DM 2 - sujet A

THÈME : VALEURS/VECTEURS PROPRES, INFORMATIQUE

Exercice I : racine n-ième d'une matrice à paramètre

Soient E un espace vectoriel et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, une base de E. Pour tout réel α, on définit la matrice

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & \alpha+1 \end{bmatrix}.$$

On note φ_α, l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A_α.

1. Vérifier que 1 est valeur propre de A_α. Expliciter une base de $E_1(\alpha)$, le sous-espace propre de A_α pour la valeur propre 1.
On pourra distinguer trois cas suivant la valeur de α.

2. On pose

$$\varepsilon_1 = e_1 + e_2 - e_3, \quad \varepsilon_2 = e_1 + e_2 - 2e_3 \quad \text{et} \quad F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

Vérifier que F est un plan stable par φ_α.
On note $\tilde{\varphi}_\alpha$, l'endomorphisme de F, obtenu par restriction de φ_α à F.

3. Expliciter $\tilde{A}_\alpha$, la matrice de $\tilde{\varphi}_\alpha$ dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que φ_α admet $\alpha - 1$ comme valeur propre et trouver un vecteur propre ε_3 (indépendant de α) pour cette valeur propre.

5. Donner B_α, la matrice de φ_α dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Préciser ${B_\alpha}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. En déduire que si $\alpha \geqslant 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C^n = A_\alpha$.

Exercice II : étude spectrale d'un endomorphisme de $\mathscr{C}^0([0;1])$

Soit E, l'espace vectoriel constitué des fonctions continues sur $[0;1]$. On définit l'application T qui à toute fonction $f \in E$ renvoie la fonction $T(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad T(f)(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

On note aussi E_n, l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $[0;1]$ de degré au plus n.

7. Justifier que T est un endomorphisme de E.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que E_n est stable par T.
On note T_n l'endomorphisme de E_n obtenu par restriction de T à E_n.

9. Expliciter la matrice de T_n dans la base canonique. En déduire le spectre de T_n. Que peut-on en déduire sur le spectre de T ?

10. Soit $f \in \mathrm{Ker}(T - 2\,\mathrm{id}_E)$. On note

$$m = \min_{x \in [0,1]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \max_{x \in [0,1]} f(x).$$

Soient x_0, $x_1 \in [0,1]$ tels que $m = f(x_0)$ et $f(x_1) = M$.

- **a)** Montrer que : $f(x_0/2) = m$.
- **b)** Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(2^{-n}x_0) = m$.
- **c)** En déduire que $m = f(0)$. Que dire pour M ?
- **d)** Conclure en montrant que l'espace propre pour la valeur propre 2 est exactement l'ensemble des fonctions constantes sur $[0;1]$.

Exercice III : Nombre de Hardy-Ramanujan

11. Écrire un programme qui prend en argument un entier naturel n non nul et renvoie le nombre de façons (lorsque cela est possible) de l'écrire comme la somme de deux cubes

$$n = a^3 + b^3 \quad \text{avec} \quad (a, b) \in \mathbb{N}^2, \quad a \leqslant b.$$

12. Donner le plus petit nombre naturel qui peut s'écrire de comme somme de deux cubes de deux manière différentes.

DM 2 - sujet *

THÈME : VALEURS/VECTEURS PROPRES, RÉVISIONS ANALYSE

Soit E, l'espace vectoriel constitué des fonctions continues sur $[0;1]$. On définit l'application T qui à toute fonction $f \in \mathrm{E}$ renvoie la fonction $\mathrm{T}(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{T}(f)(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

On note aussi E_n, l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $[0;1]$ de degré au plus n.

Étude spectrale de T

1. Justifier que T est un endomorphisme de E.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que E_n est stable par T.
On note T_n l'endomorphisme de E_n obtenu par restriction de T à E_n.
3. Expliciter la matrice de T_n dans la base canonique. En déduire le spectre de T_n. Que peut-on en déduire sur le spectre de T ?
4. Soit $f \in \mathrm{Ker}(\mathrm{T} - 2\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}})$. On note

$$m = \min_{x \in [0,1]} f(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{M} = \max_{x \in [0,1]} f(x).$$

Soient $x_0, x_1 \in [0,1]$ tels que $m = f(x_0)$ et $f(x_1) = \mathrm{M}$.
a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(2^{-n}x_0) = m$.
b) En déduire que $m = f(0)$. Que dire pour M ?
c) Conclure en montrant que l'espace propre pour la valeur propre 2 est exactement l'ensemble des fonctions constantes.

Application au développement eulérien de la fonction cotangente

On pose $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $\varphi, \psi : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{D}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} \quad \text{et} \quad \psi(x) = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}.$$

- **Premières propriétés de** φ

5. Justifier que l'application φ est bien posée sur $\mathbb{D}$.
6. Vérifier que l'application φ est impaire et 1-périodique.
On pourra montrer dans un premier temps que

$$\forall x \in \mathbb{D}, \qquad \frac{2x}{n^2 - x^2} = \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}.$$

7. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x}\right) = 0.$
On admet dans la suite que la fonction φ est continue sur $\mathbb{D}$.
8. Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{D}, \qquad \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\varphi(x).$$

- **Premières propriétés de ψ**

9. Vérifier que ψ est bien posée sur $\mathbb{D}$, impaire et 1-périodique.

10. Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{D}, \qquad \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\psi(x).$$

On pourra reprendre la relation de la question 6.

11. Montrer que : $\quad \psi(x) - \frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{\pi^2}{3} x.$

- **Conclusion sur le développement eulérien**

12. Montrer que $\varphi - \psi$ se prolonge par continuité sur $[0;1]$.

13. Conclure en montrant que $\varphi = \psi$.

On effectuant un changement de variable, on vient de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - \pi^2 n^2}.$$

- **Un peu de Python**

Pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, on définit $\varphi_{\mathrm{N}} : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{D}, \qquad \varphi_{\mathrm{N}}(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{2x}{n^2 - x^2}.$$

14. Écrire un programme qui prend en argument N et affiche les graphes de φ_{N} et ψ sur $[0.05;0.95]$. Tester pour $\mathrm{N} = 3$, $\mathrm{N} = 5$.

DM 2 - éléments de solution

Sujet A

1. On a

$$A_\alpha - I_3 = \begin{bmatrix} -2 & 2-\alpha & -\alpha \\ \alpha & 0 & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & \alpha \end{bmatrix}.$$

On constate que la ligne 1 est l'opposé de la ligne 3. Dès lors

$$\mathrm{rg}(A_\alpha - I_3) < 3.$$

La matrice $A_\alpha - I_3$ n'est pas inversible, 1 est valeur propre.

Soient $X = {}^t[x\ y\ z] \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} & AX = X \\ \iff\ & (A - I_3)X = 0_{3,1} \\ \iff\ & \begin{cases} -2x + (2-\alpha)y - \alpha z & = 0 \\ -\alpha x + (-\alpha)z & = 0 \\ 2x + (\alpha-2)y + \alpha z & = 0 \end{cases} \\ \iff\ & \begin{cases} 2x + (\alpha-2)y + \alpha z & = 0 \\ \alpha(x+z) & = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Procédons par disjonction des cas.

→ Si $\alpha = 0$, le système devient

$$\{2x - 2y = 0 \iff \{x = y.$$

Dès lors, $AX = X$ si et seulement si

$$X = \begin{bmatrix} x \\ x \\ z \end{bmatrix} = x \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{U_1} + z \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{U_2}.$$

Comme U_1 et U_2 sont non colinéaires, ils forment une base de $E_1(0)$.

→ Si $\alpha \neq 0$, le système est équivalent à

$$\begin{cases} 2x + (\alpha-2)y + \alpha z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (2-\alpha)x + (\alpha-2)y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

→ Si $\alpha \neq 2$, en divisant L_1 par $\alpha - 2$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, $E_1(\alpha)$ est une droite vectorielle engendrée par U_3 avec

$$U_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

→ Si $\alpha = 2$, le système se résume à

$$\{x + z = 0$$

Une base de $E_1(2)$ est par exemple donnée par les vecteurs

$$U_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad U_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Les vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sont non colinéaires, la famille des deux vecteurs $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre. C'est donc une base de F qui est donc un plan (de dimension 2).

> Formulation de la question piégeuse, il ne fallait pas oublier de justifier que F était un plan.

De plus, par linéarité de φ_α

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(\varepsilon_1) &= \varphi_\alpha(e_1) + \varphi_\alpha(e_2) - \varphi_a(e_3) \\ &= -e_1 - \alpha e_2 + 2e_3 \\ &\quad + (2-\alpha)e_1 + e_2 + (\alpha-2)e_3 \\ &\quad - (-\alpha e_1 - \alpha e_2 + (\alpha+1)e_3) \\ \varphi_\alpha(\varepsilon_1) &= e_1 + e_2 - e_3 = \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Et un calcul similaire donne

$$\varphi_\alpha(\varepsilon_2) = \varepsilon_2 + \alpha\varepsilon_1.$$

On a $\varphi_\alpha(\varepsilon_1) \in F$, $\varphi_\alpha(\varepsilon_2) \in F$. Comme $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une famille génératrice de F, le sous-espace F est stable par φ_α.

3. En reprenant le calcul précédent

$$\tilde{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.

$$A_\alpha - (\alpha-1)I_3 = \begin{bmatrix} -\alpha & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 2-\alpha & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Deux colonnes sont identiques, la matrice ne peut être inversible :

$$\alpha - 1 \in \mathrm{Sp}(A_\alpha) = \mathrm{Sp}(\varphi_\alpha).$$

Comme $C_1 - C_3 = 0$, on peut directement trouver un vecteur propre

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

On pose alors $\qquad \varepsilon_3 = e_1 - e_3.$

5. On a vu que

$$\varphi_\alpha(\varepsilon_1)=\varepsilon_1,\quad \varphi_\alpha(\varepsilon_2)=\alpha\varepsilon_1+\varepsilon_2\quad\text{et}\quad \varphi_\alpha(\varepsilon_3)=(\alpha-1)\varepsilon_3$$

D'où

$$\mathrm{B}_\alpha=\mathrm{Mat}_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)}(\varphi_\alpha)=\begin{bmatrix}1&\alpha&0\\0&1&0\\0&0&\alpha-1\end{bmatrix}.$$

On montre par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$\mathrm{B}_\alpha{}^n=\begin{bmatrix}1&n\alpha&0\\0&1&0\\0&0&(\alpha-1)^n\end{bmatrix}.$$

Formule valable pour $n=0$.

On peut aussi utiliser la formule du binôme de Newton en exprimant B_α comme somme de deux matrices qui commutent.

$$\begin{bmatrix}1&\alpha&0\\0&1&0\\0&0&\alpha-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\alpha-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&\alpha&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

La première est diagonale, la seconde nilpotente.

6. Notons que suivant le même calcul, si on pose

$$\mathrm{S}_{n,\alpha}=\begin{bmatrix}1&\alpha/n&0\\0&1&0\\0&0&(\alpha-1)^{1/n}\end{bmatrix}$$

alors $\qquad \mathrm{S}_{n,\alpha}{}^n=\mathrm{B}_\alpha.$

De plus, si on note $\mathscr{C}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ et P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ alors

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_\alpha&=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_\alpha)\\&=\mathrm{P}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi_\alpha)\,\mathrm{P}^{-1}\\ \mathrm{A}_\alpha&=\mathrm{P}\mathrm{B}_\alpha\mathrm{P}^{-1}.\end{aligned}$$

On vérifie ensuite que la matrice

$$\mathrm{C}=\mathrm{P}\mathrm{S}_{n,\alpha}\mathrm{P}^{-1}$$

est solution. En effet

$$\begin{aligned}\mathrm{C}^n&=\mathrm{P}\mathrm{S}_{n,\alpha}{}^n\mathrm{P}^{-1}\qquad\text{(récurrence sur } n)\\&=\mathrm{P}\mathrm{B}_\alpha\mathrm{P}^{-1}\\ \mathrm{C}^n&=\mathrm{A}_\alpha.\end{aligned}$$

7. Soient $f,g\in\mathrm{E}$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Pour $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{T}(\lambda f+\mu g)(x)&=(\lambda f+\mu g)\left(\frac{x}{2}\right)+(\lambda f+\mu g)\left(\frac{x+1}{2}\right)\\&=\lambda f\left(\frac{x}{2}\right)+\mu g\left(\frac{x}{2}\right)+\lambda f\left(\frac{x+1}{2}\right)+\mu g\left(\frac{x+1}{2}\right)\\&=\lambda\left(f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)+\mu\left(g\left(\frac{x}{2}\right)+g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)\\ \mathrm{T}(\lambda f+\mu g)(x)&=\lambda\mathrm{T}(f)(x)+\mu\mathrm{T}(g)(x).\end{aligned}$$

Ce résultat étant valable pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$\mathrm{T}(\lambda f+\mu g)=\lambda\mathrm{T}(f)+\mu\mathrm{T}(g).$$

L'application T est linéaire.
Par somme et composition, $\mathrm{T}(f)$ reste continue.
L'application T est un endomorphisme de E.

Bien distinguer dans la rédaction, la fonction $\mathrm{T}(f)$ et l'expression $\mathrm{T}(f)(x)$.

8. Si P est polynomiale de degré au plus n, T(P) reste polynomiale de degré au plus n par somme et composition (avec une fonction affine). D'où le résultat.

9. Soit $k\in[\![0;n]\!]$

$$\begin{aligned}\mathrm{T}\left(x^k\right)(x)&=\left(\frac{x}{2}\right)^k+\left(\frac{x+1}{2}\right)^k\\&=\frac{x^k}{2^k}+\frac{1}{2^k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^i\\ \mathrm{T}\left(x^k\right)(x)&=\frac{x^k}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^k}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}x^i.\end{aligned}$$

Si on note $\mathrm{A}=\left(a_{ij}\right)_{i,j}$ la matrice de T_n dans la base canonique alors A est triangulaire supérieure avec :

→ $\forall i\in[\![0;n]\!],\ a_{ii}=\dfrac{1}{2^{i-1}}$. (attention au décalage d'indice)

→ $\forall i,j\in[\![0;n]\!],\quad i<j\ \Rightarrow\ a_{ij}=\dfrac{1}{2^{i-1}}\dbinom{i-1}{j-1}.$

Dans le cas triangulaire, le spectre se lit sur la diagonale

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{T}_n)=\mathrm{Sp}(\mathrm{A})=\left\{2^{1-i}\ :\ i\in[\![0;n]\!]\right\}.$$

Si P est un vecteur propre pour la valeur propre λ de T_n alors P est aussi un vecteur propre de T pour la valeur propre λ :

$$\mathrm{T}(\mathrm{P})=\mathrm{T}_n(\mathrm{P})=\lambda p\quad\text{et}\quad \mathrm{P}\neq 0_{\mathbb{R}[x]}.$$

Ainsi $\qquad \mathrm{Sp}(\mathrm{T}_n)\subset\mathrm{Sp}(\mathrm{T}).$

Comme le résultat est valable pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^p}\mathrm{Sp}(\mathrm{T}_n)\subset\mathrm{Sp}(\mathrm{T})\qquad(\star).$$

Soit $\qquad \left\{2^{2-i}\ :\ i\in\mathbb{N}\right\}\subset\mathrm{Sp}(\mathrm{T}).$

Réciproquement si P est un vecteur propre de T, il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_n[x]$ et P est aussi un vecteur de T_n pour la même valeur propre. Par conséquent, on a égalité dans la relation $(\star)$.

10.a) Précisons que m et M sont bien définis car f est continue sur le segment $[0;1]$.
Comme $f\in\mathrm{Ker}\left(\mathrm{T}-2\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}}\right)$

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)=2f(x).$$

En particulier pour $x\leftarrow x_0$

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right)+f\left(\frac{x_0+1}{2}\right)=2m.$$

Que l'on réécrit sous la forme

$$\underbrace{\left(f\left(\frac{x_0}{2}\right)-m\right)}_{\geqslant 0}+\underbrace{\left(f\left(\frac{x_0+1}{2}\right)-m\right)}_{\geqslant 0}=0$$

par définition du minimum. Nécessairement

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right)-m=0$$

Ce qui conclut.

10.b) Procéder par récurrence sur la propriété

$$\mathscr{P}(n): \quad f\left(2^{-n}x_0\right)=m$$

en reprenant le raisonnement précédent.

10.c) Par continuité de f en 0

$$2^{-n}x_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
$$f(x_0)=f\left(2^{-n}x_0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0).$$

D'où $f(x_0)=f(0)$ (la suite est constante, la constante est aussi la limite).
De même, on montre que

$$\mathrm{M}=f(0).$$

Ne pas oublier l'hypothèse de continuité dans le début de la réponse.

10.d) On en déduit que

$$\forall x\in[0;1], \qquad f(0)=m\leqslant f(x)\leqslant \mathrm{M}=f(0).$$

Dit autrement, f est une fonction constante.
Réciproquement, les fonctions constantes vérifient bien

$$\forall x\in[0;1], \qquad f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)=2f(x).$$

Soit $$\mathrm{T}(f)=2f.$$

Ce qui conclut.

11. Comme a et b sont positifs, on peut se contenter de chercher a, b inférieurs à $n^{1/3}$.

```
def Hardy(n):
    m=int(n**(1/3))+1
    C=0 # Compteur
    for b in range(m):
        for a in range(b+1):
            if a**3+b**3==n:
                C+=1
    return C

>>> Hardy(126)
1
# 126=1^3+5^3

>>> Hardy(3)
0
```

12.

```
n=0
while Hardy(n)<2:
    n+=1
print(n)

>>> 1729
# on vérifie que 9^3+10^3=1^3+12^3=1729.
```

Godfrey Hardy, mathématicien britannique de la première moitié du XXe siècle, rapporte l'anecdote suivante, concernant le mathématicien indien Srinivasa Ramanujan :
" Je me souviens que j'allais le voir une fois, alors qu'il était malade, à Putney. J'avais pris un taxi portant le numéro 1729 et je remarquai que ce nombre me semblait peu intéressant, ajoutant que j'espérais que ce ne fût pas mauvais signe.
- Non, me répondit-il, c'est un nombre très intéressant : c'est le plus petit nombre décomposable en somme de deux cubes de deux manières différentes. "
Et Hardy conclut qu'il " donnait l'impression que chaque entier naturel était un de ses amis personnels ".

Sujet *

1-4 *Voir les questions 7 à 10 du sujet A.*

5. Pour justifier que φ est bien posée, il suffit de vérifier que la série

$$\sum \frac{1}{n^2-x^2}$$

converge pour tout $x\in\mathbb{D}$. Or on a

$$\frac{1}{n^2-x^2}\sim\frac{1}{n^2}$$

et la convergence de la série de Riemann $\sum 1/n^2$.
Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série converge. L'application φ est bien posée.

6. • L'ensemble $\mathbb{D}$ est centré

$$\forall x\in\mathbb{D}, \qquad -x\in\mathbb{D}.$$

De plus pour $x\in\mathbb{D}$

$$\varphi(-x)=\frac{1}{-x}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-x)}{n^2-(-x)^2}$$
$$=-\left(\frac{1}{x}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{n^2-x^2}\right)=-\varphi(x).$$

La fonction φ est impaire.

• Soit $x\in\mathbb{D}$

$$\frac{1}{n-x}-\frac{1}{n+x}=\frac{n+x-(n-x)}{(n-x)(n+x)}$$
$$=\frac{2x}{n^2-x^2}$$

Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{2x}{n^2-(x+1)^2} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n-(x+1)} - \frac{1}{n+(x+1)}$$
$$= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(n-1)-x} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(n+1)+x}.$$

À l'aide des changements d'indice $n \leftarrow n-1, n \leftarrow n+1$, il vient

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{2x}{n^2-(x+1)^2} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \frac{1}{n-x} - \sum_{n=2}^{\mathrm{N}+1} \frac{1}{n+x}$$
$$= -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right)$$
$$+ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{\mathrm{N}-x} - \frac{1}{\mathrm{N}+1-x}$$

Pour $\mathrm{N} \to +\infty$, il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2-(x+1)^2} = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2-x^2} + \frac{1}{x+1}.$$

C'est-à-dire $\qquad \varphi(x) = \varphi(x+1).$

La fonction φ est 1-périodique.

7. *Attention. On évitera les interversions de limite et somme infinie non justifiée*

$$\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-x^2} \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to 0} \frac{1}{n^2-x^2}$$

Interversion qui est fausse dans le cas général.

Soit $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$. Pour tout entier $n \geqslant 2$

$$n^2 - x^2 \geqslant n^2 - 1.$$

Puis $$\frac{1}{n^2-x^2} \leqslant \frac{1}{n^2-1}.$$

$$\left|\varphi(x) - \frac{1}{x}\right| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-x^2} \times 2x \right|$$
$$= \left| \frac{1}{1-x^2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-x^2} \times 2x \right|$$
$$\leqslant 2|x| \left(\frac{1}{1-x^2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-x^2} \right)$$
$$\leqslant 2|x| \left(\frac{1}{1-x^2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} \right).$$

Par encadrement

$$\varphi(x) - \frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Compléments.
Prouvons la continuité de φ. Pour commencer, fixons $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ et justifions la continuité sur $\mathbb{D}_{\mathrm{N}} = [-\mathrm{N};\mathrm{N}] \setminus \mathbb{Z}$ de l'application

$$f_{\mathrm{N}} : t \in \mathbb{D}_{\mathrm{N}} \mapsto \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-t^2}.$$

Soient $x, y \in \mathbb{D}_{\mathrm{N}}$. Pour $n \geqslant \mathrm{N}+1$

$$(n^2-x^2)(n^2-y^2) \geqslant (n^2-\mathrm{N}^2)^2$$

Puis la majoration

$$\frac{1}{(n^2-x^2)(n^2-y^2)} \leqslant \frac{1}{(n^2-\mathrm{N}^2)^2}.$$

$$|f_{\mathrm{N}}(x) - f_{\mathrm{N}}(y)| = \left| \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-x^2} - \frac{1}{n^2-y^2} \right|$$
$$\leqslant \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \left| \frac{1}{n^2-x^2} - \frac{1}{n^2-y^2} \right|$$
$$\leqslant \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \frac{|y^2-x^2|}{(n^2-x^2)(n^2-y^2)}$$
$$|f_{\mathrm{N}}(x) - f_{\mathrm{N}}(y)| \leqslant \mathrm{C}_{\mathrm{N}} \cdot \left| y^2 - x^2 \right|.$$

Comme

$$\left| y^2 - x^2 \right| \leqslant |y-x| \cdot |y+x| \leqslant 2\mathrm{N}|y-x|,$$

il existe $\mathrm{K} \in \mathbb{R}^+$ ne dépendant que de N tel que

$$|f_{\mathrm{N}}(x) - f_{\mathrm{N}}(y)| \leqslant \mathrm{K}|y-x|.$$

(on dit que f_{N} est lipschitzienne). Par encadrement

$$\forall x \in \mathbb{D}_{\mathrm{N}}, \qquad f_{\mathrm{N}}(y) \underset{y\to x}{\longrightarrow} f_{\mathrm{N}}(x).$$

On en déduit la continuité de f_{N} sur $[-\mathrm{N};\mathrm{N}]$. Par produit et somme, on en déduit la continuité de φ sur $\mathbb{D}_{\mathrm{N}}$. Comme ce résultat est vrai pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ et

$$\bigcup_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*} \mathbb{D}_{\mathrm{N}} = \mathbb{D},$$

on établit la continuité de φ sur $\mathbb{D}$.

8. Soit $x \in \mathbb{D}$. Notons que

$$\frac{x}{2} \in \mathbb{D} \quad \text{et} \quad \frac{x+1}{2} \in \mathbb{D}.$$

Ensuite

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)$$
$$= \frac{2}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2-(x/2)^2} + \frac{2}{1+x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+x}{n^2-((x+1)/2)^2}$$
$$= \frac{2}{x} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(2n)^2-x^2} + \frac{2}{1+x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+x}{(2n)^2-(x+1)^2}.$$

Or, pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, on a avec la question 6

$$2\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{x}{(2n)^2-x^2} + 2\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1+x}{(2n)^2-(x+1)^2}$$
$$= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2n-x} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2n+x} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2n-x-1} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2n+x+1}.$$

Si on note P_{N} (resp. I_{N}) les nombres pairs (resp. impairs) compris entre 1 et $2\mathrm{N}+1$, la quantité précédente vaut aussi

$$\sum_{k\in P_N}\frac{1}{k-x}-\sum_{k\in P_N}\frac{1}{k+x}+\sum_{k\in I_{N-1}}\frac{1}{k-x}-\sum_{k\in I_N}\frac{1}{k+x}+\frac{1}{x+1}$$
$$=\sum_{k\in P_N\cup I_{N-1}}\frac{1}{k-x}-\sum_{k\in P_N\cup I_N}\frac{1}{k+x}+\frac{1}{x+1}$$
$$=\sum_{k=0}^{2N-1}\frac{1}{k-x}-\sum_{k=0}^{2N+1}\frac{1}{k+x}+\frac{1}{x+1}$$
$$=\sum_{k=0}^{2N+1}\left(\frac{1}{k-x}-\frac{1}{k+x}\right)-\frac{1}{2N-x}+\frac{1}{2N+1-x}+\frac{1}{x+1}$$
$$=\sum_{k=0}^{2N+1}\frac{2x}{k^2-x}-\frac{1}{2N-x}+\frac{1}{2N+1-x}+\frac{1}{x+1}$$
$$\xrightarrow[N\to+\infty]{}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2x}{k^2-x^2}+\frac{1}{x+1}.$$

En reprenant la relation initiale

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)+\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{2}{x}-2\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2x}{k^2-x^2}+\frac{1}{x+1}\right)+\frac{2}{1+x}$$
$$=2\left(\frac{1}{x}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2x}{k^2-x^2}\right)$$
$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)+\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)=2\varphi(x).$$

9. Pour $x\in\mathbb{R}$
$$\sin(\pi x)=0\iff x\in\mathbb{Z}.$$

La fonction ψ est donc bien posée sur $\mathbb{D}$. Par parité du cosinus et imparité du sinus, ψ est bien impaire sur $\mathbb{D}$.

Soit $x\in\mathbb{D}$

$$\psi(x+1)=\pi\frac{\cos(\pi x+\pi)}{\sin(\pi x+\pi)}=\pi\frac{-\cos(\pi x)}{-\sin(\pi x)}$$
$$=\frac{\pi\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}=\psi(x).$$

10. Soit $x\in\mathbb{D}$

$$\frac{1}{\pi}\left(\psi\left(\frac{x}{2}\right)+\psi\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)=\frac{\cos(\pi x/2)}{\sin(\pi x/2)}+\frac{\cos\left(\pi x/2+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\pi x/2+\frac{\pi}{2}\right)}$$
$$=\frac{\cos(\pi x/2)}{\sin(\pi x/2)}+\frac{-\sin(\pi x/2)}{\cos(\pi x/2)}$$
$$=\frac{\cos(\pi x/2)^2-\sin(\pi x/2)^2}{\sin(\pi x/2)\cos(\pi x/2)}$$

Or, il y a les formules trigonométriques : pour $t\in\mathbb{R}$

$$\sin(t)=\sin(t/2+t/2)=2\sin(t/2)\cos(t/2)$$
$$\cos(t)=\cos(t/2+t/2)=\cos(t/2)^2-\sin(t/2)^2.$$

Ainsi

$$\frac{1}{\pi}\left(\psi\left(\frac{x}{2}\right)+\psi\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)=\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)/2}=\frac{2}{\pi}\psi(x)$$

Ce qui conclut.

11.

$$\psi(x)-\frac{1}{x}=\frac{\pi x\cos(\pi x)-\sin(\pi x)}{x\sin(\pi x)}$$
$$=\frac{\pi x\left(1-\frac{\pi^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)-\left(\pi x-\frac{\pi^3x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)}{\pi x^2+o\left(x^2\right)}$$
$$=\frac{-\frac{\pi^3x^3}{3}+o\left(x^3\right)}{\pi x^2+o\left(x^2\right)}$$
$$\underset{x\to0}{\sim}\frac{-\pi^3x^3}{3\pi x^2}=-\frac{\pi^2x}{3}.$$

12. Par différence de fonctions continues, $\varphi-\psi$ est continue sur $]0;1[$.
Soit $x\in]-1,1[\setminus\{0\}$

$$\varphi(x)-\psi(x)=\underbrace{\left(\varphi(x)-\frac{1}{x}\right)}_{x\to0}-\underbrace{\left(\psi(x)-\frac{1}{x}\right)}_{x\to0}.$$

Ce qui permet d'affirmer que $\varphi-\psi$ est prolongeable par continuité en 0. Si on note f le prolongement, on a donc $f(0)=0$.

Par périodicité, on déduit aussi que $\varphi-\psi$ est prolongeable par continuité en 1.

13. Si f est le prolongement sur $[0;1]$ de $\varphi-\psi$ Alors $f\in E$ et d'après les questions 8 et 9.

$$\forall x\in]0;1[,\qquad f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)=2f(x).$$

Par continuité de f en 0 et 1, la dernière égalité s'étend au cas $x=0$ et $x=1$.

$$\forall x\in[0;1],\qquad f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)=2f(x).$$

Avec les notations de la première partie

$$T(f)=2f.$$

D'après la question 4, la fonction f est constante.
Or $f(0)=0$, donc f est la fonction nulle.

$$\forall x\in]0;1[,\qquad \varphi(x)-\psi(x)=f(0)=0.$$

soit $\qquad \forall x\in]0;1[,\qquad \varphi(x)=\psi(x).$

Comme φ et ψ sont 1-périodiques

$$\forall x\in\mathbb{D},\qquad \varphi(x)=\psi(x).$$

14.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt



def phi(N,x):
    S=0
    for n in range(1,N+1):
        S+=1/(n**2-x**2)
    return 1/x-2*x*S
```

```
def psi(x):
    c=np.cos(np.pi*x)
    s=np.sin(np.pi*x)
    return np.pi *c/s

N=3
X=np.linspace(0.05,0.95,100)
Y=np.zeros(100)
Z=np.zeros(100)
for i in range(100):
    Y[i]=phi(N,X[i])
    Z[i]=psi(X[i])
plt.plot(X,Y,'--')
plt.plot(X,Z)
plt.show()
```