

Révisions et compléments sur les variables aléatoires

Le hasard ne profite qu'aux esprits préparés.

LOUIS PASTEUR (1822-1895)

1 Rappels et compléments sur les séries

1.1 Définitions

DÉFINITION (RAPPEL)

série numérique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. La **série** associée à $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

On dit que la série converge si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie.

 **Attention.** Il ne faut pas confondre :

- $\sum u_n$: la série de terme général u_n ;
- $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$: la somme partielle d'ordre n de la série ;
- $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$: la somme de la série, i.e, sous réserve de convergence, la limite des sommes partielles ;
- $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$: le reste d'ordre n de la série si cette dernière est convergente.

Exercice 1



Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier n , un réel x non nul et renvoie la somme partielle d'ordre n de la série $\sum 1/\text{sh}(kx)$. Que dire de la convergence ?

La fonction sh est la fonction sinus hyperbolique définie sur \mathbb{R} par $\text{sh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$.

D'après EDHEC 2022

p. 23

Remarques.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = S_n - S_{n-1}$.
- Si la série de terme général u_n converge, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

La série harmonique $\sum 1/n$ montre que la réciproque est fautive.

- Soient u et v deux suites réelles telles que les séries de termes généraux u_n et v_n convergent. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ converge et

$$\forall n_0 \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=n_0}^{+\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k.$$

THÉORÈME

convergence absolue

- On dit que la série de terme général u_n **converge absolument** si la série de terme général $|u_n|$ converge.
- Si une série converge absolument, **alors** elle converge.

Remarque. La réciproque est fautive. La série $\sum (-1)^n / n$ donne un contre exemple.

On admet l'énoncé suivant qui expliquera la condition de convergence absolue dans la définition de l'espérance.

THÉORÈME

famille sommable

Soit I un ensemble dénombrable, indexé par \mathbb{N} sous la forme $I = \{\varphi(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ où φ est une bijection de \mathbb{N} dans I .

Si la série $\sum u_{\varphi(n)}$ converge absolument,

alors sa somme est indépendante de l'indexation φ . On peut donc noter sans ambiguïté $\sum_{i \in I} u_i$ cette somme.

Résultat admis.

1.2 Séries de références

THÉORÈME

séries géométriques, série exponentielle

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Les séries de terme généraux x^k , kx^{k-1} et $k(k-1)x^{k-2}$ sont convergentes si et seulement si $|x| < 1$. Dans ce cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

- Pour tout réel x , la série de terme général $\frac{x^k}{k!}$ est convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$.

- On appelle **série de Riemann**, une série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Cette série est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

1.3 Critères de convergence pour les séries à termes positifs

THÉORÈME

critère de comparaison

Soient u et v deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang, $0 \leq u_n \leq v_n$.

- Si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n aussi.
- Si la série de terme général u_n diverge, alors la série de terme général v_n aussi.

Exercice 2



Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

- Soit $\sum u_k$ une série à termes positifs. On suppose que la série $\sum k^2 u_k^2$ est convergente.
 - Montrer que la série $\sum u_k$ est convergente.
 - Étudier la réciproque.
- Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente. Justifier la convergence des séries :

p. 24

$$\sum \frac{3u_n}{1+u_n^2}, \quad \sum \ln(1+u_n) \quad \text{et} \quad \sum \int_0^{u_n} \frac{dt}{1+t^4}.$$

THÉORÈME

critères de négligeabilité et d'équivalence

Soient u et v deux suites réelles.

- Si $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow u_n = o(v_n) \\ \rightarrow v \text{ est positive à partir d'un certain rang} \\ \rightarrow \text{la série de terme général } v_n \text{ converge,} \end{array} \right.$

alors la série de terme général u_n converge.

- Si $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow u_n \sim v_n \\ \rightarrow v \text{ est positive à partir d'un certain rang,} \end{array} \right.$

alors les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

Remarque. On a des critères analogues si v est négative à partir d'un certain rang.



Attention. Il ne faut pas oublier les conditions de signes lors de l'application de ces théorèmes.

Exemples

- Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\bullet \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{3}{\sqrt{n}} \right); \quad \bullet \sum_{n \geq 1} \frac{n^3}{2^n}; \quad \bullet \sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{n!}; \quad \bullet \sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)^4}{4^{\ln(n)}}.$$

p. 24

- Discuter, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, de la nature de la série :

$$\bullet \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{1+2+\dots+n} \right)^\alpha; \quad \bullet \sum_{n \geq 1} \left(\sqrt{n+7} - \sqrt{n} \right)^\alpha \quad \bullet \sum \arctan \left(\frac{n^\alpha}{1+n} \right).$$

Exercice 3



2

Révision sur les probabilités

2.1 L'application probabilité

On représente le résultat d'une expérience aléatoire comme un élément ω de l'ensemble Ω de tous les résultats possibles. Dans la suite, \mathcal{A} est un ensemble composé de partie de Ω ($\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$). Il vérifie

- $\Omega \in \mathcal{A}$.
- \mathcal{A} est stable par passage au complémentaire : $\forall A \in \mathcal{A}, \quad \bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.
- \mathcal{A} est stable par union et intersection finie ou dénombrable : si I est un ensemble fini ou dénombrable et si pour tout $i \in I, A_i \in \mathcal{A}$, alors

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}.$$

Vocabulaire. Les éléments de \mathcal{A} sont des événements. Autrement dit, \mathcal{A} est l'ensemble des événements. On parle aussi de tribu ou de σ -algèbre.

DÉFINITION

l'application probabilité

Soient Ω , un univers des possibles et \mathcal{A} un ensemble d'événements.

Une **probabilité** est une application \mathbf{P} réelle définie sur \mathcal{A} vérifiant les conditions suivantes.

— $\mathbf{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$;

— $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;

— \mathbf{P} est σ -**additive** :

Pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ finie ou dénombrable d'événements deux à deux disjoints,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mathbf{P}(A_i).$$

Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathbf{P}(A)$ est appelée **la probabilité de l'événement A**.

Remarque. Dans le cas où l'ensemble des indices I est dénombrable (par exemple, \mathbb{N}), la définition suppose implicitement la convergence de la série $\sum_{i \in I} \mathbf{P}(A_i)$.

Vocabulaire.

- La donnée d'un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ où Ω est un univers des possibles, \mathcal{A} un ensemble d'événements sur Ω et \mathbf{P} une probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) , définit un **espace probabilisé**.
- Un événement de probabilité nulle est dit **négligeable**.
- Un événement de probabilité 1 est dit **presque-sûr**.

THÉORÈME

de la limite monotone

Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'événements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

- Si la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante** pour l'inclusion (c'est-à-dire, $\forall i \in \mathbb{N}, A_i \subset A_{i+1}$),

Alors
$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

- Si la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante** pour l'inclusion ($\forall i \in \mathbb{N}, B_{i+1} \subset B_i$),

Alors
$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(B_n).$$

Conséquence. Si $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements quelconques alors les suites d'événements définies par $A_n = \bigcup_{k=0}^n C_k$ et $B_n = \bigcap_{k=0}^n C_k$ sont respectivement croissante et décroissante pour l'inclusion et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^n C_k\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k\right) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^n C_k\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} C_k\right).$$

2.2 Probabilité conditionnelle et indépendance

DÉFINITION

probabilité conditionnelle

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbf{P}(A) \neq 0$. Soit $B \in \mathcal{A}$.

La **probabilité conditionnelle** de B sachant A est

$$\mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Remarques.

- À partir de la définition, on prouve une première **formule de Bayes**.

Si $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$, alors
$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}_A(B) \cdot \mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} \quad (\bullet).$$

- Si A est un événement non négligeable, alors $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}_A)$ est un espace probabilisé.

DÉFINITION

indépendance deux à deux et mutuelle

- Deux événements A et B sont dits **indépendants** pour la probabilité \mathbf{P} si

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B).$$

- Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie ou dénombrable d'événements. Les événements de cette famille sont dits **mutuellement indépendants** si pour toute partie finie non vide $\{i_1, i_2, \dots, i_p\} \subset I$,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^p A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^p \mathbf{P}(A_{i_k}).$$

2.3 Formules des probabilités composées et probabilités totales

PROPOSITION

formule des probabilités composées

Soient $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$, des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tels que

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0.$$

Alors
$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \cdot \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbf{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

THÉORÈME

formule des probabilités totales

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in I}$ un système complet d'événements non négligeables (I est un ensemble fini ou dénombrable). Pour tout événement B ,

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{n \in I} \mathbf{P}(A_n \cap B) = \sum_{n \in I} \mathbf{P}(A_n) \mathbf{P}_{A_n}(B).$$

Exercice 4



♦ Soient $a, b, n, m \in \mathbb{N}^*$. Considérons deux urnes contenant respectivement a et b boules blanches et n et m boules noires. On suppose de plus que le nombre de boules dans les deux urnes est identique.

On procède de la manière suivante :

- On choisit (de façon équiprobable) une des deux urnes.
- On effectue ensuite des tirages mutuellement indépendants avec remise dans cette **même** urne.

p. 25

1. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au k -ième tirage, puis la probabilité d'obtenir k boules blanches consécutives.
2. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au $(k+1)$ -ième tirage sachant que l'on a déjà obtenu k boules blanches aux tirages précédents.

3

Variable aléatoire réelle

3.1

Définition

DÉFINITION

variable aléatoire réelle

Étant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, on appelle **variable aléatoire réelle** toute application X définie sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} , telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A}.$$

Notation. Dans la suite, pour I un intervalle de \mathbb{R} et $t \in \mathbb{R}$, on note :

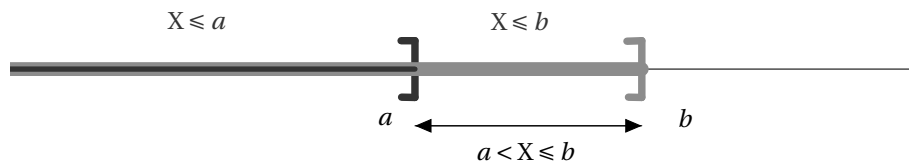
$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}, \quad [X \leq t] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq t\} \quad \text{et} \quad [X = t] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = t\}.$$

Ainsi, X est une variable aléatoire si pour tout réel t , l'ensemble $[X \leq t]$ est un événement.

Remarques.

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Si X est une variable aléatoire réelle, alors $[X \in]a, b[$] est un événement. En effet,

$$[X \in]a, b[= [X \leq b] \setminus [X \leq a] = [X \leq b] \cap \overline{[X \leq a]} \in \mathcal{A} \quad \text{car} \quad [X \leq a], [X \leq b] \in \mathcal{A}$$



Par conséquent, le réel $\mathbf{P}([X \in]a, b[])$ est bien défini.

- La donnée des probabilités $\mathbf{P}([X \in]a, b[])$ pour tous réels $a < b$ définit **la loi de probabilité** de la variable aléatoire réelle X .

PROPOSITION

Opérations sur les variables aléatoires

Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Alors

- la combinaison linéaire $\lambda X + \mu Y$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
- le produit $X \cdot Y$,
- le maximum $\max(X, Y)$ et le minimum $\min(X, Y)$

sont encore des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Résultat admis.

Remarque. Cela s'étend à un nombre fini de variables aléatoires.

3.2

Fonction de répartition

DÉFINITION

fonction de répartition

Soit X , une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On définit la fonction F_X sur \mathbb{R} par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = \mathbf{P}([X \leq t]).$$

La fonction F_X est la **fonction de répartition** de la variable aléatoire X .

Exercice 5



❖ Soit X , la variable aléatoire donnant la valeur d'un dé équilibrée. Donner le graphe sur $[-1; 7]$ de F_X .

p. 25

Exemple. En généralisant l'exercice précédent, la fonction de répartition d'une loi uniforme discrète sur $[[1; n]]$ est donnée par l'expression

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lfloor x \rfloor / n & \text{si } x \in [1; n] \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

PROPOSITION

propriétés de la fonction de répartition

Soient X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et F_X sa fonction de répartition.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_X(t) \in [0; 1]$.
- F_X est croissante : pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 \leq t_2 \Rightarrow F_X(t_1) \leq F_X(t_2)$.
- $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$.
- F_X est continue à droite : pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a}} F_X(t) = F_X(a).$$

- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $\mathbf{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Preuve. Démontrons chacun des points de la proposition.

- Le premier se déduit du fait que la probabilité d'un événement est toujours comprise entre 0 et 1.
- Soient $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Par croissance de la probabilité

$$t_1 \leq t_2 \Rightarrow [X \leq t_1] \subset [X \leq t_2] \Rightarrow F_X(t_1) = \mathbf{P}([X \leq t_1]) \leq \mathbf{P}([X \leq t_2]) = F_X(t_2).$$

- Justifions la limite en $+\infty$.

→ La fonction F_X est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de la limite monotone pour les fonctions, la limite de F_X en $+\infty$ existe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = [X \leq n]$. La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, donc d'après le théorème de la limite monotone pour les probabilités :

$$1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(n).$$

Par croissance de F_X ,

$$1 = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbb{N}}} F_X(n) = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t \in \mathbb{R}}} F_X(t).$$

→ Procédons de même pour la limite de F_X en $-\infty$. F_X est croissante et minorée par 0, donc d'après le théorème de la limite monotone pour les fonctions, la limite de F_X en $-\infty$ existe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $B_n = [X \leq -n]$. La suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements, donc d'après le théorème de la limite monotone pour les probabilités :

$$0 = \mathbf{P}(\emptyset) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(-n).$$

Par croissance de F_X ,

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(-n) = \lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t).$$

- Soit $a \in \mathbb{R}$. De nouveau, le théorème de la limite monotone pour les fonctions justifie l'existence de la limite à droite en a de la fonction de répartition. Étudions la limite de $F_X\left(a + \frac{1}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $C_n = [X \leq a + \frac{1}{n}]$. La suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements, donc d'après le théorème de la limite monotone pour les probabilités :

$$F_X(a) = \mathbf{P}([X \leq a]) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(C_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X\left(a + \frac{1}{n}\right).$$

$$F_X(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X\left(a + \frac{1}{n}\right) = \lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a}} F_X(t).$$

- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, sachant que $[X \leq a] \subset [X \leq b]$ on a

$$F_X(b) - F_X(a) = \mathbf{P}(X \leq b) - \mathbf{P}(X \leq a) = \mathbf{P}([X \leq b] \setminus [X \leq a]) = \mathbf{P}(a < X \leq b).$$

Astuce. À la fin de chaque calcul d'une fonction de répartition, il est toujours utile de vérifier rapidement les trois premiers points.

PROPOSITION

caractérisation de la loi

Une fonction de répartition caractérise une loi de probabilité. Cela signifie que deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition si et seulement si elles ont la même loi.

Résultat admis.

4

Révisions sur les variables aléatoires discrètes

4.1 Rappels : variables aléatoires finies et discrètes

Dans le cas où $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, la définition de la variable aléatoire se simplifie.

DÉFINITION

variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Une **variable aléatoire discrète** est une application $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

telle que

- $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ où I est une partie finie ou infinie de \mathbb{N} ,
- pour tout $i \in I$, $[X = x_i]$ est un événement.

Vocabulaire. Donner la loi d'une variable aléatoire discrète X signifie donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X et pour chaque $x \in X(\Omega)$, la probabilité $\mathbf{P}([X = x])$.

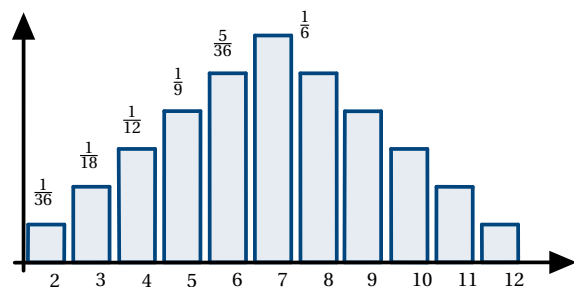
Remarques.

- On donne parfois la loi sous forme d'un tableau. Par exemple, la variable aléatoire X , somme des valeurs de deux dés équilibrés a pour loi :

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{P}([X = i])$	1/36	1/18	1/12	1/9	5/36	1/6	5/36	1/9	1/12	1/18	1/36

On peut aussi représenter la loi à l'aide d'un diagramme en bâtons.

En abscisse, on place les valeurs possibles de la variable (ici, 2, 3, ..., 12) et en ordonnée les probabilités correspondantes (ici, $\mathbf{P}([X = 2])$, $\mathbf{P}([X = 3])$, ..., $\mathbf{P}([X = 12])$).



- À une v.a discrète X est associée le système complet d'événements $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$.

En particulier, il vient

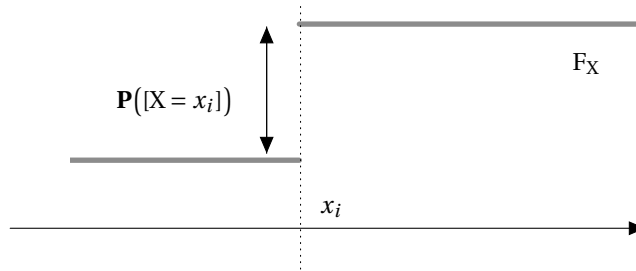
$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}([X = x]) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

- La courbe d'une fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est en escalier. Les abscisses des sauts donnent les valeurs x_i et la hauteur du saut donne la probabilité $\mathbf{P}([X = x_i])$. Dès lors, si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes ayant la même fonction de répartition, on a

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\},$$

et pour tout indice i ,

$$\mathbf{P}([X = x_i]) = \mathbf{P}([Y = x_i]).$$



On retrouve l'égalité en loi.

DÉFINITION

indépendance, cas discret

- Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On dit que X et Y sont **indépendantes** si

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbf{P}([X = x]) \cdot \mathbf{P}([Y = y]).$$

- Les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont **mutuellement indépendantes** si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}([X_i = x_i]).$$

Remarque. Dans ce cas, on constate que si X et Y sont indépendantes alors

$$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \quad F_X(t_1)F_Y(t_2) = \mathbf{P}([X \leq t_1] \cap [Y \leq t_2]).$$

Preuve. Soient $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. On a

$$[X \leq t_1] \cap [Y \leq t_2] = \bigcup_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ x \leq t_1, y \leq t_2}} [X = x] \cap [Y = y].$$

L'union est disjointe, par la propriété d'additivité d'une probabilité, puis par la définition de l'indépendance, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X \leq t_1] \cap [Y \leq t_2]) &= \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ x \leq t_1, y \leq t_2}} \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) \\ &= \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ x \leq t_1, y \leq t_2}} \mathbf{P}(X = x) \cdot \mathbf{P}(Y = y) \\ &= \left(\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \leq t_1}} \mathbf{P}(X = x) \right) \cdot \left(\sum_{\substack{y \in Y(\Omega) \\ y \leq t_2}} \mathbf{P}(Y = y) \right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}([X \leq t_1] \cap [Y \leq t_2]) = F_X(t_1)F_Y(t_2).$$

La réciproque est vraie mais plus délicate à prouver.

4.2 Lois usuelles

Rappelons que donner la loi d'une variable aléatoire X discrète revient à la donnée de :

- $X(\Omega)$: l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire.
- Pour chaque $k \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}([X = k])$.

Dans chacun des cas, on précisera la loi, une représentation à l'aide d'un diagramme en bâtons, des exemples concrets d'application. De plus, on distinguera bien

- les cas finis : loi certaine, loi uniforme discrète, loi de Bernoulli, loi binomiale.
- les cas infinis dénombrables : loi géométrique, loi de Poisson.

Variable aléatoire certaine

Une variable X est dite **variable aléatoire certaine**, ou **presque sûrement constante** s'il existe un réel c tel que

$$\mathbf{P}([X = c]) = 1.$$

Loi de Bernoulli

DÉFINITION

loi de Bernoulli

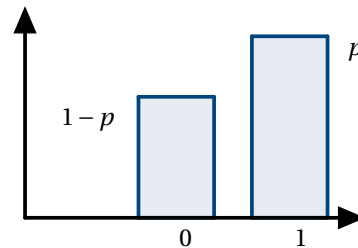
Soit $p \in [0; 1]$. La variable aléatoire X suit une **loi de BERNOULLI**, noté $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, si

$$X(\Omega) = \{0; 1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([X = 1]) = p, \quad \mathbf{P}([X = 0]) = 1 - p.$$

Exemple. Pour $A \in \mathcal{A}$ alors la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(A)$.

Représentation de $\mathcal{B}(p)$

Ci-contre, le diagramme en bâtons associé à une loi de Bernoulli de paramètre p .



Exemples de modélisation.

- Le résultat d'un lancer d'une pièce de monnaie équilibrée (1 pour pile, 0 face) suit une loi $\mathcal{B}(1/2)$.
- Plus généralement, la variable aléatoire associée à une expérience aléatoire ayant seulement deux issues (0 pour échec, 1 pour succès) suit une loi $\mathcal{B}(p)$ où p est la probabilité de succès.

Loi binomiale

DÉFINITION

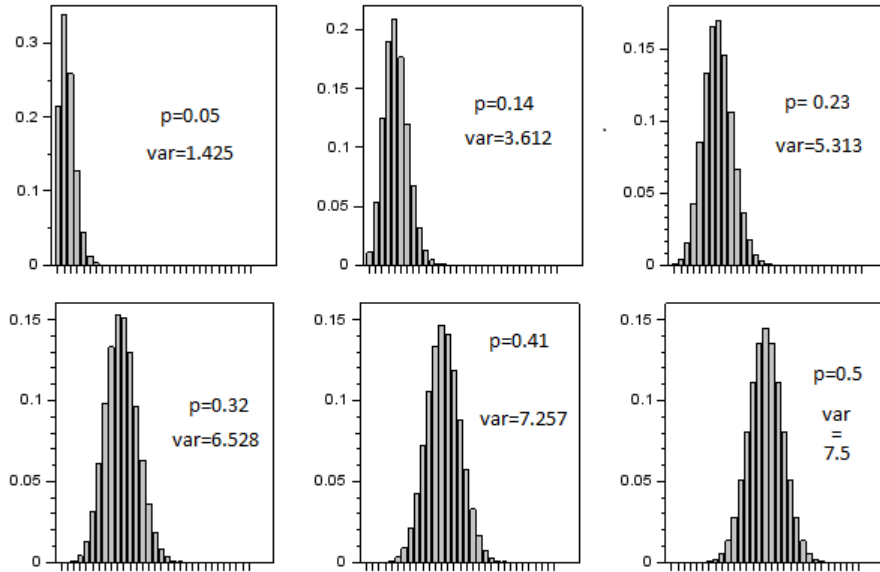
loi binomiale

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$. On dit que X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p , noté $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, si

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Représentation de $\mathcal{B}(n; p)$

Donnons quelques diagrammes en bâtons associés aux lois $\mathcal{B}(n; p)$ avec $n = 30$ et $p \in \{0,05; 0,14; 0,23; 0,32; 0,41; 0,5\}$.



Exemples de modélisation.

- On lance n fois un dé et X compte le nombre de « 6 » obtenus. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/6)$.
- Plus généralement, lorsqu'on répète n expériences de Bernoulli (à deux issues : succès/échec) *identiques, mutuellement indépendantes*, dont la probabilité de succès est p , la variable X qui *compte le nombre de succès* suit alors une loi binomiale de paramètre (n, p) .

Attention. Ne pas oublier la condition de mutuelle indépendance.

Loi uniforme

DÉFINITION

loi discrète uniforme

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a < b$.

La variable aléatoire X suit une **loi discrète uniforme sur** $[[a, b]]$, noté $X \hookrightarrow \mathcal{U}([[a, b]])$, si

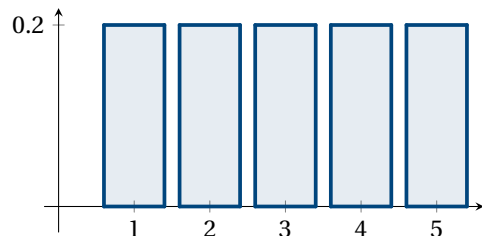
$$X(\Omega) = [[a, b]] \quad \text{et} \quad \forall k \in [[a, b]], \quad \mathbf{P}([X = k]) = \frac{1}{b - a + 1}.$$

Remarque. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([[1, n]])$ avec $n = b - a + 1$, alors $Y = X + a - 1 \hookrightarrow \mathcal{U}([[a, b]])$.

Représentation

Ci-contre le diagramme en bâtons de la loi :

$$\mathcal{U}([[1; 5]]).$$



Exemples de modélisation.

- Le résultat d'un lancer d'un dé équilibré à 6 faces suit une loi uniforme sur $[[1; 6]]$.
- Une urne contenant n boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à n . On tire au hasard une boule. Le numéro obtenu suit une loi uniforme sur $[[1; n]]$.

Loi géométrique

DÉFINITION

loi géométrique $\mathcal{G}(p)$

Soit $p \in]0; 1[$ et $q = 1 - p$.

On dit que la variable aléatoire X suit la **loi géométrique** de paramètre p , notée $\mathcal{G}(p)$, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([X = k]) = (1 - p)^{k-1} p = q^{k-1} p.$$

Remarque. La loi est bien définie puisque les probabilités des événements sont positives et, à partir des résultats sur les séries géométriques :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p \cdot q^{k-1} = p \sum_{i=0}^{+\infty} q^i = \frac{p}{1 - q} = 1.$$

Représentation de $\mathcal{G}(p)$

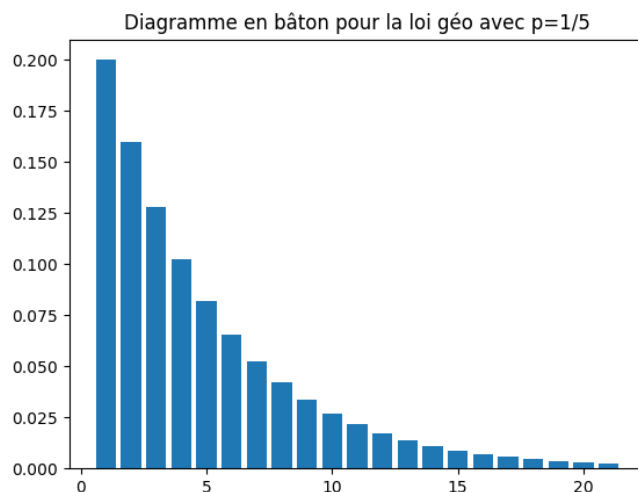
Exercice 6



◆◆ Diagramme en bâton de la loi géométrique

1. Soient $p \in]0, 1[$ et $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Écrire un programme qui prend en argument p et renvoie la plus petite valeur entière n_p telle que $\mathbf{P}([X > n_p]) \leq 1\%$.
2. En déduire un second programme qui prend en argument p renvoie le diagramme en bâton sur $[[0; n_p]]$.

p. 26



Exemple de modélisation.

- Une loi géométrique modélise un **premier temps d'arrêt**.

Si X renvoie le rang du premier succès dans une succession d'expériences de Bernoulli identiques, mutuellement indépendantes, alors X suit une loi géométrique où p est la probabilité de succès d'une expérience de Bernoulli.

- Une autre manière de caractériser la loi géométrique : c'est une loi sans mémoire.

Exercice 7



◆ Loi discrète sans mémoire

Soient $p \in]0; 1[$ et X une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$.

1. Justifier que : $\forall s, t \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}_{[X > s]}([X > s + t]) = \mathbf{P}([X > t]) \quad (\bullet)$
2. Réciproque.
Soit X une variable aléatoire sur \mathbb{N}^* vérifiant (\bullet) . Posons $p = \mathbf{P}([X = 1])$.
 - a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer $\mathbf{P}([X > k])$ en fonction de p .
 - b) En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre p .

p. 26

Loi de Poisson

DÉFINITION

loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Soit λ un réel strictement positif.

On dit que la variable aléatoire X suit la **loi de Poisson** de paramètre λ , notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([X = k]) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Remarque. La loi est bien définie. Les probabilités sont bien positives et à partir de la série exponentielle

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X = k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Représentation de $\mathcal{P}(\lambda)$

Exercice 8



◆◆ Diagramme en bâtons de la loi de Poisson

1. Soient $\lambda \in]0, +\infty[$ et $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Écrire un programme qui prend en argument n , λ et renvoie la liste

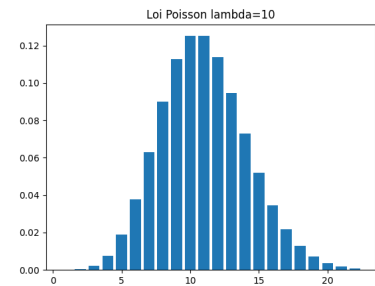
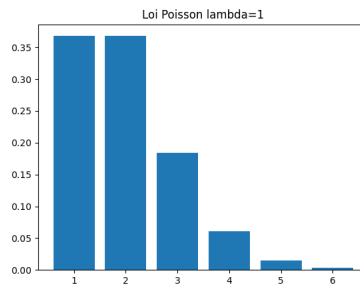
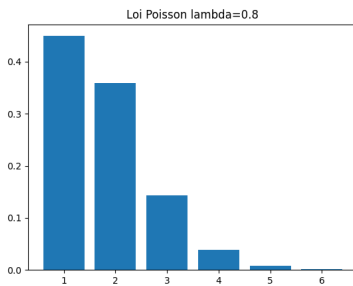
$$[p_0 \quad p_1 \quad \dots \quad p_n] \quad \text{où} \quad p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}.$$

On pourra remarquer que $p_{i+1} = \lambda p_i / (i+1)$.

p. 27

2. Écrire un programme qui prend en argument λ et renvoie la plus petite valeur entière n_λ telle que $\mathbf{P}([X \geq n_\lambda]) \leq 1\%$.
3. En déduire un second programme qui prend en argument p renvoie le diagramme en bâtons sur $[[0; n_\lambda]]$.

Quelques exemples pour différentes valeurs du paramètre.



» Pour poursuivre l'étude, voir exercice 30, p. 22.

Exemple de modélisation.

On utilise souvent la loi de Poisson pour dénombrer les « événements rares ». Nous y reviendrons au chapitre Convergence des variables aléatoires.



"On a sanctionné les copies dans lesquelles Poisson (ou tout autre mathématicien) était écrit sans majuscule."

Rapport de Jury : HEC 2021



Siméon Denis Poisson (1781-1840)

"La vie n'est bonne qu'à deux choses : découvrir les mathématiques et enseigner les mathématiques"

5.1 Premiers exemples avec les lois usuelles

Pour simuler des variables aléatoires, on peut utiliser la bibliothèque `random` que l'on importe par :

Editeur

```
import numpy.random as rd
```

- **rd.random()**

La commande `rd.random()` renvoie un réel choisi au hasard dans l'intervalle $[0;1[$ suivant une loi de probabilité uniforme continue sur $[0;1[$.

Pour simuler à l'aide de Python un événement de probabilité p , on peut écrire `rd.random() < p` renverra `True` avec une probabilité p .

- **rd.randint(debut,fin)**

De la même façon, on peut tirer au hasard (et uniformément) un entier plutôt qu'un réel. Dans ce cas, la commande à utiliser est `rd.randint(début,fin)` qui tire au hasard avec une probabilité uniforme un entier dans l'intervalle $[\text{début}, \text{fin}[$.

Console

```
>>> rd.randint(0,10)
9
```

Remarque. On peut aussi écrire `np.floor((b-a)*random()+a)`.

- **rd.geometric(p)**

La fonction `rd.geometric(p)` permet de simuler une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p . Pour rappel, si X renvoie le rang du premier succès dans une infinité d'expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes, $X \rightarrow \mathcal{G}(p)$ où p est la probabilité d'un succès.

- **rd.binomial(n,p)**

De la même façon, on peut simuler une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n, p avec la commande `rd.binomial(n,p)`. Pour rappel, le nombre de succès obtenus lors d'une répétition de n expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes de probabilité de succès p suit une loi binomiale de paramètres n, p .

- **rd.poisson(lambda)**

Enfin, `rd.poisson(lambda)` simule une variable qui suit une loi de Poisson de paramètre λ .

Remarque. Toutes les méthodes précédentes peuvent aussi renvoyer une liste de valeurs tirées selon les différentes lois de probabilité plutôt qu'une seule valeur. Pour faire cela, il suffit de donner comme argument supplémentaire à l'instruction la taille de la liste voulue. Par exemple, `rd.randint(1,100,200)` renvoie un tableau numpy contenant 200 entiers pris aléatoirement entre 1 et 100. De plus, la commande `rd.randint(1,100,[200,10])` renvoie une matrice de taille $(200,10)$.

Exercice 9. Lois usuelles avec random()

Une urne contient 5 boules (1 rouge et 4 bleues). On considère l'expérience suivante :

>> Solution p. 27

On tire une boule au hasard et on note la couleur. On replace ensuite la boule dans l'urne.

1. Soit X la variable aléatoire qui renvoie 1 si la boule est rouge et 0 sinon.
Préciser la loi de X .
En utilisant uniquement la commande `random`, écrire un programme qui simule la variable X .

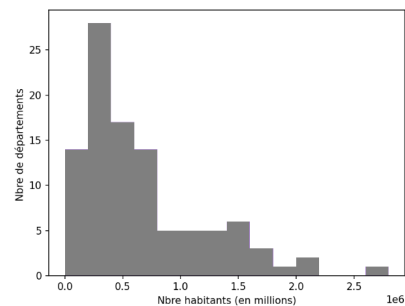
- On repète maintenant n fois l'expérience élémentaire. On suppose les tirages mutuellement indépendants. On note Y le nombre de boules rouges obtenues.
Quelle est la loi de Y ?
Avec la commande `random`, écrire un programme qui prend en argument n et simule Y .
- On repète maintenant une infinité de fois l'expérience élémentaire. On suppose toujours les tirages mutuellement indépendants. On note Z le numéro du tirage où on a obtenu la première boule rouge.
Quelle est la loi de Z ? Écrire un programme qui simule la variable Z .
- Modifier le programme précédent pour simuler la variable X_2 qui donne le numéro du tirage où on obtient la seconde boule rouge.
Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Généralisez la question avec X_r , la variable aléatoire qui renvoie le tirage de la r -ième boule rouge.

Histogrammes

Rappelons aussi le code pour le tracé d'un histogramme qui permet d'avoir un aperçu de la répartition des valeurs de l'échantillon. Ce graphique est obtenu en traçant, pour chaque $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, le rectangle de base $[a_i; a_{i+1}]$ sur l'axe des abscisses et en ordonnées, l'effectif de la classe $[a_i; a_{i+1}]$.

Editeur

```
# Voici une exemple avec le nombre d'habitants
# par département français
# Création d'un tableau avec les intervalles de
# longueurs 200 000 (habitants)
inter = np.linspace(0, 2.8*10**6, 15)
plt.hist(L, bins=inter)
plt.xlabel('Nbre habitants (en millions)')
plt.ylabel('Nbre de départements ')
plt.show()
```



Editeur

```
# La loi de la variable
val=[1,2,3,4,5,6]
loi=[1/6,1/6,1/6,1/6,1/6,1/6]

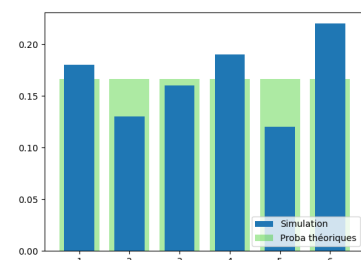
# Simulation de la variable aléatoire
ech=np.floor(6*np.random.rand(m))+1

# Tracé du diagramme en bâtons
# bar(abscisses,ordonnées)
plt.bar(val,loi,color=(0.2, 0.8, 0.1, 0.4),label=
'Proba théoriques')

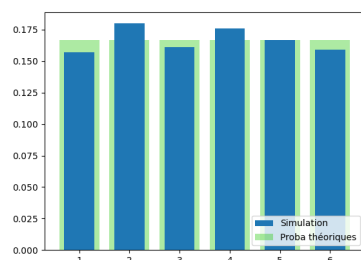
# Tracé de l'histogramme
# hist(echantillon, bins=classe)
classe=[0.5,1.5,2.5,3.5,4.5,5.5,6.5]
plt.hist(ech,bins=classe,density='true',rwidth
=0.6,label='Simulation')

plt.legend( loc = 'lower right')
plt.show()
```

Échantillon de taille $m = 100$:



Échantillon de taille $m = 1000$:



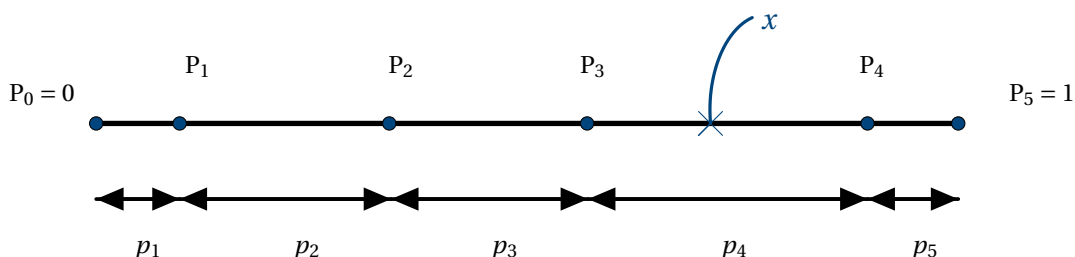
5.2 Simulation pour une loi discrète

Le cas fini

Soit X une variable aléatoire finie. Pour simplifier le programme, on suppose $X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$. On note

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad p_i = \mathbf{P}(X = i) \quad \text{et} \quad P_i = \sum_{k=1}^i p_k.$$

On souhaite simuler la variable X uniquement avec la commande `rand()`. L'idée est la suivante : on simule la loi de X en tirant un réel, au hasard dans $[0; 1]$ et en renvoyant l'entier k s'il appartient à l'intervalle $[P_{k-1}; P_k[$. La probabilité que l'entier k soit choisi est alors $P_k - P_{k-1} = p_k = \mathbf{P}(X = k)$ (avec la convention $P_0 = 0$).



Exercice 10



◆◆◆ Simulation des variables aléatoires finies

1. Que représente les réels P_i en termes de probabilités et de X ?
2. Écrire un programme python qui prend en argument une liste $(p_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ correspondant à la loi de X et simule X .
3. Tester votre programme sur la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1; 10 \rrbracket)$ et vérifier la cohérence du programme à l'aide d'un histogramme.

p. 28

Le cas infini dénombrable avec la loi de Poisson

On peut toutefois étendre la méthode précédente au cas où X prend ses valeurs dans \mathbb{N} . Prenons le cas de $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Notons pour $k \in \mathbb{N}$,

$$p_k = \mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{et} \quad P_k = \sum_{j=0}^k p_j.$$

En particulier, on a

$$P_{k+1} = P_k + \frac{\lambda}{k+1} p_k.$$

Exercice 11



◆◆ Simulation d'une loi de Poisson

1. Écrire une fonction python qui prend en arguments k et λ puis renvoie les valeurs de P_0, P_1, \dots, P_k .
2. Adapter la méthode précédente pour simuler $X \leftarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
3. Comparer l'histogramme obtenu aux valeurs théoriques (diagramme en bâtons construit à l'exercice 8).

p. 28



Prenons le pari suivant :

On choisit un nombre au hasard dans un journal. Si son premier chiffre est 1, 2 ou 3, vous me devez dix euros, sinon je vous dois dix euros. Acceptez-vous de jouer?

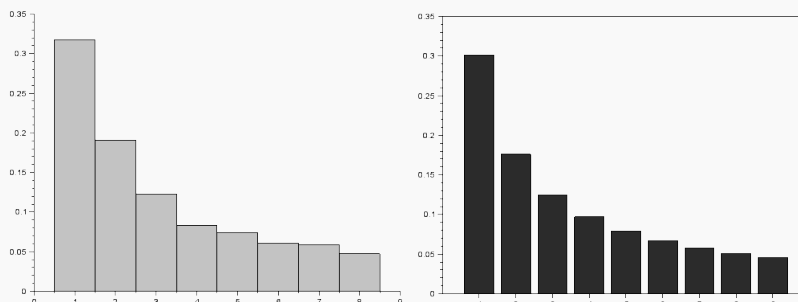
On pourrait s'imaginer que le jeu vous est favorable. A priori, il y a autant de chances que le nombre choisi commence par 1 que 9, 2 que 7 etc. J'aurais donc seulement 1 chance sur trois de gagner, 3 nombres sur les neuf possibles m'étant favorables (on exclut 0). Mais en réalité, le jeu n'est absolument pas en votre faveur. Étonnamment, la répartition des chiffres obtenus n'est pas uniforme. On vérifie expérimentalement que

- environ 30% des chiffres sont des 1 ; 17,6% sont des 2 ; 12,5% sont des 3. Au total, j'ai donc près de 60% de chance de gagner.
- respectivement 9,7%, 7,9%, 6,7%, 5,8%, 5,1%, 4,6% pour 4, 5, ..., 9.

• Cette propriété fut découverte par Simon Newcomb en 1881, puis redécouverte par Frank Benford 57 ans plus tard, en constatant que les premières pages des tables de logarithmes étaient plus usées que les autres. Cette propriété de répartition des nombres s'étend à de très nombreux types de liste (longueurs des fleuves en mètres, prix dans les supermarchés, etc.). Bien sûr, certaines listes ne vérifient cette propriété. Par exemple, la taille des français exprimée en centimètres contient essentiellement des nombres dont 1 est le premier chiffre. De plus, ils ont précisé que le premier chiffre suivait une certaine loi, dite de Benford. Une variable aléatoire X suit une loi de Benford si :

$$X(\Omega) = \llbracket 1;9 \rrbracket \text{ et } \forall k \in \llbracket 1;9 \rrbracket, \mathbf{P}([X = k]) = \frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{\ln(10)}.$$

Le site de l'Insee contient de très nombreuses statistiques qui permettent de tester cette loi. Voici par exemple, à gauche, la répartition du premier chiffre du nombre d'habitants de 2500 communes françaises, et à droite, le diagramme en bâtons correspondant aux probabilités d'une loi de Benford. Les deux diagrammes sont pratiquement identiques.



• Donnons une application.

En étudiant la répartition du premier chiffre des comptes des entreprises ou des États, on peut détecter des irrégularités et d'éventuelles fraudes. En effet, les données falsifiées ne respectent en général pas la loi de Benford.

En 2011, les comptes des États membres de l'Union européenne ont été soumis à ce type de test. Les comptes de la Grèce (et dans une moindre mesure, ceux de la Belgique) s'écartent significativement de la répartition de Benford. Ce critère conforte l'idée que les comptes grecs aient été falsifiés afin d'être en accord avec les traités européens et ainsi permettre l'entrée de la Grèce dans la zone euro (2001).



Exercices



Révisions sur les séries

Exercice 12. ✧ Série alternée et contre-exemple

On définit les suites u et v pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$,

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

- On pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$. Justifier que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
 - En déduire la convergence de la série $\sum u_n$.
- Vérifier les équivalents : $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n \sim \frac{1}{n}$.
- Prouver que la série $\sum v_n$ est divergente?

Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont les termes généraux équivalents mais la nature des séries est différente. Cet exemple montre l'importance de l'hypothèse de positivité pour appliquer le critère d'équivalence.

>> Solution p. 29

Exercice 13. ✦

- ☞ Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est un entier.
- ☞ En déduire que la série de terme général $\sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$ est absolument convergente.

>> Solution p. 29

Exercice 14. ✦✦ Représenter dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) l'ensemble des points de coordonnées (a, b) telles que la série de terme général $u_n = \frac{n^a}{n^2 + n^b}$ soit convergente.

>> Solution p. 30

Exercice 15. ✦✦ 📄 Formule du binôme négatif

D'après EDHEC 2015

- Pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1; 1[$, vérifier l'équivalent $\binom{k}{p} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k^p}{p!}$. En déduire la convergence de la série $\sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^k$.
- On définit, pour $x \in]-1; 1[$, $S_p(x) = \sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^k$.
 - Préciser $S_0(x)$.
 - ☞ Démontrer que $(1-x)S_{p+1}(x) = xS_p(x)$.
 - ☞ Conclure avec

$$\sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^k = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}.$$

>> Solution p. 30

Exercice 16. ✦✦ Produit de Cauchy

D'après EDHEC 2020

On considère deux suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes positifs et on suppose que les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes, de sommes respectives $A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $B = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$. Pour tout entier naturel n , on pose : $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

- ☞ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n c_k \leq \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) \left(\sum_{k=0}^n b_k \right) \leq \sum_{k=0}^{2n} c_k$.
- ☞ En déduire que la série de terme général c_n converge et que l'on a


$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

3. Application

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^{+2}$. En utilisant le résultat précédent, démontrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} \right).$$

>> Solution p. 31

Exercice 17. ♦♦  Comparaison série-intégrale, une série de Bertrand



Prouver que la série $\sum \frac{1}{n(\ln(n))^2}$ est convergente.

>> Solution p. 31


Exercice 18. ♦♦♦♦

D'après Oral ESCP 2009

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite réelle décroissante de limite nulle. Pour tout n de \mathbb{N}^* , on pose : $b_n = n(a_{n-1} - a_n)$.

1. Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* , on a : $\sum_{k=1}^n b_k = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \right) - na_n$.
2. On suppose dans cette question que la série de terme général a_n converge.
 - a)  Montrer que $na_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
 - b) En déduire que la série de terme général b_n converge et que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
3. On suppose dans cette question que la série de terme général b_n converge.
 - a)  Montrer que pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, on a : $n(a_n - a_{n+k}) \leq \sum_{j=n+1}^{n+k} b_j$.
 - b) En déduire que la série de terme général a_n converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.


>> Solution p. 32

Exercice 19. ♦♦♦♦  Représenter dans \mathbb{R}^2 l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que la série suivante soit convergente :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{1 + y^{2n}}.$$

>> Solution p. 32

Probabilités

Exercice 20. ♦♦  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons n urnes numérotées de 1 à n , contenant chacune r boules bleues et s boules rouges ($1 < s$). On réalise l'expérience suivante. On choisit au hasard une première boule dans la première urne que l'on replace dans la seconde et on répète l'opération jusqu'à la dernière urne. Quelle est la probabilité qu'une boule tirée au hasard dans la dernière urne soit bleue?

>> Solution p. 33

Exercice 21. ♦♦♦♦ Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'événements mutuellement indépendants.

1. Montrer que $\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{P}(A_k)) \right)$.
2. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(A_n) \neq 0$. Montrer que

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = 1 \iff \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 - \mathbf{P}(A_k)) \text{ diverge} \iff \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k) \text{ diverge}.$$

3. Application.

On dispose d'une urne d'une capacité illimitée, d'une boule rouge et d'une quantité illimitée de boules blanches. Dans chacun des cas suivants, déterminer la probabilité de tirer au moins une fois la boule rouge.

- a) On place la boule rouge et une boule blanche dans l'urne. On effectue une suite infinie de tirages avec remise.
- b) On effectue une suite infinie de tirages de la façon suivante. Pour le premier tirage, on place la boule rouge et une boule blanche dans l'urne. Puis, après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne et on y ajoute une boule blanche.
- c) On effectue une suite infinie de tirages de la façon suivante. Pour le premier tirage, on place la boule rouge et trois boules blanches dans l'urne. Après le n -ième tirage, on remet la boule tirée dans l'urne et on y ajoute $2n + 3$ boules blanches.

Indication. On commencera par déterminer le nombre de boules dans l'urne avant le n -ième tirage

Exercice 22. ♦♦♦  **Lemme de Borel-Cantelli**

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements.

1. On suppose que la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ converge.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k).$$

b) En déduire que l'événement $\bigcap_{m \geq 0} \bigcup_{k \geq m} A_k$ est négligeable.

c) Comment interpréter ce résultat ?

2. On suppose que la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ diverge et que les événements $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants. On pose pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $p > n$,

$$C_{n,p} = \bigcap_{k=n}^p \overline{A_k} \quad \text{et} \quad C_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k}.$$

a) Justifier que pour tout réel x positif, $1 - x \leq \exp(-x)$.

b) En déduire que

$$\mathbf{P}(C_{n,p}) \leq \exp\left(-\sum_{k=n}^p \mathbf{P}(A_k)\right).$$


c) Vérifier que $\mathbf{P}(C_n) = 0$.

d) Conclure en prouvant que l'événement $\bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} A_k$ est presque sûr.

3. *Application. Le singe savant*

Un singe tape sur le clavier d'un ordinateur de manière complètement aléatoire. Justifier qu'à partir d'un certain moment, le singe écrira *À la recherche du temps perdu* puis l'intégrale des Tweets de Donald Trump.

Variables aléatoires discrètes

Exercice 23.  Pour chaque énoncé, proposer une loi pour la variable aléatoire réelle X . On précisera les paramètres de la loi et les éventuelles hypothèses.

1. On lance un dé à 6 faces et on note X la variable égale au nombre obtenu.
2. On lance 10 fois un dé à 6 faces et on note X la variable égale au nombre de numéro pair obtenu.
3. Une urne contient 15 boules (5 noires, 3 blanches et 7 rouges). On tire successivement et avec remise 20 boules et on note X la variable égale au nombre de boules noires.
4. Un jeu de 52 cartes est aligné, faces cachées, sur une table de façon aléatoire. On découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir la dame de cœur. Soit X la variable égale au nombre de cartes découvertes.
5. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On tire au hasard un à un avec remise jusqu'à obtenir le jeton 1. On note X la variable égale au nombre de tirages effectués.
6. On pose m questions à un étudiant. Pour chaque question, n réponses sont possibles dont une seule uniquement est correcte. L'élève répond au hasard. Soit X la variable égale au nombre de bonnes réponses.

Exercice 24.  **Loi de Benford et détection de fraude**

Le but de cet exercice est d'écrire un programme qui permet de tester la loi de Benford sur une liste \mathbf{L} donnée (voir le saviez-vous page 17).

La loi de Benford, énonce que pour de nombreux types de listes de données statistiques, le 1er chiffre le plus fréquent est 1 pour près du tiers des observations. Puis le 2 est lui-même plus fréquent que 3 ... alors que la probabilité d'avoir un 9 comme premier chiffre est inférieure à 5 %.

Cette propriété empirique, mise en évidence par Simon Newcomb en 1881, puis à nouveau par Frank Benford 57 ans plus tard, s'étend à de très nombreux types de listes (nombres dans un journal, longueurs des fleuves en mètres, prix dans les supermarchés, etc.). De plus, ils ont précisé que le premier chiffre suivait une certaine loi, dite de Benford. Une variable aléatoire X suit la loi de Benford si :

$$X(\Omega) = \llbracket 1; 9 \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1; 9 \rrbracket, \quad \mathbf{P}([X = k]) = p_k = \frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{\ln(10)}.$$


1. En reprenant le code page ??, afficher le diagramme en bâton d'une loi de Benford ?

2. Prévoir la réponse de la machine à cette succession de commandes :

Console

```
num=2022
NUM=str(num)
print(int(NUM[0]))
```

- En déduire un programme qui prend en argument une matrice ligne L de nombres et renvoie l'histogramme de la répartition de la première décimale.
- Télécharger les deux listes de comptes des usines (celle Twix gauches et celle des Twix droits) sur le site de la classe. Une des deux usines a falsifié ses comptes. Laquelle ?

Exercice 25. ♦♦  **Matrices de rang 1 et indépendance de variables aléatoires**

D'après EMLyon 2013



- Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si, et seulement si, il existe deux matrices colonnes non nulles U, V telles que $M = UV^t$.
- On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose de plus : $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$. On note, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$,

$$m_{i,j} = \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]),$$

puis $M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $U_X = (\mathbf{P}([X = i]))_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $U_Y = (\mathbf{P}([Y = i]))_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- On suppose, dans cette question, que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. Calculer $U_X^t U_Y$. En déduire que la matrice M est de rang 1.
- On suppose, dans cette question, que la matrice M est de rang 1. Notons C_1, C_2, \dots, C_n , les colonnes de M .
 - Vérifier que $C_1 + \dots + C_n = U_X$.
 - En déduire que, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe $\beta_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j = \beta_j U_X$.
 - Montrer que pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathbf{P}([Y = j]) = \beta_j$.
 - En déduire que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

>> Solution p. 37

Exercice 26. ♦♦   Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de même paramètre p . Calculer la probabilité que la matrice suivante soit inversible


$$A = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y & X \end{bmatrix}.$$

>> Solution p. 37

Exercice 27. ♦♦ **Étude asymptotique de la queue d'une loi de Poisson.**

d'après oral HEC 2012

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$.

-  Montrer que pour tout entier $n \geq \lambda - 1$, on a $\mathbf{P}([X \geq n]) \leq \mathbf{P}([X = n]) \frac{n+1}{n+1-\lambda}$.
- En déduire que $\mathbf{P}([X \geq n]) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \mathbf{P}([X = n])$.
- Montrer que $\mathbf{P}([X > n]) = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(\mathbf{P}([X = n]))$.

>> Solution p. 38

Dans la suite des exercices, on appelle **mode** d'une variable aléatoire réelle discrète X toute valeur $x_0 \in X(\Omega)$ telle que

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbf{P}([X = x]) \leq \mathbf{P}([X = x_0]).$$

Exercice 28. ♦ Comment écrire un programme qui prend en argument la liste des probabilités $(\mathbf{P}([X = x]))_{x \in X(\Omega)}$ et renvoie le ou les modes de X .

>> Solution p. 38

Exercice 29. ♦♦♦ **Mode(s) de la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0, 1[$. Montrer que, selon les valeurs de n et p , la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ admet un ou deux modes que l'on précisera.
2. Pour $n = 9$, illustrer par des représentations graphiques en Python les différents cas obtenus.

>> Solution p. 38

Exercice 30. ♦♦♦ Mode(s) de la loi de Poisson

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que, selon la valeur de λ , la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ admet un ou deux modes que l'on précisera.
Indication. On distinguera 3 cas : $\lambda \in]0, 1[$, $\lambda \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et $\lambda \in]1, +\infty[\setminus \mathbb{N}$.
2. Illustrer par des représentations graphiques en Python les différents cas obtenus.

>> Solution p. 39

Sujets de révision

Exercice 31. ♦♦ Une caractérisation de la loi géométrique

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N}^* , indépendantes et de même loi, toutes deux définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On pose

$$I = \min(X, Y), \quad M = \max(X, Y) \quad \text{et} \quad D = M - I.$$

1. Dans cette question, on suppose que la loi commune de X et Y est géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ (on pose $q = 1 - p$).
 - a) Reconnaître la loi de la variable I .
 - b) Calculer $\mathbf{P}([I = i] \cap [D = d])$ pour tout $(i, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On séparera les cas $d = 0$ et $d > 0$.
 - c) Déterminer la loi de la variable D .
 - d) Vérifier que les variables I et D sont indépendantes.
2. Dans cette question, la loi commune de X et Y est inconnue et on suppose que les variables I et D sont indépendantes. On note $b = \mathbf{P}(D = 0)$ et, pour tout entier naturel k non nul, $p_k = \mathbf{P}(X = k)$. On suppose $p_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
 - a) Exprimer le réel b à l'aide de la famille $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.
 - b) Exprimer, pour tout entier naturel k , la probabilité $\mathbf{P}(I > k)$ à l'aide de la famille $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.
 - c) Soit $k \in \mathbb{N}$. En calculant la probabilité $\mathbf{P}([I > k] \cap [D = 0])$ établir l'égalité

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i^2 = b \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i \right)^2.$$

- d)
 - i) En déduire, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $(1 - b)p_k = 2b\mathbf{P}(X > k)$.
 - ii) Calculer p_1 en fonction de b
 - iii) Établir, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $p_{k+1} = \frac{1-b}{1+b} p_k$.
- e) En déduire que la loi commune des variables X et Y est une loi géométrique.

>> Solution p. 39



Indications et solutions



🔍 Indication de l'exercice 2

p. 3

1.(a) Utiliser pour tous réels a et b ,

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

1.(b) Penser aux séries de Riemann pour construire un contre-exemple.

2. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, les quantités

$$\frac{x}{1+x^2}, \quad \ln(1+x), \quad \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

sont positives et inférieures à x .

🔍 Indication de l'exercice 5

p. 7

Pour calculer $\mathbf{P}(X \leq t)$, distinguer plusieurs cas :

$$t < 1, \quad t \in [1; 2[, \quad \dots, \quad t \in [5; 6[, \quad t \geq 6.$$

🔍 Indication de l'exercice 6

p. 12

Reprendre l'exemple de l'algorithme de seuil avec un "while".

🔍 Indication de l'exercice 13

p. 18

1. Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton et regrouper les termes.

🔍 Indication de l'exercice 15

p. 18

2.b) Utiliser la formule du triangle de Pascal.

2.c) La suite $(S_p(x))_p$ est une suite géométrique de premier terme S_0 et de raison $x/(1-x)$.

🔍 Indication de l'exercice 16

p. 18

1. On pourra introduire les ensembles :

$$A_k = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leq i \leq k \text{ et } i + j = k\}$$

et partir des inclusions :

$$\bigcup_{k=0}^n A_k \subset [0; n]^2 \subset \bigcup_{k=0}^{2n} A_k.$$

2. Attention, ce n'est pas le théorème d'encadrement ici, il faut utiliser la croissance des sommes partielles $(C_n)_n$ avec

$$C_n = \sum_{k=0}^n c_k.$$

🔍 Indication de l'exercice 18

p. 19

2.a) Justifier que

$$0 \leq 2na_{2n} \leq 2 \sum_{k=n}^{+\infty} a_k.$$

En déduire $(2n)a_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Conclure ensuite.

3.a) Partir de l'égalité

$$n(a_n - a_{n+k}) = n \sum_{j=n+1}^{n+k} a_{j-1} - a_j.$$

🔍 Indication de l'exercice 20

p. 19

Posons pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'événement A_i : « La i -ème boule tirée est bleue ». On a

$$\mathbf{P}(A_1) = \frac{r}{r+s}.$$

À l'aide du système complet d'événements $(A_1, \overline{A_1})$, on montre que

$$\mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_2).$$

Généraliser.