TD

Thème : Variables aléatoires discrètes, espérance

Identités de Wald

On considère une famille de variables aléatoires discrètes positives $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, que l'on suppose indépendantes et de même loi. On suppose de plus que les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ possèdent une espérance et une variance finies. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire S_n par :

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

et l'on pose également $S_0 = 0$.
On considère ensuite une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une variance et supposée indépendante de la famille de variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et l'on définit la variable aléatoire

$$S_N = X_1 + \cdots + X_N.$$

- **Les identités**

1. **a)** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Exprimer $\mathbf{E}(S_n)$, $\mathbf{V}(S_n)$ et $\mathbf{E}\big((S_n)^2\big)$ à l'aide de n, $\mathbf{E}(X_1)$ et $\mathbf{V}(X_1)$.

b) En déduire l'identité :

$$\mathbf{E}(S_N) = \mathbf{E}(N)\cdot\mathbf{E}(X_1) \qquad (\star).$$

2. Justifier que

$$\mathbf{V}(S_N) = \mathbf{E}(N)\cdot\mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(N)\cdot(\mathbf{E}(X_1))^2 \qquad (\star\star).$$

- **Les fonctions génératrices**

On introduit également les fonctions φ et ψ, définies pour tout nombre réel $t\geqslant 0$ par :

$$\varphi(t) = \mathbf{E}\left(e^{-tX_1}\right) \quad \text{et} \quad \psi(t) = \mathbf{E}\left(e^{-tS_N}\right).$$

3. Justifier que les applications φ et ψ sont bien posées.

4. Vérifier la convergence de la série $\sum x^k\mathbf{P}(N=k)$ pour tout $x\in[-1;1]$.
On définit alors la fonction G sur $[-1;1]$ par :

$$G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k\mathbf{P}(N=k).$$

5. Montrer que pour tout réel $t\geqslant 0$

$$\psi(t) = G\big(\varphi(t)\big).$$

- **Applications**

6. On se place uniquement dans cette question dans le cas où les variables X_i et N sont des variables discrètes finies. En particulier elles admettent une espérance et une variance.

a) Exprimer le développement limité à l'ordre 2 de φ au voisinage de 0 à l'aide de l'espérance et la variance de X_1.

b) En déduire $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.

c) Exprimer l'espérance et la variance de N à l'aide de $G'(1)$ et $G''(1)$.

d) Retrouver les formules $(\star)$ et $(\star\star)$.

7. On suppose que les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont pour loi commune la loi de Bernoulli de paramètre p et d'autre part que N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$.

a) Écrire un programme Python qui prend en arguments p et λ et simule la variable S_N à partir de sa définition. Comment en déduire un programme qui donne une approximation de l'espérance? de la variance?

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, quelle est la loi de S_n ?

c) Expliciter la valeur de $\varphi(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_*^+$.

d) Expliciter la valeur de $G(x)$ en fonction de x.

e) En déduire que S_N suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
On admettra le résultat suivant : si Y *et* Z *sont deux variables aléatoires telles que les espérances*

$$\mathbf{E}(e^{tY}) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(e^{tZ})$$

soient bien définies et égales pour tout réel t dans un intervalle de $\mathbb{R}$, *alors* Y *et* Z *ont même loi.*

8. • Un contre-exemple?

Dans la suite du sujet on suppose que les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont pour loi commune la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, et l'on définit explicitement la variable aléatoire N comme le plus petit entier n tel que $X_n = 1$, soit

$$N = \inf\left\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_n = 1\right\}.$$

a) Écrire un programme Python qui prend en argument un paramètre p puis simule la variable N à partir de sa définition.

b) Quelle est la loi de N? de S_N ?

c) Montrer que l'on a, sur cet exemple, la relation $\mathbf{E}(S_N) = \mathbf{E}(N) \cdot \mathbf{E}(X_1)$.

d) Montrer que, si l'on pose $N' = N - 1$, la relation $\mathbf{E}(S_{N'}) = \mathbf{E}\left(N'\right) \cdot \mathbf{E}(X_1)$ n'est pas vérifiée. Commenter.

TD - éléments de solution

1.a) Par la linéarité de l'espérance, S_n admet une espérance avec
$$\mathbf{E}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_1) = n\mathbf{E}(X_1).$$
Par indépendance des variables X_i et l'égalité en loi
$$\mathbf{V}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(X_1) = n\mathbf{V}(X_1).$$
Par la formule de Koenig-Huygens
$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left({S_n}^2\right) &= \mathbf{V}(S_n) + \mathbf{E}(S_n)^2\\ &= n\mathbf{V}(X_1) + n^2\mathbf{E}(X_1)^2.\end{aligned}$$

1.b) Dans la suite, on note I, l'ensemble des indices $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{P}(N > 0)$.
Appliquons la formule de l'espérance totale avec le système complet d'événements $([N = n])_{n\in\mathbb{N}}$.
→ Pour $n \in I$
$$\begin{aligned}\mathbf{E}(S_N \mid N = n) &= \mathbf{E}(S_n \mid N = n)\\ &= \mathbf{E}(S_n).\end{aligned}$$
Car on a l'indépendance des variables N et $(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ et donc de N avec S_n (lemme des coalitions).
→ La série de terme général $\sum \mathbf{P}(N = n)\mathbf{E}(|S_N| \mid N = n)$ converge car :
S_N est positive et
$$\mathbf{P}(N = n)\mathbf{E}(S_N \mid N = n) = n\mathbf{P}(N = n)\mathbf{E}(X_1).$$
Or la série $\sum n\mathbf{P}(N = n)$ converge absolument (N admet une espérance).
On en déduit que :
→ la variable S_N admet une espérance;
→ L'espérance de S_N est donnée par :
$$\begin{aligned}\mathbf{E}(S_N) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(N = n)\mathbf{E}(S_N \mid N = n)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} n\mathbf{E}(X_1)\mathbf{P}(N = n) = \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(N).\end{aligned}$$

2. De la même manière, on peut appliquer la formule de l'espérance totale à la variable ${S_N}^2$ avec le même système complet d'événements. Dans ce cas,
$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left({S_N}^2 \mid N = n\right) &= \mathbf{E}\left({S_n}^2 \mid N = n\right)\\ &= \mathbf{E}\left({S_n}^2\right).\end{aligned}$$
On en déduit que S_N admet un moment d'ordre 2 (donc une variance) et avec la question 1
$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left({S_N}^2\right) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(N = n)\mathbf{E}\left({S_n}^2\right)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} n\mathbf{P}(N = n)\mathbf{V}(X_1) + n^2\mathbf{P}(N = n)\mathbf{E}(X_1)^2.\end{aligned}$$
Par linéarité des sommes convergentes
$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left({S_N}^2\right) &= \mathbf{V}(X_1)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} n\mathbf{P}(N = n)\right) + \mathbf{E}(X_1)^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2\mathbf{P}(N = n)\\ &= \mathbf{V}(X_1)\mathbf{E}(N) + \mathbf{E}(X_1)^2\mathbf{E}\left(N^2\right)\end{aligned}$$
d'après la formule de transfert.
On conclut par la formule de Koenig-Huygens
$$\begin{aligned}\mathbf{V}(S_N) &= \mathbf{E}\left({S_N}^2\right) - \mathbf{E}(S_N)^2\\ &= \mathbf{V}(X_1)\mathbf{E}(N) + \mathbf{E}(X_1)^2\mathbf{E}\left(N^2\right) - \mathbf{E}(X_1)^2\mathbf{E}(N)^2\\ &= \mathbf{V}(X_1)\mathbf{E}(N) + \mathbf{E}(X_1)^2\left(\mathbf{E}\left(N^2\right) - \mathbf{E}(N)^2\right)\\ \mathbf{V}(S_N) &= \mathbf{V}(X_1)\mathbf{E}(N) + \mathbf{E}(X_1)^2\mathbf{V}(N).\end{aligned}$$

3. Les variables X_1 et S_N sont positives. Dès lors, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$
$$0 \leqslant e^{-tX_1} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant e^{-tS_N} \leqslant 1.$$
Par domination, les variables e^{-tX_1} et e^{-tS_N} admettent une espérance et les fonctions φ et ψ sont bien posées.

4. Soit $x \in [-1;1]$
$$0 \leqslant \left|x^k\mathbf{P}(N = k)\right| \leqslant \mathbf{P}(N = k).$$
Or la série $\sum \mathbf{P}(N = k)$ converge. C'est une conséquence du fait que $([N = k])_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. Par le critère de majoration, la série $\sum x^k\mathbf{P}(N = k)$ converge absolument, elle converge.
Remarque. Notons que par la formule de transfert
$$G(x) = \mathbf{E}\left(x^N\right).$$

5. Notons de nouveau, I l'ensemble des indices $n \in \mathbb{N}$ tels que $\mathbf{P}(N = n) > 0$.
Soit $n \in I$.
$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(e^{-tS_N} \mid N = n\right) &= \mathbf{E}\left(e^{-tS_n} \mid N = n\right)\\ &= \mathbf{E}\left(e^{-tS_n}\right) \quad \text{(indépendance de N et } S_n\text{)}\\ &= \mathbf{E}\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{n} -tX_i\right)\right)\\ &= \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \exp(-tX_i)\right)\\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}(\exp(-tX_i)) \quad \text{(indépendance)}\\ \mathbf{E}\left(e^{-tS_N} \mid N = n\right) &= \mathbf{E}\left(e^{-tX_1}\right)^n \quad \text{(égalité en loi).}\end{aligned}$$

Appliquons la formule de l'espérance totale.

→ $([N = n])_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements ;

→ Pour tout $n \in I$, $\mathbf{E}\left(e^{-tS_N} | N = n\right)$ est bien définie.

→ Comme e^{-tS_N} est positive, il suffit de justifier la convergence de la série

$$\sum \mathbf{P}(N = n)\mathbf{E}\left(e^{-tS_N} | N = n\right).$$

Or le terme général vaut aussi

$$\mathbf{E}\left(e^{-tX_1}\right)^n \mathbf{P}(N = n).$$

Comme X_1 est positive, $\mathbf{E}\left(e^{-tX_1}\right) \in [0;1]$ car $e^{-tX_1} \in [0;1]$. On reconnaît la série de la question 4 où on a prouvé la convergence.
Finalement :

→ La variable e^{-tS_N} admet une espérance ;

→ L'espérance est donnée par

$$\begin{aligned}
\psi(t) = \mathbf{E}\left(e^{-tS_N}\right) &= \sum_{n\in I} \mathbf{E}\left(e^{-tS_N} | N = n\right) \mathbf{P}(N = n) \\
&= \sum_{n\in I} \mathbf{E}\left(e^{-tX_1}\right)^n \mathbf{P}(N = n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}\left(e^{-tX_1}\right)^n \mathbf{P}(N = n) \\
&= G\left(\mathbf{E}\left(e^{-tX_1}\right)\right) \\
\psi(t) &= G(\varphi(t)).
\end{aligned}$$

6.a) Notons $X_1(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$ où les réels x_i sont deux à deux distincts et

$$\forall\, i \in [\![1;m]\!], \qquad p_i = \mathbf{P}(X_1 = x_i).$$

D'après la formule de transfert

$$\begin{aligned}
\varphi(t) = \mathbf{E}\left(e^{-tX_1}\right) &= \sum_{i=1}^m e^{-tx_i} p_i \\
&= \sum_{i=1}^m \left(1 - tx_i + \frac{(-tx_i)^2}{2} + o\left(t^2\right)\right) p_i \\
&= \sum_{i=1}^m p_i - t\sum_{i=1}^m x_i p_i + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^m {x_i}^2 p_i + o\left(t^2\right) \\
&= 1 - t\mathbf{E}(X_1) + \frac{t^2}{2}\mathbf{E}\left({X_1}^2\right) + o\left(t^2\right) \\
\varphi(t) &= 1 - t\mathbf{E}(X_1) + \frac{t^2}{2}\left(\mathbf{V}(X_1) + \mathbf{E}(X_1)^2\right) + o\left(t^2\right).
\end{aligned}$$

6.b) L'application φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_*^+$. D'après la formule de Taylor-Young en 0

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{t^2}{2}\varphi''(0) + o\left(t^2\right).$$

Par unicité du développement limité, on peut identifier avec la question précédente pour obtenir

$$\varphi'(0) = -\mathbf{E}(X_1) \quad \text{et} \quad \varphi''(0) = \mathbf{V}(X_1) + \mathbf{E}(X_1)^2.$$

6.c) La fonction G est polynomiale (car N est une variable finie) donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec pour tout réel x

$$\begin{aligned}
G'(x) &= \sum_{k\in N(\Omega)\setminus\{0\}} kx^{k-1}\mathbf{P}(N = k) \\
G''(x) &= \sum_{k\in N(\Omega)\setminus\{0,1\}} k(k-1)\mathbf{P}(N = k)x^{k-2}.
\end{aligned}$$

En particulier en 1

$$\begin{aligned}
G'(1) &= \sum_{k\in N(\Omega)\setminus\{0\}} k\mathbf{P}(N = k) \\
&= \sum_{k\in N(\Omega)} k\mathbf{P}(N = k) = \mathbf{E}(N).
\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}
G''(1) &= \sum_{k\in N(\Omega)\setminus\{0;1\}} k(k-1)\mathbf{P}(N = k) \\
&= \sum_{k\in N(\Omega)} k(k-1)\mathbf{P}(N = k) \\
&= \sum_{k\in N(\Omega)} k^2\mathbf{P}(N = k) - \sum_{k\in N(\Omega)} k\mathbf{P}(N = k) \\
&= \mathbf{E}\left(N^2\right) - \mathbf{E}(N) \\
G''(1) &= \mathbf{V}(N) + \mathbf{E}(N)^2 - \mathbf{E}(N).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(N) &= G'(1) \\
\mathbf{V}(N) &= G''(1) + G'(1) - G'(1)^2.
\end{aligned}$$

6.d) Par composition ψ est de classe $\mathscr{C}^2$ et

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= \varphi'(t)G'(\varphi(t)) \\
\psi''(t) &= \varphi''(t)G'(\varphi(t)) + \varphi'(t)^2G''(\varphi(t))
\end{aligned}$$

En particulier, en évaluant en 0

$$\psi'(0) = \varphi'(0)G'(\varphi(0)) = \varphi'(0)G'(1).$$

Or en reprenant la question 6. b), on a aussi $\psi'(0) = -\mathbf{E}(S_N)$ et on retrouve

$$\mathbf{E}(S_N) = \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(N).$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(S_N) &= \psi''(0) - \mathbf{E}(S_N)^2 \\
&= \varphi''(0)G'(\varphi(0)) + \varphi'(0)^2G''(\varphi(0)) - \mathbf{E}(S_N)^2 \\
&= \left(\mathbf{V}(X_1) + \mathbf{E}(X_1)^2\right)\mathbf{E}(N) + \mathbf{E}(X_1)^2\left(\mathbf{V}(N) + \mathbf{E}(N)^2 - \mathbf{E}(N)\right) \\
&\qquad - \mathbf{E}(N)^2\mathbf{E}(X_1)^2 \\
\mathbf{V}(S_N) &= \mathbf{V}(X_1)\mathbf{E}(N) + \mathbf{E}(X_1)^2\mathbf{V}(N).
\end{aligned}$$

7.a)

```
import numpy.random as rd
import numpy as np

def simuSN(p,lbda):
    N=rd.poisson(lbda)
    X=(rd.random(N)<p)
    return sum(X)
```

```python
# Approximation de l'espérance

p=0.5
Lbda=10

m=5000
c=0
for i in range(m):
    c+=simuSN(p,Lbda)
print(c/m)

# Approximation du moment d'ordre 2
# Puis de la variance via la
# formule de Koenig-Huygens

e=0
for i in range(m):
    e+=simuSN(p,Lbda)**2
print(e/m-(c/m)**2)
```

Réponses :

```
5.0374

5.200601240000001
```

On verra que l'espérance et la variance sont λp car S_N suit une loi de Poisson de paramètre λp. Les résultats sont donc cohérent.

7.b) Comme les variables X_i sont indépendantes, de loi de Bernoulli de même paramètre p, on sait que S_n suit une loi binomiale de paramètre (n,p).

7.c) À partir de la formule de transfert, pour $t \in \mathbb{R}^+$

$$\varphi(t) = 1 - p + pe^{-t}.$$

7.d) Soit $x \in [-1,1]$

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \mathbf{P}(N=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \\ G(x) &= e^{-\lambda} e^{\lambda x} = e^{\lambda(x-1)}. \end{aligned}$$

Soit $t \in \mathbb{R}^+$. D'après la question 5

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(e^{-tS_N}\right) &= G(\varphi(t)) \\ &= e^{\lambda(\varphi(t-1)} \\ \mathbf{E}\left(e^{-tS_N}\right) &= e^{\lambda p (e^{-t}-1)}. \end{aligned}$$

Or pour Z suivant une loi de Poisson de paramètre μ,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(e^{-tZ}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-tk} \mathbf{P}(Z=k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-tk} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \\ &= e^{-\mu} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^{-t}\mu)^k}{k!} = e^{-\mu} \cdot e^{e^{-t}\mu} \\ \mathbf{E}\left(e^{-tZ}\right) &= e^{-\mu(e^t-1)}. \end{aligned}$$

Pour $\mu = \lambda p$, on a alors

$$\forall t \in [0;+\infty[, \qquad \mathbf{E}\left(e^{-tS_N}\right) = \mathbf{E}\left(e^{-tZ}\right)$$

ou encore

$$\forall t \in]-\infty;0], \qquad \mathbf{E}\left(e^{tS_N}\right) = \mathbf{E}\left(e^{tZ}\right).$$

D'après le résultat admis, S_N et Z ont même loi. C'est-à-dire S_N suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

8.a)

```python
import numpy.random as rd

def simuN(p):
    N=0
    while rd.random()<p:
        N+=1
    return N
```

8.b) La variable N renvoie le rang du premier succès (obtenir 1) dans une infinité d'expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes. On sait alors que N suit une loi géométrique de paramètre $p = \mathbf{P}(X_1 = 1)$.

- La variable S_N est la variable presque surement constante égale à 1 car pour $\omega \in \Omega$, on a presque sûrement $N(\omega) < +\infty$ et

$$S_N(\omega) = \underbrace{X_1(\omega)}_{=0} + \underbrace{X_2(\omega)}_{=0} + \ldots + \underbrace{X_{N-1}(\omega)}_{=0} + \underbrace{X_N(\omega)}_{=1} = 1.$$

8.c) Dune part $\mathbf{E}(S_N) = 1$. D'autre part, on sait que

$$\mathbf{E}(N) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(X_1) = p.$$

D'où $\qquad \mathbf{E}(N)\mathbf{E}(X_1) = 1.$

On a bien sur cet exemple

$$\mathbf{E}(S_N) = \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(N).$$

8.d) On a maintenant $\mathbf{E}(S_{N'}) = 0$ car $S_{N'}$ est presque surement nul. Pourtant

$$\mathbf{E}(N') = \mathbf{E}(N) - 1 = \frac{1}{p} - 1 \neq 0$$

et $\mathbf{E}(X_1) = p \neq 0$. On a donc

$$\mathbf{E}(S_{N'}) \neq \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(N').$$

Ce qui n'est pas en contradiction avec la relation $(\star)$ puisque la variable N' et les variables (X_i) ne sont pas indépendantes.