.$$

D'où

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\mathrm{S}(x+h)-\mathrm{S}(x)}{h} - \mathrm{C}(x)\right|\\ &\leqslant \int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin(xt+xh)-\sin(xt)-ht\cos(xt)}{h}\right|\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_0^{+\infty}\frac{h^2t^2}{2h}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{h}{2}\mathrm{Cste}.\end{aligned}$$

On en déduit la convergence et la limite par le théorème d'encadrement.

6.b) On a donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{S}(x+h)-\mathrm{S}(x)}{h} = \mathrm{C}(x).$$

C'est la définition du nombre dérivé. La fonction S est dérivable en x et $\mathrm{S}'(x) = \mathrm{C}(x)$.

7. Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_*^+$. Intégrons par parties avec les fonctions u, v de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(t) = \cos(xt), \qquad v(t) = -\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}.$$

Il vient

$$\begin{aligned}\int_0^{\mathrm{A}} \cos(xt)\, t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t &= \left[-\cos(xt)\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}\right]_0^{\mathrm{A}} - \int_0^{\mathrm{A}} x\sin(xt)\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{A}^2}}{2}\cos(x\mathrm{A}) - \frac{x}{2}\int_0^{\mathrm{A}} \sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque $\mathrm{A} \to +\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{C}(x) &= \int_0^{+\infty} \cos(xt)\, t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2} - \frac{x}{2}\int_0^{+\infty} \sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\\ \mathrm{C}(x) &= \frac{1}{2} - \frac{x}{2}\mathrm{S}(x).\end{aligned}$$

8. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}}\mathrm{S}(x) - \int_0^x \mathrm{e}^{t^2/4}\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{t^2/4}\,\mathrm{d}t$ est la primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{t^2/4}$ qui s'annule en 0. Par les théorèmes généraux, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= x\mathrm{e}^{x^2/4}\mathrm{S}(x) + 2\mathrm{e}^{x^2/4}\mathrm{S}'(x) - \mathrm{e}^{x^2/4}\\ &= \left(x\mathrm{S}(x) + 2\mathrm{S}'(x) - 1\right)\mathrm{e}^{x^2/4}\\ \varphi'(x) &= \underbrace{\left(x\mathrm{S}(x) + 2\mathrm{C}(x) - 1\right)}_{=0}\mathrm{e}^{x^2/4} = 0.\end{aligned}$$

La fonction φ est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Comme

$$\varphi(0) = 2\mathrm{S}(0) - \int_0^0 \mathrm{e}^{t^2/4}\,\mathrm{d}t = 0.$$

La fonction φ est la fonction nulle. Ce qui conclut.

9. En divisant la relation obtenue à la question précédente par $\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}} \neq 0$, il vient

$$\mathrm{S}(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t.$$

Sachant que $\mathrm{C}(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}\mathrm{S}(x)$, on trouve

$$\mathrm{C}(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t.$$

10.a)

```
import numpy as np

def Approx(x):
    n=100*(int(abs(x))+1)
    # Nbre de rectangles
    S=0
    pas  = x/n
    # Largeur du rectangle
    for k in range(n):
        S += np.exp((k*pas)**2/4)
        # On somme les hauteurs
    S=pas*S
    return S
```

10.b) Dans un premier temps, on calcule les images $\mathrm{S}(x)$ et $\mathrm{C}(x)$ pour x variant régulièrement entre -10 et 10. On stocke les valeurs dans deux matrices ligne. On affiche dans un second temps les graphes à l'aide de la commande `plot`.

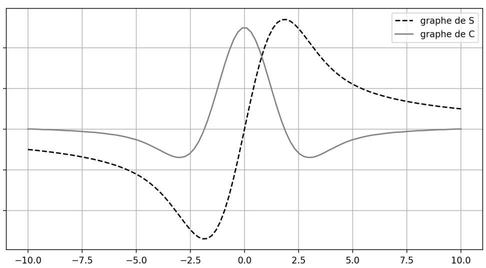
```
import matplotlib.pyplot as plt

x=np.linspace(-10,10,100)
S=np.zeros(100)
C=np.zeros(100)
for i in range(100):
    S[i]=np.exp(-x[i]**2/4)*Approx(x[i])/2
    C[i]=(1-x[i]*S[i])/2

plt.plot(x,S)
plt.plot(x,C)
plt.show()

# Facultatif avec des options d'affichage

plt.clf()
plt.grid()
plt.plot(x,S,'--',color='k',label='graphe
    de S')
plt.plot(x,C,'grey',label='graphe de C')
plt.legend()
plt.show()
```



Noter la parité de la fonction C *et l'imparité de* S.

Sujet *
Inégalités de Kolmogorov

1. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre x et $x+h$ d'une part, entre x et $x-h$ d'autre part avec M_2 comme majorant de $|f''|$ sur $\mathbb{R}$. On obtient directement le résultat.

2. Soit $h \in \mathbb{R}_*^+$. La première inégalité de la question 1 s'écrit aussi

$$-\frac{\mathrm{M}_2}{2}h^2 \leqslant -f(x+h) + f(x) + hf'(x) \leqslant \frac{\mathrm{M}_2}{2}h^2.$$

La seconde inégalité de la question 1 donne aussi

$$-\frac{\mathrm{M}_2}{2}h^2 \leqslant f(x-h) - f(x) + hf'(x) \leqslant \frac{\mathrm{M}_2}{2}h^2.$$

En additionnant membre à membre, il vient

$$-\mathrm{M}_2h^2 \leqslant f(x-h) - f(x+h) + 2hf'(x) \leqslant \mathrm{M}_2h^2.$$

D'où $\qquad \left|f(x-h) - f(x+h) + 2hf'(x)\right| \leqslant \mathrm{M}_2h^2.$

On rappelle aussi que l'inégalité triangulaire implique

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad |a| \leqslant |a-b| + |b| \qquad (\bullet)$$

Dans notre cas, on trouve

$$\begin{aligned} &\left|2hf'(x)\right| - |f(x-h) - f(x+h)| \\ \leqslant &\left|f(x-h) - f(x+h) + 2hf'(x)\right| \\ \leqslant &\mathrm{M}_2 h^2. \end{aligned}$$

Avec $h > 0$,

$$\begin{aligned} 2h\left|f'(x)\right| &\leqslant \mathrm{M}_2 h^2 + |f(x-h) - f(x+h)| \\ &\leqslant \mathrm{M}_2 h^2 + |f(x-h)| + |f(x+h)| \\ &\leqslant \mathrm{M}_2 h^2 + 2\mathrm{M}_0. \end{aligned}$$

On conclut en divisant par $2h$ qui est strictement positif.

3. Par exemple, pour $h = 1$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left|f'(x)\right| \leqslant \mathrm{M}_0 + \frac{\mathrm{M}_2}{2}.$$

On en déduit que f' est bornée. Dès lors, pour $f \in \mathrm{E}_2$, $f \in \mathrm{E}_1$. On a bien l'inclusion

$$\mathrm{E}_2 \subset \mathrm{E}_1.$$

Affinons maintenant la borne avec un meilleur choix de réel h.
Pour cela, on considère la fonction

$$\varphi : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \frac{\mathrm{M}_0}{x} + \frac{\mathrm{M}_2}{2} x.$$

L'application φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+*$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\varphi'(x) = -\frac{\mathrm{M}_0}{x^2} + \frac{\mathrm{M}_2}{2} = \frac{\mathrm{M}_2 x^2 - 2\mathrm{M}_0}{2x^2}.$$

D'où $\qquad \varphi'(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant \sqrt{\dfrac{2\mathrm{M}_0}{\mathrm{M}_2}}$

avec égalité $\varphi'(x) = 0$ si et seulement si $x = \sqrt{2\mathrm{M}_0/\mathrm{M}_2}$.
La fonction φ est décroissante sur l'intervalle $]0, \sqrt{2\mathrm{M}_0/\mathrm{M}_2}]$, croissante sur l'intervalle $[\sqrt{2\mathrm{M}_0/\mathrm{M}_2}, +\infty[$.
On en déduit que φ admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$, égal à

$$\varphi\left(\sqrt{2\mathrm{M}_0/\mathrm{M}_2}\right) = \sqrt{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2/2} + \sqrt{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2/2} = \sqrt{2\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}.$$

L'inégalité de la question 2. étant valable pour tout $h \in \mathbb{R}_*^+$, on peut donc faire le choix $h = \sqrt{2\mathrm{M}_0/\mathrm{M}_2}$. Il vient alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left|f'(x)\right| \leqslant \sqrt{2\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}.$$

C'est-à-dire

$$\mathrm{M}_1 \leqslant \sqrt{2\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}.$$

4. Si on note $m_{i,j}$ le coefficient en position (i,j) de M_H, on a

$$m_{i,j+1} = \frac{h_i}{j+1} m_{i,j}.$$

```
import numpy as np

def matrice(H):
    m=len(H)
    M=np.zeros([m,m])
    # On utilise la relation de récurrence
    # entre M[i,j] et M[i,j-1]
    for i in range(m):
        p=1
        M[i,0]=H[i]
        for j in range(1,m):
            M[i,j]=M[i,j-1]*H[i]/(p*(j+1))
    return M


def matriceBis(H):
    m=len(H)
    M=np.zeros([m,m])

    # On calcule d'abord les factoriels
    Facto=np.ones(m)
    for k in range(1,m):
        Facto[k]=(k+1)*Facto[k-1]

    # Pour éviter de calculer les
        puissances
    # de H[i] plusieurs fois, on utilise
        la
    # boucle

    for i in range(m):
        hi=H[i]
        for j in range(m):
            M[i,j]=hi/Facto[j]
            hi*=H[i]
    return M

H=np.array([1,2,3])

>>> matrice(H)
array([[1.        , 0.5       ,
    0.16666667],
      [2.        , 2.        ,
        1.33333333],
      [3.        , 4.5       , 4.5
        ]])
```

5. Raisonnons par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$ Si l'une des composantes de H est nulle, la matrice M_H contient une ligne nulle. La matrice ne peut être de rang maximal, elle n'est pas inversible. De même, si au moins deux composantes sont identiques alors il y a au moins deux lignes identiques et la matrice n'est pas inversible. Par contraposée, si la matrice M_H est inversible alors les composantes de M_H sont non nuls et deux à deux distinctes.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que H ne contienne aucune composante nulle et qu'elles sont deux à deux distinctes. Justifions que le noyau de la matrice carrée M_H est trivial pour justifier son inversibilité.
Soit $\mathrm{X} = {}^t\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ tel que :

$$\mathrm{M}_\mathrm{H}\mathrm{X} = 0_{n-1,1}.$$

Par définition du produit matriciel

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \qquad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{{h_i}^k}{k!} a_k = 0.$$

Comme $h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$ sont non nuls

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \qquad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{{h_i}^{k-1}}{k!} a_k = 0.$$

Considérons alors le polynôme P défini par

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{k!} x^{k-1}$$

de sorte que les réels h_i soient racines du polynôme P. Ainsi P est un polynôme de degré au plus $n-2$ admettant au moins $n-1$ racines. C'est donc le polynôme nul. Dès lors, ses coefficients a_k sont tous nuls. La matrice X est nulle et $\mathrm{M_H}$ est inversible.

6. Par définition du produit matriciel, pour tous $k \in [\![1; n-1]\!]$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{F}_k(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{{h_k}^i}{i!} f^{(i)}(x).$$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à $f \in \mathscr{C}^n$ à l'ordre $n-1$ entre $x + h_k$ et x

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(x+h_k\right) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{{h_k}^i}{i!} f^{(i)}(x) \right| \\
&\leqslant \frac{\left|x+h_k-x\right|^n}{n!} \max_{t \in [x, x+h_k]} \left| f^{(n)}(t) \right| \\
&\leqslant \frac{\left|h_k\right|^n}{n!} \mathrm{M}_n.
\end{aligned}$$

Si on introduit F_k, on trouve

$$\left| f\left(x+h_k\right) - f(x) - \mathrm{F}_k(x) \right| \leqslant \frac{\left|h_k\right|^n}{n!} \mathrm{M}_n$$

D'après l'inégalité triangulaire (voir la relation (•)), il vient

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{F}_k(x)\right| &\leqslant \left| f\left(x+h_k\right) + f(x) \right| + \left| f\left(x+h_k\right) - f(x) - \mathrm{F}_k(x) \right| \\
&\leqslant \left| f\left(x+h_k\right) \right| + |f(x)| + \left| f\left(x+h_k\right) - f(x) - \mathrm{F}_k(x) \right| \\
&\leqslant \mathrm{M}_0 + \mathrm{M}_0 + \frac{\left|h_k\right|^n}{n!} \mathrm{M}_n = 2\mathrm{M}_0 + \frac{\left|h_k\right|^n}{n!} \mathrm{M}_n.
\end{aligned}$$

7. Notons $m_{i,j}$, le coefficient en position (i, j) de $\mathrm{M_H}^{-1}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. À partir de la définition

$$\begin{bmatrix} \mathrm{F}_1(x) \\ \mathrm{F}_2(x) \\ \vdots \\ \mathrm{F}_{n-1}(x) \end{bmatrix} = \mathrm{M_H} \begin{bmatrix} f'(x) \\ f''(x) \\ \vdots \\ f^{n-1}(x) \end{bmatrix},$$

on a $$\begin{bmatrix} f'(x) \\ f''(x) \\ \vdots \\ f^{n-1}(x) \end{bmatrix} = \mathrm{M_H}^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{F}_1(x) \\ \mathrm{F}_2(x) \\ \vdots \\ \mathrm{F}_{n-1}(x) \end{bmatrix}.$$

C'est-à-dire, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} m_{ki} \mathrm{F}_i(x).$$

Alors pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| f^{(k)}(x) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \left|m_{ki}\right| \left|\mathrm{F}_i(x)\right|.$$

Avec la majoration précédente

$$\left| f^{(k)}(x) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \left|m_{ki}\right| \left(2\mathrm{M}_0 + \frac{\left|h_i\right|^n}{n!} \mathrm{M}_n \right).$$

Comme ce majorant ne dépend pas du choix du réel x, la fonction $f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Dit autrement, pour $k \in [\![1; n]\!]$, si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ telle que f et $f^{(n)}$ soit bornée sur $\mathbb{R}$, alors f est une aussi fonction de classe $\mathscr{C}^k$ telle que f et $f^{(k)}$ soit bornée sur $\mathbb{R}$. On a bien l'inclusion

$$\mathrm{E}_n \subset \mathrm{E}_k.$$

8. Raisonnons par contraposée en considérant $f \in \mathrm{E}_n$ telle que

$$\mathrm{M}_n(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f^{(n)}(x) \right| = 0$$

C'est-à-dire : $\qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = 0.$

Dans ce cas, f est une fonction polynomiale (de degré au plus n). Or f est aussi bornée et les seules fonctions polynomiales bornées sont les fonctions constantes. Donc f est constante.
Finalement, si f n'est pas constante, $\mathrm{M}_n(f) \neq 0$ puis $\mathrm{M}_n(f) > 0$ car la quantité $\mathrm{M}_n(f)$ est toujours positive.

9. Prouvons par récurrence que la propriété :

$$\mathscr{P}(n) : \quad \forall f \in \mathrm{E}_n, \quad \mathrm{M}_{n-1}(f) \leqslant 2^{(n-1)/2} \mathrm{M}_0(f)^{1/n} \mathrm{M}_n(f)^{1-1/n}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

→ *Initialisation.* La propriété $\mathscr{P}(2)$ a été démontrée à la question 3.

→ *Hérédité.* Soit n un entier supérieur à 2. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Soit $f \in \mathrm{E}_{n+1}$. D'après la question 3 avec $f^{(n-1)}$ au lieu de f

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_n(f)^2 = \mathrm{M}_1\left(f^{(n-1)}\right)^2 &\leqslant 2\mathrm{M}_0\left(f^{(n-1)}\right)\mathrm{M}_2\left(f^{(n-1)}\right) \\
&\leqslant 2\mathrm{M}_{n-1}(f)\mathrm{M}_{n+1}(f).
\end{aligned}$$

On poursuit la majoration avec L'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_n(f)^2 &\leqslant 2 \cdot 2^{(n-1)/2} \mathrm{M}_0(f)^{1/n} \mathrm{M}_n(f)^{1-1/n} \mathrm{M}_{n+1}(f) \\
&\leqslant 2^{(n+1)/2} \mathrm{M}_0(f)^{1/n} \mathrm{M}_n(f)^{1-1/n} \mathrm{M}_{n+1}(f).
\end{aligned}$$

Si f n'est pas constante alors $\mathrm{M}_n(f) > 0$ et en divisant par $\mathrm{M}_n(f)^{1-1/n}$

$$\mathrm{M}_n(f)^{(n+1)/n} = \mathrm{M}_n(f)^{1+1/n} \leqslant 2^{(n+1)/2} \mathrm{M}_{n+1}(f) \mathrm{M}_0(f)^{1/n}.$$

En appliquant $t \mapsto t^{n/(n+1)}$ croissante sur $\mathbb{R}^+$.

$$\mathrm{M}_n(f) \leqslant 2^{n/2} \mathrm{M}_0(f)^{1/n+1} \mathrm{M}_{n+1}(f)^{n/(n+1)}$$

Notons que cette inégalité reste valable si f est constante.
La propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie si $\mathscr{P}(n)$ l'est.

→ *Conclusion.* Pour tout $n \geqslant 2$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Procédons par récurrence descendante pour prouver que la propriété

$$\mathscr{P}(k): \quad \forall f \in \mathrm{E}_n, \quad \mathrm{M}_k(f) \leqslant 2^{\frac{k(n-k)}{2}} \mathrm{M}_0(f)^{\frac{n-k}{n}} \mathrm{M}_n(f)^{\frac{k}{n}}$$

est vraie pour tout $k \in [\![1; n]\!]$.

→ *Initialisation.* Le cas $k = n$ est direct donc $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

→ *Hérédité.* Soit $k \in [\![2; n]\!]$ et supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie pour montrer que $\mathscr{P}(k-1)$ est vraie.
Soit $f \in \mathrm{E}_n$. D'après la question 7, on a $f \in \mathrm{E}_n \subset \mathrm{E}_k$, on peut donc appliquer le résultat de la question précédente à $f \in \mathrm{E}_k$ $(n \leftarrow k)$:

$$\mathrm{M}_{k-1}(f) \leqslant 2^{\frac{k-1}{2}} \mathrm{M}_0(f)^{\frac{1}{k}} \mathrm{M}_k(f)^{\frac{k-1}{k}},$$

puis $$\mathrm{M}_{k-1}(f)^{\frac{k}{k-1}} \leqslant 2^{\frac{k}{2}} \mathrm{M}_0(f)^{\frac{1}{k-1}} \mathrm{M}_k(f).$$

Par hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}_{k-1}(f)^{\frac{k}{k-1}} \\
&\leqslant 2^{\frac{k}{2}} \mathrm{M}_0(f)^{\frac{1}{k-1}} \cdot 2^{\frac{k(n-k)}{2}} \mathrm{M}_0(f)^{\frac{n-k}{n}} \mathrm{M}_n(f)^{\frac{k}{n}} \\
&\leqslant 2^{\frac{k(n-(k-1))}{2}} \mathrm{M}_0(f)^{\frac{1}{k-1}+\frac{n-k}{n}} \mathrm{M}_n(f)^{\frac{k}{n}}.
\end{aligned}$$

Or
$$\begin{aligned}
\frac{k-1}{k}\left(\frac{1}{k-1}+\frac{n-k}{n}\right) &= \frac{1}{k}+\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{k}{n}\right) \\
&= \frac{1}{k}+1-\frac{1}{k}-\frac{k}{n}+\frac{1}{n} \\
&= \frac{n-(k-1)}{n}
\end{aligned}$$

En appliquant $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto t^{(k-1)/k}$ croissante

$$\mathrm{M}_{k-1}(f) \leqslant 2^{\frac{(k-1)(n-(k-1))}{2}} \mathrm{M}_0(f)^{\frac{n-(k-1)}{n}} \mathrm{M}_n(f)^{\frac{k-1}{n}}.$$

Ce qui prouve $\mathscr{P}(k-1)$ sous réserve de $\mathscr{P}(k)$.

→ *Conclusion.* Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.