CHAPITRE 6

Fonctions de plusieurs variables

La science consiste à passer d'un étonnement à un autre.

ARISTOTE
Philosophe grec de l'Antiquité (384-322 av. J.-C), disciple de Platon.

Un court chapitre pour introduire les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$. On y étudie les représentations graphiques pour le cas de deux variables, l'étude des extrema et la continuité.
Un chapitre plus approfondi introduira les notions de calculs différentiels et un autre généralisera aux fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$.

1 Définitions et exemples

1.1 Norme euclidienne

DÉFINITION **norme euclidienne**

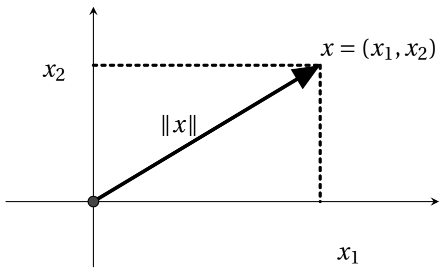
Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit la ***norme euclidienne*** *de x par*

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}.$$

Remarque. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Le réel $\|x\|$ correspond à la distance de x à l'origine. Plus généralement, le réel

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

représente la distance entre les points x et y.



Règles de calculs

- $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^n}$.
- Homogénéité : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.
- Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.
  Il y a égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires.

1.2 Fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

Exemples.
• Avec les fonctions usuelles :

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + xy - y^3, \quad g : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \ln\left(1 + x^2 e^{yz}\right), \quad h : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|.$$

• En microéconomie, la fonction d'utilité dite de Cobb-Douglas sert de modèle de fonction de production. C'est une fonction de deux variables définies par

$$Y(K, L) = c \cdot K^\alpha \cdot L^\beta$$

- Y est le niveau de production.
- K est celui du capital.
- L celui du travail.
- c, α et β sont des constantes positives.

• **Les fonctions polynomiales.**
Une fonction polynomiale est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, combinaison linéaire de fonctions de la forme

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto {x_1}^{\alpha_1} {x_2}^{\alpha_2} \ldots {x_n}^{\alpha_n},$$

où α_1, α_2, ..., α_n sont des entiers naturels. Par exemple

$$n = 1 : \quad f(x) = 3x^4 - 2x - 1, \qquad n = 2 : \quad f(x_1, x_2) = 3x_1{x_2}^4 - 2{x_1}^3 x_2 + 5x_1 x_2 + x_2 \quad \ldots$$

La fonction discriminant $\Delta : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mapsto b^2 - 4ac$ est un autre exemple.

• **Les fonctions affines**
Une fonction affine est une fonction polynomiale de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$f : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto a_1 x_1 + a_2 x_2 \ldots + a_n x_n + b$$

où a_1, ..., a_n, $b \in \mathbb{R}$. Par exemple

$$n = 1 : \quad f(x) = 2x - 1, \qquad n = 2 : \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 - x_2 + 7 \quad \ldots$$

En identifiant $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$, une fonction f est affine si et seulement si il existe une matrice colonne $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et un réel b tels que

$$f(x) = {}^t UX + b \quad \text{avec} \quad X = \mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

1.3 Graphes et lignes de niveau

Graphes

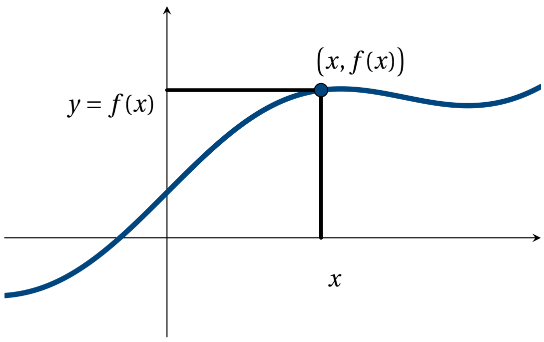
DÉFINITION — graphe

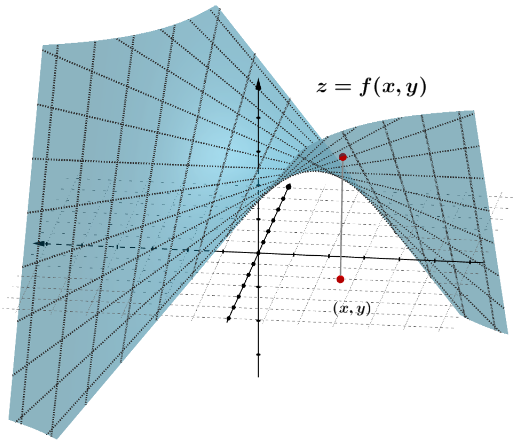
*Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction. Le **graphe** de f est la partie de $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par*

$$\left\{ (x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; y = f(x_1, \ldots, x_n) \right\}.$$

• Graphe d'une fonction d'une variable réelle (rappel)

Pour $n = 1$, on retrouve la courbe représentative d'une fonction.





• Graphe d'une fonction de deux variables

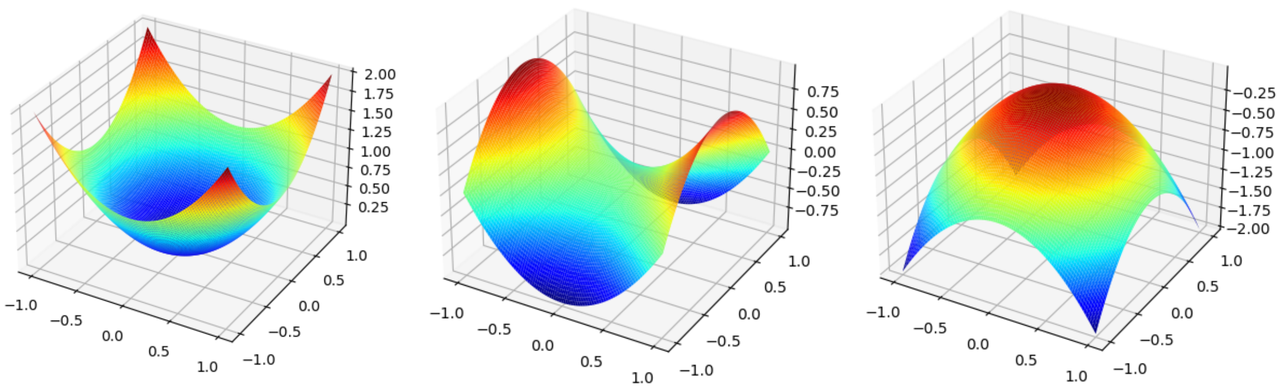
Ci-contre, la surface représentative de la fonction f : $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy/10+5$.

Suivant le même principe que pour le tracé de la courbe représentative d'une fonction d'une variable réelle, le code Python suivant permet de tracer la surface représentative d'une fonction de deux variables.

Editeur

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x,y):
    return x**2+y**2
 # Définition de la fonction f

x = np.linspace(-1, 1, 100)
 # 100 valeurs pour la variable x espacées régulièrement entre -1 et 1
y = np.linspace(-1, 1, 100) # De même pour la variable y

X, Y = np.meshgrid(x, y)
 # Tableau contenant les points (xi,yi) où xi et yi sont calculés précédemment
Z = f(X,Y)
 # Calcul des images pour tous les points (xi,yi)

fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection='3d')
ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=1, cstride=1,cmap='jet', edgecolor='none') # paramètres d'affichage
```

Exemples. Illustrons ce code à l'aide de trois exemples typiques de fonctions polynomiales de degré 2.



Editeur

```
def f1(x, y):
    return x**2 + y**2
```

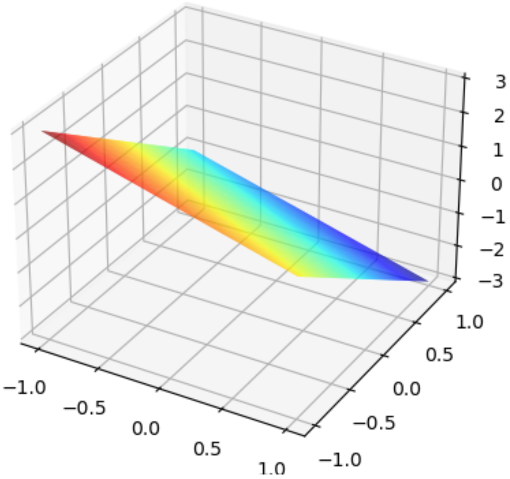
```
def f2(x, y):
    return x**2 - y**2
```

```
def f3(x, y):
    return -x**2 - y**2
```

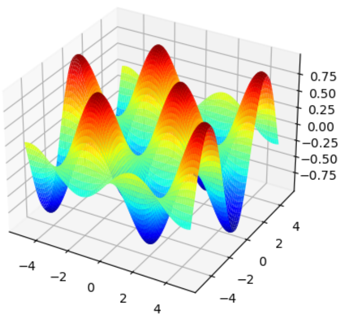
Exemple. Cas des fonctions affines.
→ Pour $n=1$, le graphe d'une fonction affine sur $\mathbb{R}$ correspond à une droite.
→ Pour $n=2$, le graphe d'une fonction affine sur $\mathbb{R}^2$ correspond à un plan d'équation

$$z = ax + by + c.$$

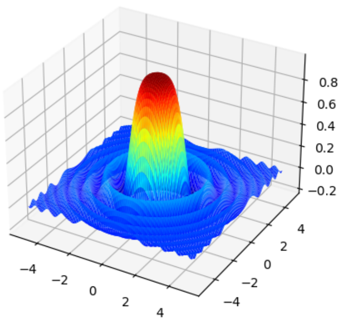
Ci-contre, le plan d'équation $z + x + 2y = 0$ obtenu à partir de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = -x - 2y$.
→ Dans le cas général, on obtient "un hyperplan affine", c'est-à-dire un translaté d'un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$.



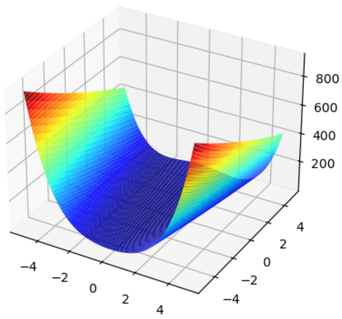
Exemples. Donnons de nouveaux graphes pour illustrer la diversité des cas possibles.



$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sin(x)\cos(y)$



$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2+0.01}$

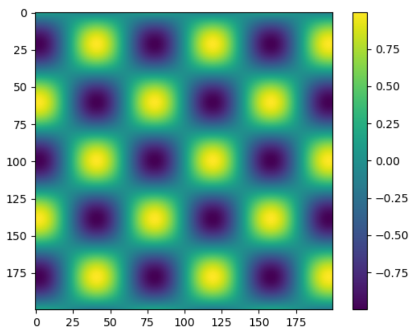


$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (1-x)^2 + (y-x^2)^2$

Remarque. On peut aussi représenter le graphe de la fonction en jouant sur les couleurs. Par exemple, en reprenant la première fonction de l'exemple précédent, on obtient :

Editeur

```
x = np.linspace(-8, 8, 200)
y = np.linspace(-8, 8, 200)
X,Y = np.meshgrid(x, y)
Z = np.sin(X)*np.cos(Y)

plt.imshow(Z)
plt.colorbar()
plt.show()
```



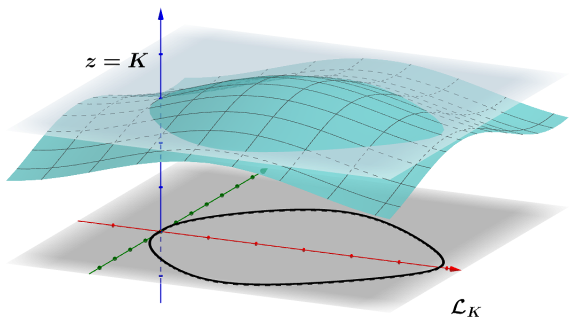
Lignes de niveau

DÉFINITION **lignes de niveau**

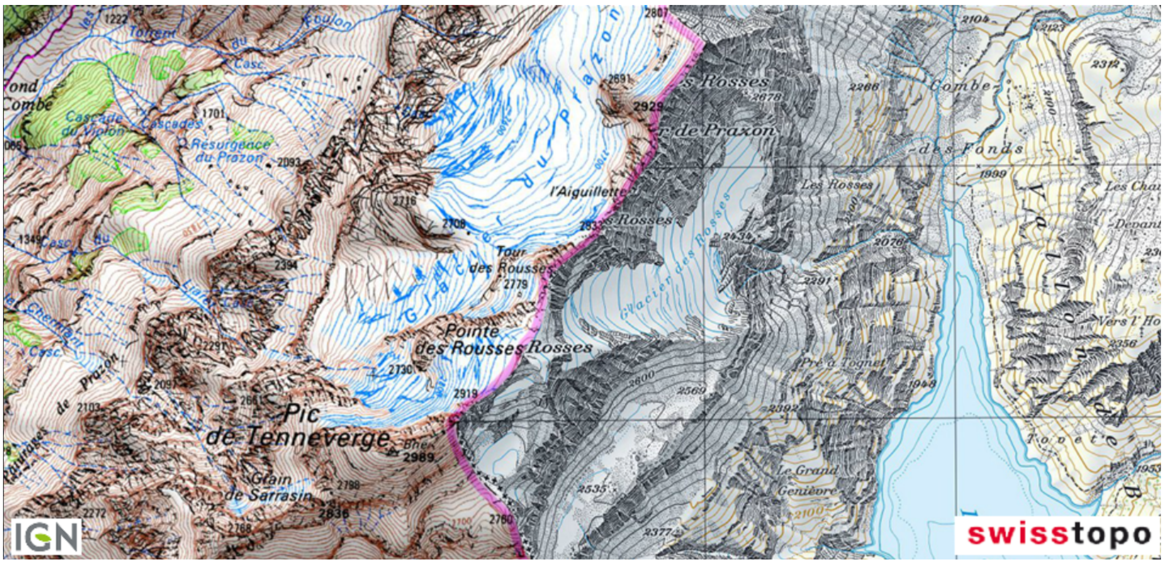
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction.
*La **ligne de niveau** de f associée au réel K est la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par*

$$\mathscr{L}_{\mathrm{K}} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = \mathrm{K}\right\}.$$

Pour obtenir la ligne de niveau $\mathscr{L}_{\mathrm{K}}$ d'une fonction, il suffit d'intersecter le plan horizontal $z = \mathrm{K}$ avec la surface définie par la fonction.



Remarque. Sur une carte géographique, les courbes de niveau relient les points qui sont à la même altitude : ce sont les lignes de niveau de la fonction qui, à un point donné (x, y), associe l'altitude de ce point $z = f(x, y)$.



La frontière franco-suisse, IGN Copyright et Swisstopo Copyright. Réalisation : Jérémie Ory, 2016

Exemples.
• Soit f, définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Pour $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$,

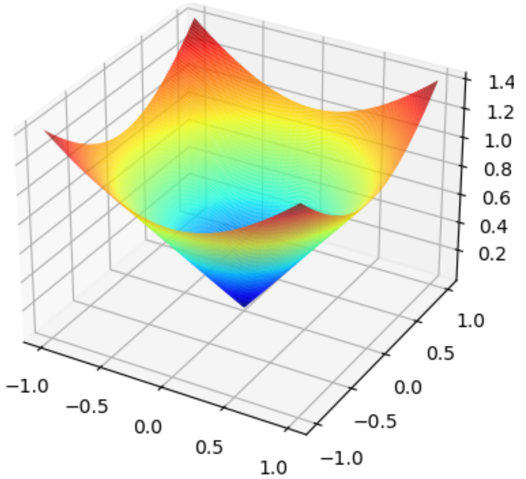
$$(x, y) \in \mathscr{L}_{\mathrm{K}} \iff f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = \mathrm{K} \iff \|(x, y)\| = \mathrm{K}.$$

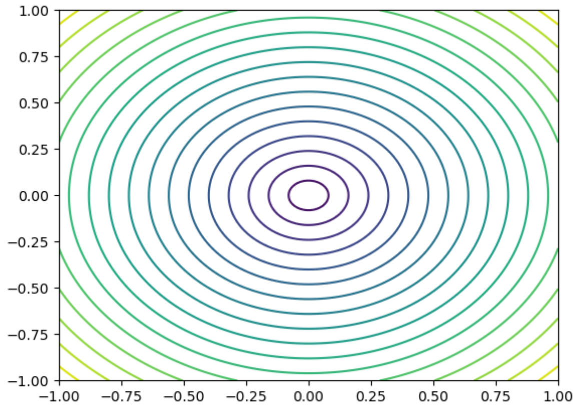
Autrement dit, (x, y) appartient à la ligne de niveau si et seulement si la distance entre (x, y) et l'origine est K.
Pour $\mathrm{K} < 0$, $\mathscr{L}_{\mathrm{K}} = \varnothing$. Pour $\mathrm{K} = 0$, la ligne est réduite à un point $\mathscr{L}_0 = \{(0, 0)\}$. Pour $\mathrm{K} > 0$, la ligne de niveau est un cercle de rayon K et centré en l'origine.

Ci-dessous, un code python pour tracer la surface et les lignes de niveau.

Editeur

```
def f(x,y):
    return np.sqrt(x**2+y**2)

x=np.linspace(-1,1,200)
y=np.linspace(-1,1,200)
X , Y = np.meshgrid(x,y)
Z = f(X,Y)

graphe = plt.contour(X,Y,Z,20) # 20 pour obtenir 20 lignes de niveau
plt.show()

fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection='3d')
ax.plot_surface(X,Y,Z, rstride=1, cstride=1,cmap='jet', edgecolor='none')
# paramètres d'affichage
plt.show()
```



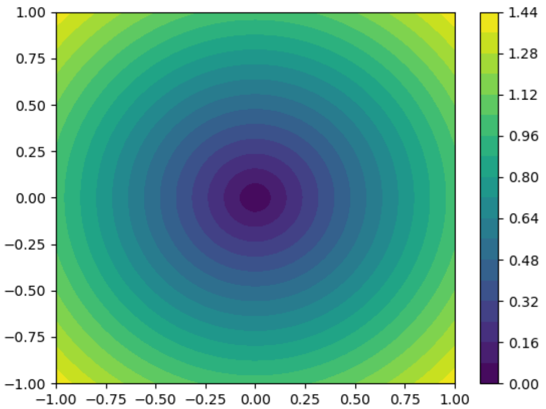


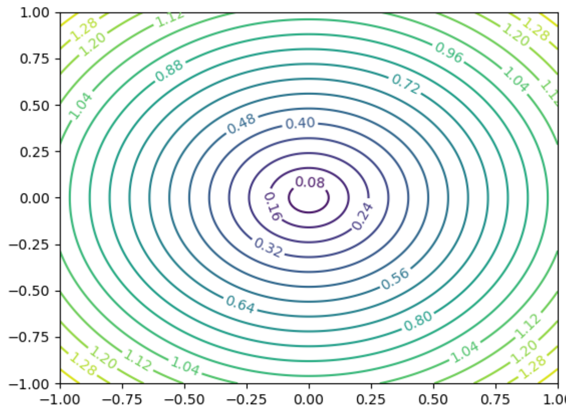
Plusieurs présentations sont possibles :

Editeur

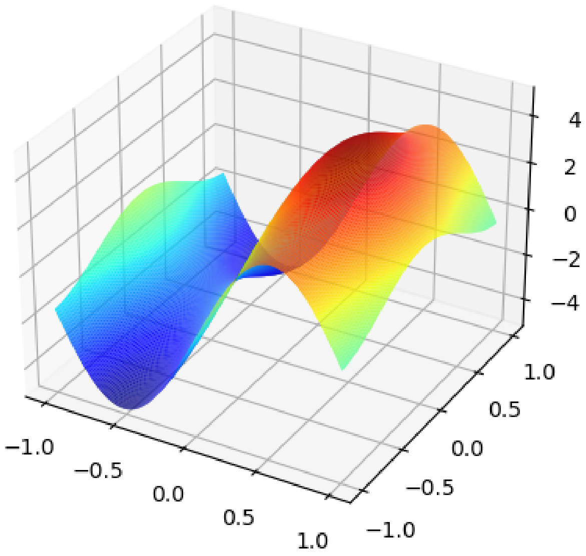
```
graphe = plt.contourf(x,y,z,20)
plt.colorbar()
plt.show()
```

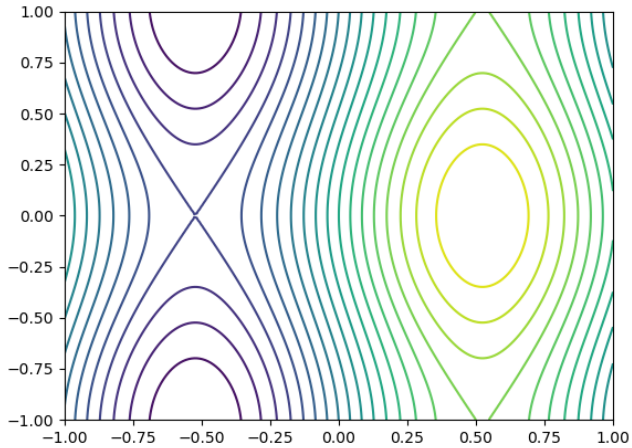
```
graphe = plt.contour(x,y,z,20)
plt.clabel(graphe,inline=1,fontsize=10)
plt.show()
```





- Donnons un deuxième exemple avec la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = 4\sin(x) + \cos(3y)$.



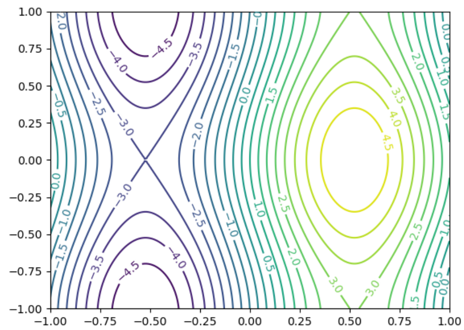


Remarques.

- Si des lignes de niveaux se croisent, alors elles sont confondues. En effet, s'il existe $a \in \mathscr{L}_K \cap \mathscr{L}_{K'}$, alors

$$K = f(a) = K' \quad \text{puis} \qquad \mathscr{L}_K = \mathscr{L}_{K'}.$$

Ci-contre, on constate un croisement, c'est la même ligne de niveau.



- **Les symétries**

Dans le cas des fonctions d'une seule variable, nous avons vu que la parité/imparité, la périodicité permettent de simplifier l'étude ou encore de tester la cohérence d'un résultat. Ces idées s'édentent aux fonctions de plusieurs variables. Voici quelques conditions de symétries.

I	$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$	$f(x, y) = f(-x, -y)$	II	$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$	$f(x, y) = -f(-x, -y)$
III	$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$	$f(x, y) = f(y, x)$	IV	$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$	$f(x, y) = f(-x, y)$
V	$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$	$f(x, y) = -f(-x, y)$	VI	$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$	$f(x, y) = f(x, -y)$
VII	$\forall\, a \in \mathbb{R}^2$	$f(a) = \varphi\big(\|a\|\big)$	avec	$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.	

Exercice 1

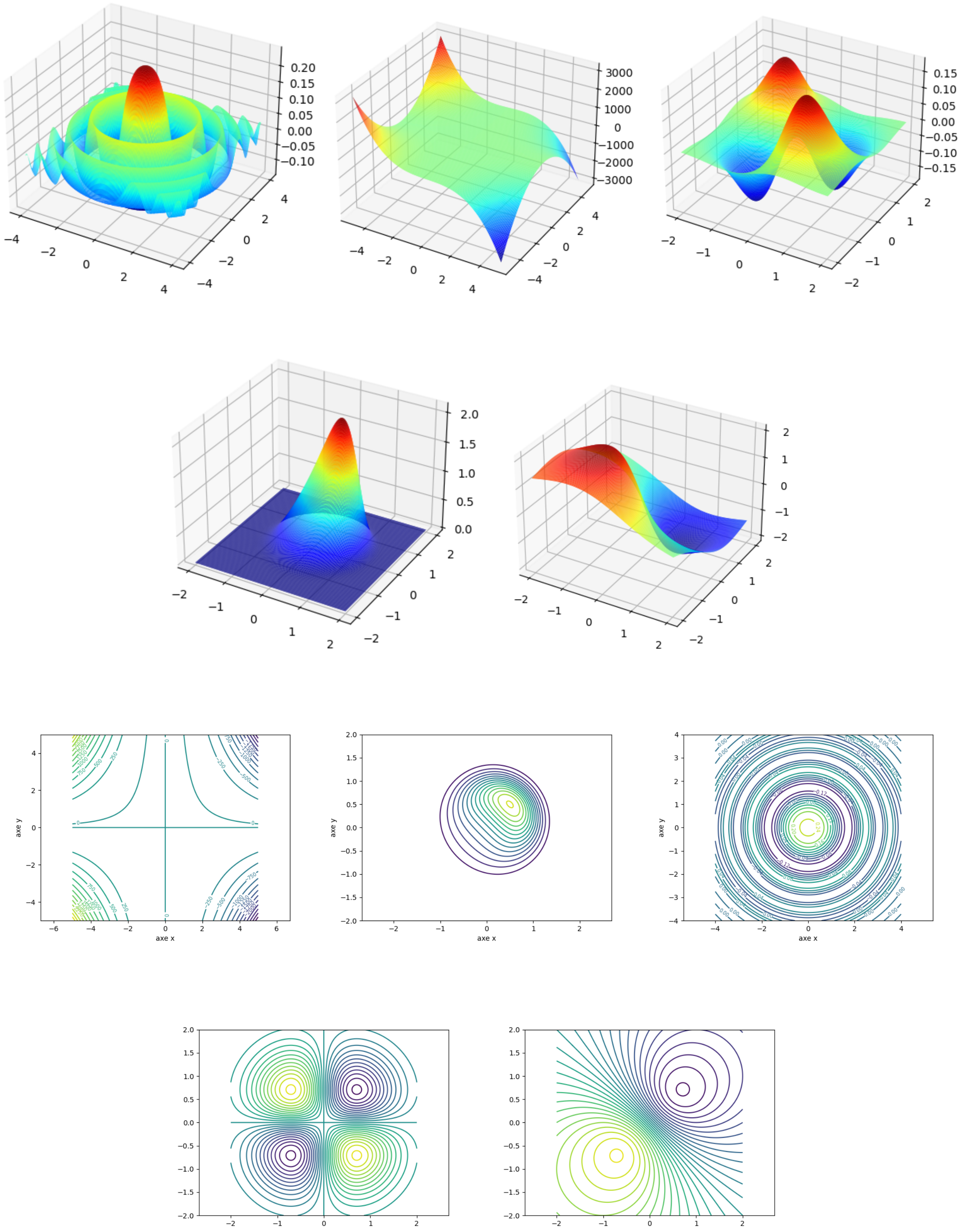
✧ Pour chacune des fonctions suivantes, préciser si la fonction vérifie une des symétries parmi I à VII.

$$f : (x, y) \mapsto \frac{\cos(x^2 + y^2)}{4 + x^2 + y^2}, \qquad g : (x, y) \mapsto 5xy - x^3y^2, \quad h : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{-(x^2+y^2)^2+x+y}$$

$$i(x, y) = -xy\exp(-x^2 - y^2), \quad j(x, y) = -3 * (x + y)/(1 + x^2 + y^2).$$

Associer à chaque fonction son graphe et ses lignes de niveau. Comment traduire géométriquement les symétries ?

p. 13



Remarque. Nous avons utilisé la commande `plt.axis('equal')` pour rendre le repère orthonormé.

1.4 Extrema

DÉFINITION **maximum, minimum, extremum**

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, une fonction.

- *On dit que f admet un **maximum** en $a \in \mathbb{R}^n$ si :* $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad f(x) \leqslant f(a).$
Dans ce cas, on dit que $f(a)$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}^n$.

- *On dit que f admet un **minimum** en $a \in \mathbb{R}^n$ si :* $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad f(x) \geqslant f(a).$
Dans ce cas, on dit que $f(a)$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}^n$.

- *On dit que f admet un extremum en $a \in \mathbb{R}^n$ si f admet un minimum ou un maximum en a.*

⚠ **Attention.** Il ne faut pas confondre le maximum $f(a)$ qui est unique, avec la valeur en laquelle le maximum est atteint (ici a) qui n'est pas unique.

Exemple. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, on définit la fonction de Rosenbrock par

$$f(x, y) = (\alpha - x)^2 + \beta\left(y - x^2\right)^2.$$

On a un minimum atteint en $a = \left(\alpha, \alpha^2\right)$ avec $f(a) = 0$.

Exercice 2

✦ Déterminer les extrema (s'ils existent) des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rclrcl} f_1(x,y,z) &=& 2x^2+4xy+2y^2+3z^2-1, & f_2(x,y,z) &=& 2xy+y^2+2xz-z^2,\\ f_3(x,y,z) &=& \mathrm{e}^{2xy+y^2+2xz-z^2}, & f_4(x,y) &=& \mathrm{e}^{1-x^2-y^2},\\ f_5(x,y) &=& \sin(x)\cos(y), & f_6(x,y) &=& \sin(x+y)\cos(x-y),\\ f_7(x,y) &=& \sin(x+y)\cos(x+y). & & & \end{array}$$

p. 13

Nous verrons aux chapitres suivants, une méthode plus systématique de recherche d'extrema.

2 Continuité des fonctions de plusieurs variables

2.1 Définitions et exemples

DÉFINITION **continuité en un point, sur $\mathbb{R}^n$**

- *Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, est continue au point $a \in \mathbb{R}^n$ si :*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_*^+, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \Big(\|x-a\| \leqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad \left|f(x) - f(a)\right| \leqslant \varepsilon \Big).$$

- *Une fonction f est continue sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si f est continue en tout point de $\mathbb{R}^n$.*

Remarque. C'est exactement la même définition que pour les fonctions d'une variable à l'exception que la valeur absolue a été généralisée par la norme.

Exemples.
- *Continuité de la norme.*

Soit $a \in \mathbb{R}^n$. À partir de l'inégalité triangulaire, on montre que $\Big| \|x\| - \|a\| \Big| \leqslant \|x-a\|$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$, pour $\alpha = \varepsilon$, on a bien

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \|x-a\| \leqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad \big|\|x\| - \|a\|\big| \leqslant \varepsilon.$$

Ce qui prouve la continuité de la norme en a et par extension sur $\mathbb{R}^n$.

• *Continuité des applications coordonnées.*
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Posons $p_i : x = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto x_i \in \mathbb{R}$. On a pour $a \in \mathbb{R}^n$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\left|p_i(x) - p_i(a)\right| = |x_i - a_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i|^2\right)^{1/2} \leqslant \|x - a\|.$$

On en déduit comme précédemment la continuité de p_i en a et par extension, la continuité sur $\mathbb{R}^n$.

2.2 Opérations sur les fonctions continues

PROPOSITION **somme, produit, quotient**

Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si *f et g sont continues sur $\mathbb{R}^n$ avec g ne s'annulant pas dans le dernier cas,*

alors
- *La somme $f + g$ est continue sur $\mathbb{R}^n$,*
- *La fonction $\lambda \cdot f$ est continue sur $\mathbb{R}^n$,*
- *Le produit $f \cdot g$ est continue sur $\mathbb{R}^n$,*
- *Le quotient f / g est continue sur $\mathbb{R}^n$.*

Résultat admis.

Application. Comme les fonctions polynomiales s'obtiennent pas somme et produit des fonctions coordonnées (qui sont continues sur $\mathbb{R}^n$), on démontre ainsi la continuité des fonctions polynomiales.

Exemple. Le produit scalaire canonique $(x, y) \in \mathbb{R}^{n2} \mapsto \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ est continue.

PROPOSITION **composition**

Soient $\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ avec $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Si
- *f continue sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans I, c'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \in \mathrm{I}$.*
- *φ est continue sur I.*

Alors *la fonction $\varphi \circ f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \varphi\big(f(x)\big) \in \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.*

Résultat admis.

Méthode

Rédaction d'une continuité

Posons $g : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto z\sqrt{(xy)^2 + 3z^4}$.
La fonction $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (xy)^2 + 3z^4$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ en tant que fonction polynomiale à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
La fonction racine carrée : $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Par composition, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \sqrt{(xy)^2 + 3z^4}$ est continue sur $\mathbb{R}^3$.
De plus, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto z$ est continue et, par produit, g est continue sur $\mathbb{R}^3$.

Exercices

Représentations graphiques

Exercice 3. ✧ Tracer les lignes de niveaux des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$.

$$f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\longmapsto 2x-3y+1,\quad g(x,y)\in\mathbb{R}^2\longmapsto x^2+y^2-5,\quad h(x,y)\in\mathbb{R}^2\longmapsto \mathrm{e}^{y-x^2},\quad i(x,y)\in\mathbb{R}\longmapsto xy.$$

≫ Solution p. 13

Recherche d'extrema

Exercice 4. ✦ On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\mathrm{e}^x\left(x\mathrm{e}^x+(yx)^2\right)$.

1. Est-ce que f possède un maximum sur $\mathbb{R}^2$?
2. Étudier la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(x,0)$.
3. En déduire un minimum pour f sur $\mathbb{R}^2$.

≫ Solution p. 14

Exercice 5. ✦ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=x^4+y^4-4xy$.

1. Comparer $f(-x,-y)$ et $f(x,y)$.
2. Soit $y\in\mathbb{R}^+$, montrer que la fonction $x\in\mathbb{R}\longmapsto f(x,y)$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$. On le note $g(y)$.
3. Étudier la fonction g et vérifier que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ atteint eu deux points.

≫ Solution p. 14

Continuité

Exercice 6. ✧ Justifier la continuité des fonctions suivantes :

$$f:x\in\mathbb{R}^n\longmapsto \|x\|^{\|x\|}\quad\text{et}\quad g:(x,y)\in\mathbb{R}^2\longmapsto\int_{x+y^2}^{y^2}\exp(t^2)\,\mathrm{d}t$$

On choisit dans le premier cas, la convention $0^0=1$.

≫ Solution p. 15

Exercice 7. ✦✦ Soit $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue.
Montrer que l'application $f:x\in\mathbb{R}^n\longmapsto h\big(\sin(\|x\|)\big)$ admet un minimum et un maximum.

≫ Solution p. 15

Exercice 8. ✦ Soit $\mathrm{C}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\right\}$ et f une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

1. En considérant l'application $g:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ définie par

$$g(t)=f\big(\cos(t),\sin(t)\big)-f\big(-\cos(t),-\sin(t)\big),$$

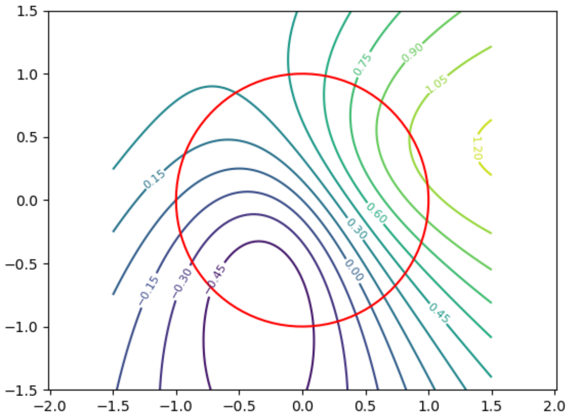
justifier qu'il existe $(x_0,y_0)\in\mathrm{C}$ tel que $f(x_0,y_0)=f(-x_0,-y_0)$.

2. Déterminer explicitement les couples (x_0,y_0) solutions pour la fonction $f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\longmapsto(x^2+y+x)/(x^2+y^2+1)$. Voici quelques lignes de niveau de la fonction, vérifier la cohérence de vos calculs.

≫ Solution p. 15

Editeur

```python
x = np.linspace(-1.5,1.5,100)
y = np.linspace(-1.5,1.5,100)
X, Y = np.meshgrid(x,y)
Z =(X**2+Y+X)/(X**2+Y**2+1)

graphe = plt.contour(X,Y,Z,15)
plt.axis('equal')
 # Pour un repère orthonormé
plt.clabel(graphe,inline=1,fontsize=8)
 # Tracé des lignes de niveau
t = np.linspace(-np.pi,np.pi,100)
plt.plot(np.cos(t),np.sin(t),'r')

plt.show()
```



Exercice 9. ✦✦✦

1. Nous savons que si une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement monotone alors elle est injective. La réciproque est fausse. Pouvez-vous donner le graphe d'un contre-exemple ?
2. L'objectif des questions suivantes est de prouver que la réciproque devient vraie si on suppose en plus que h est continue.

   On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}^2$ est convexe si

   $$\forall\, a, a' \in \mathrm{A}, \qquad \forall t \in [0;1] \quad ta + (1-t)a' \in \mathrm{A}.$$

   Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continue. On définit $f(\mathrm{A})$, la partie de $\mathbb{R}$ par

   $$f(\mathrm{A}) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathrm{A},\ y = f(x) \right\}.$$

   a) Montrer que pour toute partie convexe A, $f(\mathrm{A})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
   Pour rappel, I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$ *si pour tous* $\alpha, \beta \in \mathrm{I}$ *avec* $\alpha < \beta$, *on a* $[\alpha, \beta] \subset \mathrm{I}$.

   b) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injective et continue.

   i) Vérifier que $\mathrm{A} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < x_2\right\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

   ii) En considérant l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x_1, x_2) = h(x_1) - h(x_2)$, conclure que h est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

≫ Solution p. 16

Indications et solutions

Indication de l'exercice 4

p. 11

1. Que dire de

$$\lim_{x \to +\infty} f(x,0)\,?$$

3. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, remarquer que

$$f(x,y) \geqslant g(x)$$

Indication de l'exercice ??

p. ??

1. Remarquer qu'il existe $h = \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = h\left(\|x\|^2\right).$$

2. Penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Indication de l'exercice 7

p. 11

On rappelle que toute fonction continue définie sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Indication de l'exercice 8

p. 11

1. Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

Indication de l'exercice 9

p. 12

2bi. Un dessin dans $\mathbb{R}^2$ suffit.

2bii. Notons que $f(\mathrm{A})$ est un intervalle ne contenant par 0. Donc

$$f(\mathrm{A}) \subset \mathbb{R}_*^- \quad \text{ou} \quad f(\mathrm{A}) \subset \mathbb{R}_*^+.$$