DM 2 - sujet A

THÈME : VALEURS/VECTEURS PROPRES, INFORMATIQUE

Exercice I : racine n-ième d'une matrice à paramètre

Soient E un espace vectoriel et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, une base de E. Pour tout réel α, on définit la matrice

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & \alpha+1 \end{bmatrix}.$$

On note φ_α, l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A_α.

1. Vérifier que 1 est valeur propre de A_α. Expliciter une base de $E_1(\alpha)$, le sous-espace propre de A_α pour la valeur propre 1.
On pourra distinguer trois cas suivant la valeur de α.

2. On pose

$$\varepsilon_1 = e_1 + e_2 - e_3, \quad \varepsilon_2 = e_1 + e_2 - 2e_3 \quad \text{et} \quad F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

Vérifier que F est un plan stable par φ_α.
On note $\tilde{\varphi}_\alpha$, l'endomorphisme de F, obtenu par restriction de φ_α à F.

3. Expliciter $\tilde{A}_\alpha$, la matrice de $\tilde{\varphi}_\alpha$ dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que φ_α admet $\alpha - 1$ comme valeur propre et trouver un vecteur propre ε_3 (indépendant de α) pour cette valeur propre.

5. Donner B_α, la matrice de φ_α dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Préciser ${B_\alpha}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. En déduire que si $\alpha \geqslant 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C^n = A_\alpha$.

Exercice II : étude spectrale d'un endomorphisme de $\mathscr{C}^0([0;1])$

Soit E, l'espace vectoriel constitué des fonctions continues sur $[0;1]$. On définit l'application T qui à toute fonction $f \in E$ renvoie la fonction $T(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad T(f)(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

On note aussi E_n, l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $[0;1]$ de degré au plus n.

7. Justifier que T est un endomorphisme de E.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que E_n est stable par T.
On note T_n l'endomorphisme de E_n obtenu par restriction de T à E_n.

9. Expliciter la matrice de T_n dans la base canonique. En déduire le spectre de T_n. Que peut-on en déduire sur le spectre de T ?

10. Soit $f \in \mathrm{Ker}(T - 2\,\mathrm{id}_E)$. On note

$$m = \min_{x \in [0,1]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \max_{x \in [0,1]} f(x).$$

Soient $x_0, x_1 \in [0,1]$ tels que $m = f(x_0)$ et $f(x_1) = M$.

- **a)** Montrer que : $f(x_0/2) = m$.
- **b)** Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(2^{-n}x_0) = m$.
- **c)** En déduire que $m = f(0)$. Que dire pour M ?
- **d)** Conclure en montrant que l'espace propre pour la valeur propre 2 est exactement l'ensemble des fonctions constantes sur $[0;1]$.

Exercice III : Nombre de Hardy-Ramanujan

11. Écrire un programme qui prend en argument un entier naturel n non nul et renvoie le nombre de façons (lorsque cela est possible) de l'écrire comme la somme de deux cubes

$$n = a^3 + b^3 \quad \text{avec} \quad (a, b) \in \mathbb{N}^2, \quad a \leqslant b.$$

12. Donner le plus petit nombre naturel qui peut s'écrire de comme somme de deux cubes de deux manière différentes.

DM 2 - sujet *

THÈME : VALEURS/VECTEURS PROPRES, RÉVISIONS ANALYSE

Soit E, l'espace vectoriel constitué des fonctions continues sur $[0;1]$. On définit l'application T qui à toute fonction $f \in \mathrm{E}$ renvoie la fonction $\mathrm{T}(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{T}(f)(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

On note aussi E_n, l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $[0;1]$ de degré au plus n.

Étude spectrale de T

1. Justifier que T est un endomorphisme de E.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que E_n est stable par T.
   On note T_n l'endomorphisme de E_n obtenu par restriction de T à E_n.
3. Expliciter la matrice de T_n dans la base canonique. En déduire le spectre de T_n. Que peut-on en déduire sur le spectre de T ?
4. Soit $f \in \mathrm{Ker}(\mathrm{T} - 2\,\mathrm{id}_\mathrm{E})$. On note

$$m = \min_{x \in [0,1]} f(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{M} = \max_{x \in [0,1]} f(x).$$

   Soient $x_0, x_1 \in [0,1]$ tels que $m = f(x_0)$ et $f(x_1) = \mathrm{M}$.
   a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(2^{-n}x_0) = m$.
   b) En déduire que $m = f(0)$. Que dire pour M ?
   c) Conclure en montrant que l'espace propre pour la valeur propre 2 est exactement l'ensemble des fonctions constantes.

Application au développement eulérien de la fonction cotangente

On pose $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $\varphi, \psi : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{D}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} \quad \text{et} \quad \psi(x) = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}.$$

- **Premières propriétés de φ**

5. Justifier que l'application φ est bien posée sur $\mathbb{D}$.
6. Vérifier que l'application φ est impaire et 1-périodique.
   On pourra montrer dans un premier temps que

$$\forall x \in \mathbb{D}, \qquad \frac{2x}{n^2 - x^2} = \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}.$$

7. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x}\right) = 0.$
   On admet dans la suite que la fonction φ est continue sur $\mathbb{D}$.
8. Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{D}, \qquad \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\varphi(x).$$

- **Premières propriétés de ψ**

9. Vérifier que ψ est bien posée sur $\mathbb{D}$, impaire et 1-périodique.

10. Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{D}, \qquad \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\psi(x).$$

On pourra reprendre la relation de la question 6.

11. Montrer que : $\psi(x) - \frac{1}{x} \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{\pi^2}{3} x$.

- **Conclusion sur le développement eulérien**

12. Montrer que $\varphi - \psi$ se prolonge par continuité sur $[0;1]$.

13. Conclure en montrant que $\varphi = \psi$.

On effectuant un changement de variable, on vient de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - \pi^2 n^2}.$$

- **Un peu de Python**

Pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, on définit $\varphi_{\mathrm{N}} : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{D}, \qquad \varphi_{\mathrm{N}}(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{2x}{n^2 - x^2}.$$

14. Écrire un programme qui prend en argument N et affiche les graphes de φ_{N} et ψ sur $[0.05; 0.95]$. Tester pour $\mathrm{N} = 3$, $\mathrm{N} = 5$.