DS 1- sujet A

THÈMES : RÉVISIONS ECG1, VALEURS/VECTEURS PROPRES

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Exercice 1 : Valeur propre d'une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, dont on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Partie A

1. Calculer A^2 puis vérifier que A^3 est la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Justifier que 0 est l'unique valeur propre possible de f.
3. Déterminer une base et la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 0.
4. Est-il possible de trouver une base de E constituée uniquement de vecteurs propres ?

- Soient $\varepsilon_1 = (-1, -1, 1)$, $\varepsilon_2 = (2, -1, 1)$ et $\varepsilon_3 = (-1, 2, 1)$.

5. Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E.
6. Démontrer que la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$ est la matrice $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- On pose $\quad M = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

7. Déterminer deux réels α et β tels que $M = \alpha A + \beta I_3$.
8. Donner le spectre de M, en déduire l'inversibilité de M.
9. Exprimer M^{-1} en fonction des matrices I_3, M et M^2.
10. Donner M^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices I_3, A et A^2. Cette formule est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Partie B - racine carrée et commutant de f

- *Racine carrée ?*
  On veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme g de E vérifiant $g^2 = g \circ g = f$. On suppose donc par l'absurde qu'il existe un tel endomorphisme.

11. Préciser f^3 et g^6.
Soit $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(x) \neq 0_E$. Étudier la liberté de la famille $\left(x, g(x), g^2(x), g^3(x)\right)$.
12. Conclure sur l'existence d'un tel endomorphisme g.

- *Commutant*
  On définit le commutant de f comme l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f. On le note $\mathscr{C}_f$. Ainsi

$$\forall h \in \mathscr{L}(E), \qquad h \in \mathscr{C}_f \iff h \circ f = f \circ h.$$

On note aussi $\mathbb{R}[f]$ l'ensemble des polynômes en f. Ainsi $h \in \mathbb{R}[f]$ si et seulement si il existe $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que $h = P(f)$.

13. Justifier l'inclusion $\mathbb{R}[f] \subset \mathscr{C}_f$.

Prouvons l'inclusion réciproque. Soit $h \in \mathscr{C}_f$.

14. Justifier qu'il existe trois réels α, β, γ tels que $h(\varepsilon_3) = \alpha f^2(\varepsilon_3) + \beta f(\varepsilon_3) + \gamma\varepsilon_3$.
On pourra reprendre les résultats de la question 6.

15. En déduire les relations
$$h(\varepsilon_2) = \alpha f^2(\varepsilon_2) + \beta f(\varepsilon_2) + \gamma\varepsilon_2 \quad \text{et} \quad h(\varepsilon_1) = \alpha f^2(\varepsilon_1) + \beta f(\varepsilon_1) + \gamma\varepsilon_1.$$

16. Conclure en montrant que $h = \alpha f^2 + \beta f + \gamma\, \mathrm{id}_E \in \mathbb{R}[f]$.

Exercice 2 : Endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$

Soit n un entier naturel non nul, on considère $E = \mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

- Pour tout entier naturel j, on note $P^{(j)}$ la dérivée j-ième de P.
On définit la famille de polynômes $\big(P_k\big)_{k\in[[0;n]]}$ par :
$$P_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in [[1;n]], \qquad P_k(x) = \frac{x(x-k)^{k-1}}{k!}.$$

17. Prouver que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E.

18. Montrer que pour tout entier $k \in [[1;n]]$, on a :
$$P'_k(x+1) = P_{k-1}(x).$$
puis, pour tous les entiers k, j vérifiant $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n$, donner une relation entre $P_k^{(j)}(x)$ et $P_{k-j}(x-j)$.

19. Soit $P \in E$, justifier l'existence d'un $(n+1)$-uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que
$$P = a_0P_0 + a_1P_1 + \cdots + a_nP_n = \sum_{k=0}^{n} a_kP_k$$
puis établir que : $\qquad \forall j \in [[0;n]], \qquad P^{(j)}(j) = a_j.$

Ainsi, on a établi la relation :
$$\forall P \in E, \qquad P = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k)P_k.$$

- On considère l'application u définie sur E par :
$$\forall P \in E, \qquad \big(u(P)\big)(x) = P'(x+1).$$

20. Établir que u est un endomorphisme de E.

21. Écrire la matrice A de l'endomorphisme u dans la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de E.

22. Déterminer le rang de A ainsi que ses valeurs propres.

23. Peut-on trouver une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A ?

Exercice 3 : Séries alternées

L'exercice est composé de deux parties indépendantes.

- **Partie A**
Soit $(u_n)_n$ une suite positive, décroissante et de limite nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k.$$

24. Justifier que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

25. En déduire la convergence de la série $\sum(-1)^k u_k$.

26. A-t-on toujours convergence absolue de la série $\sum(-1)^k u_k$ pour toute suite $(u_n)_n$ positive, décroissante et de limite nulle ?

- **Partie B**
On se propose dans cet exercice de montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\sin n}{n}$ est convergente et de calculer sa somme.

27. On désigne par f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[a,b]$ et par λ un réel strictement positif. Montrer, grâce à une intégration par parties, que :

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

28. On rappelle que pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$.
Exprimer, pour tout réel t, $\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos(kt)$ en fonction de $\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right)$ et $\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)$.

29. En déduire que :

$$\forall t\in[0,1],\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \cos\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt)=\frac{1}{2}\left((-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)-\cos\frac{t}{2}\right).$$

30. Montrer alors que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k=(-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}.$
On pourra dans un premier temps simplifier $\int_0^1\cos(kt)\,\mathrm{d}t$.

31. Utiliser la question 27 pour conclure que la série de terme général u_n converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n}=-\frac{1}{2}.$$

Exercice 4 : Intégrale à paramètre

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par par la formule suivante :

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t.$$

- *Domaine de définition de f.*

32. Justifier que pour tout réel $a>0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge, et donner sa valeur.

33. Soit x un réel fixé. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t$.
Par conséquent, f est définie sur $\mathbb{R}$, et elle est clairement paire. On va donc l'étudier sur $]0,+\infty[$.

- *Branche infinie de la courbe représentative de f.*

34. Vérifier l'encadrement suivant, pour tout réel x strictement positif et pour tout réel t positif ou nul :

$$x\mathrm{e}^t\leqslant\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\leqslant x\mathrm{e}^t+\frac{\mathrm{e}^{-t}}{2x}.$$

35. Prouver que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$x\leqslant f(x)\leqslant x+\frac{1}{6x}.$$

En déduire la limite de $|x-f(x)|$ lorsque x tend vers 0.
On dit alors que la droite d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f.

- *Dérivabilité et monotonie de f.*

36. À l'aide du changement de variable $u = x\mathrm{e}^t$, que l'on justifiera, prouver les égalités suivantes lorsque x est un réel strictement positif :

$$f(x) = x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u.$$

37. Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que sa dérivée est donnée, pour tout réel x strictement positif par :

$$f'(x) = \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}.$$

38. Justifier, pour tout réel x strictement positif, l'égalité suivante :

$$2f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}.$$

En déduire que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ en reprenant la question précédente.

- *Étude locale de f et f' en 0.*

39. Justifier que la formule suivante est valable pour tout réel x strictement positif :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{\left(1+u^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$$

et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u\ln u}{\left(1+u^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$ est convergente.

40. **a)** À l'aide des questions précédentes, démontrer alors que l'on a :

$$f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln(x) \quad \text{et} \quad f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln(x)}{2}.$$

b) En déduire que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et préciser la valeur de $f'(0)$.

– FIN –

DS 1- sujet *

THÈMES : RÉVISIONS ECG1, VALEURS/VECTEURS PROPRES

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants.

Exercice : valeur propre/vecteur propre

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $E = \mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{x} P(t)e^{t}\,dt$ converge pour tout $P \in E$.

On définit alors la fonction $T(P) : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x}\int_{-\infty}^{x} P(t)e^{t}\,dt$. Soit T l'application définie sur E, par $T : P \mapsto T(P)$.

2. Montrer que T est linéaire.

3. Vérifier que $\operatorname{Ker} T = \{0_E\}$.

- Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, on note $e_k = x^k$.

4. Calculer $T(e_0)$.

5. Montrer que, pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, on a : $T(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)T(e_k)$.

6. Vérifier que, pour $k \in [\![1;n]\!]$, on a : $T(e_k) - e_k \in \operatorname{Vect}(e_0, \dots, e_{k-1})$. En déduire que T est un endomorphisme de E.

7. Justifier que T n'admet que 1 comme valeur propre.

8. Peut-on trouver une base de vecteurs propres de T? *c'est-à-dire, est-ce que l'endomorphisme* T *est diagonalisable?*

9. Justifier que T est un isomorphisme et en déduire une expression de T^{-1} comme polynôme en T.
On pourra commencer par justifier que $(\mathrm{id}_E - T)^{n+1} = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Problème

L'objet du problème est l'étude d'une famille de polynômes appelés polynômes de Newton. La première partie les introduit de manière algébrique. La deuxième partie, tout en étant liée à la première, développe des thèmes relevant de l'analyse.

Partie I : opérateur au différence finie

Étant donné Q appartenant à $\mathbb{R}[x]$, on se propose de déterminer toutes les polynômes P vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x+1) - P(x) = Q(x).$$

À cet effet, on introduit l'application Δ de $\mathbb{R}[x]$ dans lui-même définie lorsque $P \in \mathbb{R}[x]$ par la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x).$$

- *Spectre et injectivité de* Δ *?*

10. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$.

11. Pour $P \in \mathbb{R}[x]$ de degré n strictement positif, justifier que le degré du polynôme $\Delta(P)$ est $n-1$.

12. **a)** En déduire que 0 est la seule valeur de propre de Δ et que l'espace propre pour la valeur propre 0 est l'ensemble des polynômes constants.

b) Est-ce que Δ est une application injective ?

- *Surjectivité de Δ ?*
  On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'endomorphisme $\Delta_n : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]; \mathrm{P} \mapsto \Delta_n(\mathrm{P}) = \Delta(\mathrm{P})$.

13. Quel est le noyau de Δ_n ?
14. Montrer alors que $\mathrm{Im}\,\Delta_n = \mathbb{R}_{n-1}[x]$.
15. En déduire que l'application Δ est surjective.

- *Spectre de Δ_n*

16. Simplifier ${\Delta_n}^{n+1}$. Que peut-on en déduire sur le spectre de Δ_n ?

- *Nouvelle expression de $\Delta^n(\mathrm{Q})$.*

17. Soit $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[x]$, justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\Delta^n(\mathrm{Q})(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \mathrm{Q}(x+i).$$

On pourra commencer par écrire $\Delta = \mathrm{id}_{\mathbb{R}[x]} + (\Delta - \mathrm{id}_{\mathbb{R}[x]})$.

- *Polynômes de Newton*

18. On désigne par $\mathscr{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ constitué par les polynômes s'annulant en 0.
Montrer que la restriction de Δ à $\mathscr{E}$ est un isomorphisme de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}[x]$.
19. Déduire de la question précédente qu'il existe une suite et une seule d'éléments de $\mathbb{R}[x]$ vérifiant :

$$\mathrm{N}_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \Delta(\mathrm{N}_n) = \mathrm{N}_{n-1}, \qquad \mathrm{N}_n(0) = 0.$$

Le polynôme N_n s'appelle le polynôme de Newton d'indice n.
20. Vérifier que pour tout entier naturel n non nul et tout x réel :

$$\mathrm{N}_n(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(x-k)$$

21. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, la famille $(\mathrm{N}_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
22. On adopte la notation usuelle : $\Delta^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}[x]}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \Delta^n = \Delta \circ \Delta^{n-1}.$$

  a) Soient k, j deux entiers naturels tels que $k < j$. Montrer que $\Delta^j(\mathrm{N}_k)$ est le polynôme nul.
  b) Prouver que pour tout polynôme $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[x]$,

$$\mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(\mathrm{Q})(0)\mathrm{N}_k.$$

  c) Justifier ensuite l'écriture $\mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{+\infty} \Delta^k(\mathrm{Q})(0)\mathrm{N}_k$.

23. Le polynôme Q étant ainsi décomposé, exprimer sous une forme semblable les polynômes P vérifiant la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{P}(x+1) - \mathrm{P}(x) = \mathrm{Q}(x).$$

24. *Application*
  a) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression simple de $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{Q}(k)$ faisant intervenir P.
  b) Utiliser les résultats précédents pour retrouver la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k^2$.
  On pourra commencer par exprimer le polynôme x^2 à l'aide des polynômes N_i, $i \in \{0;1;2\}$.

- *Une racine carrée ?*

25. Justifier qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de $\mathbb{R}_n[x]$ tel que $g \circ g = \Delta_n$.

- *Étude du commutant*
  Dans la suite de cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.
  On désigne par $\mathscr{C}(\Delta_n)$ le commutant de Δ_n dans l'ensemble $\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[x])$ des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[x]$, c'est-à-dire

$$\mathscr{C}(\Delta_n) = \left\{ g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[x]) \mid g \circ \Delta_n = \Delta_n \circ g \right\}.$$

26. Pour g et h appartenant à $\mathscr{C}(\Delta_n)$, montrer que, si $g(\mathrm{N}_n) = h(\mathrm{N}_n)$, alors $g = h$.

Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
27. Justifier l'existence de $a_0, a_1, \dots, a_n$ réels tels que :

$$g(\mathrm{N}_n) = a_n \mathrm{N}_n + a_{n-1}\mathrm{N}_{n-1} + \dots + a_1 \mathrm{N}_1 + a_0 \mathrm{N}_0.$$

28. Vérifier ensuite que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$,

$$g(P) = a_n P + a_{n-1}\Delta^1(P) + \ldots + a_1\Delta^{n-1}(P) + a_0\Delta^n(P).$$

29. En déduire que la famille

$$\mathscr{F} = \left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[x]}, (\Delta_n)^1, \ldots, (\Delta_n)^{n-1}, (\Delta_n)^n\right)$$

est une base de $\mathscr{C}(\Delta_n)$. Préciser la dimension de $\mathscr{C}(\Delta_n)$.

30. On introduit d, l'endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$ qui à un polynôme P associe son polynôme dérivé P'.

a) Montrer que $d \circ \Delta = \Delta \circ d$.

b) En supposant qu'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n$ réels tels que $d = a_0\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}[x]} + a_1(\Delta)^1 + \ldots + a_n(\Delta)^n$, calculer $d(N_{n+1})$ et vérifier que $d(N_{n+1})(0) = 0$.

c) Conclure à une contradiction.

Partie II

On note toujours $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie pour tout réel x par $N_0(x) = 1$ et pour tout entier naturel n non nul

$$N_n(x) = \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}.$$

- *Recherche d'un équivalent de* $|N_n(x)|$ *lorsque* $n \to +\infty$.

On fixe x un réel non égal à un entier.

Pour t réel, on considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_n = n^t|N_n(x)|$ et $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

31. Justifier les équivalences

$$\begin{cases} v_n \sim \dfrac{t-1-x}{n} & \text{si} \quad t \neq x+1, \\ v_n \sim \dfrac{x+x^2}{2}\dfrac{1}{n^2} & \text{si} \quad t = x+1. \end{cases}$$

32. Préciser, selon le réel t, la nature de la série de terme général v_n.

33. Pour $t = x+1$, justifier la convergence de (u_n) lorsque $n \to +\infty$.

34. En déduire qu'il existe un réel strictement positif noté $C(x)$ tel que $|N_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C(x)}{n^{x+1}}$.

- *Série de Newton associée à une fonction*

On considère une application f de $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et indéfiniment dérivable sur $[0, +\infty[$. À cette application, on associe la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$a_k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}f(i).$$

35. Soit $b \in \mathbb{R}_*^+$, préciser la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque f est l'application $x \mapsto b^x$.

36. Pour n entier naturel, on note $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k$. Justifier que

$$\forall k \in [\![0; n]\!], \qquad a_k = \Delta^k(Q)(0).$$

En déduire que

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}f(i)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\mathrm{Q}(i).$$

37. Montrer alors que la fonction $x\mapsto f(x)-\mathrm{Q}(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k\mathrm{N}_k(x)$ s'annule en $0,1,\dots n$.

38. **a)** Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ qui s'annule en au moins $n+2$ valeurs réelles distinctes. Justifier que $\varphi^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n et pour tout x réel positif, il existe un réel θ tel que :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\mathrm{N}_k(x)+\mathrm{N}_{n+1}(x)f^{(n+1)}(\theta).$$

Indication : on pourra utiliser la fonction auxiliaire $\varphi:t\mapsto f(t)-\sum_{k=0}^{n}a_k\mathrm{N}_k(t)-\mathrm{N}_{n+1}(t)\mathrm{A}$, *avec* A *un réel bien choisi tel que* $\varphi(x)=0$.

39. On note toujours f une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant la propriété suivante :

il existe une constante M strictement positive telle que pour touts $x\in\mathbb{R}_+$, $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{\left|f^{(n)}(x)\right|}{n}\leqslant\mathrm{M}$. Montrer que :

$$\forall x\geqslant 0,\qquad f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\mathrm{N}_k(x).$$

40. En déduire que si une telle fonction f s'annule sur tous les entiers naturels alors c'est la fonction nulle.

– FIN –

DS 1A - solution

Exercice 1

1. On a

$$A^2 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{puis} \quad A^3 = A{\cdot}A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_3,$$

ce qui conclut.

2. Comme $A^3 = 0$, il suit que x^3 est un polynôme annulateur de A. Comme l'ensemble des valeurs propres de A est inclus dans l'ensemble des racines de x^3, 0 est la seule valeur propre.
Or la matrice A n'est pas inversible car dans le cas contraire $A^3 = 0_3$ serait inversible par produit (absurde), donc 0 est valeur propre.
Finalement, 0 est l'unique valeur propre de A et donc de f.

3. Soit $x = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Raisonnons par équivalence

$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}(f) &\iff \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases} \\ &\iff X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Comme le vecteur $(-1,-1,1) \in \mathbb{R}^3$ est non nul et qu'il engendre le noyau de f, il donne une base du noyau (qui est donc de dimension 1).

4. Non, puisqu'on en déduirait que $E = \mathrm{Ker}(f)$ et que f est non nulle (ou encore que le noyau est de dimension 1.

5. Justifions que la famille $\mathscr{B}'$ est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \gamma\varepsilon_3 = 0 &\iff \begin{cases} -\alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ -\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ -\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -\alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ -3\beta + 3\gamma = 0 \\ 2\gamma = 0 \end{cases} \\ &\iff \alpha = \beta = \gamma = 0. \end{aligned}$$

La famille est libre. Comme elle contient $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

6. D'après le calcul sur le noyau

$$f(\varepsilon_1) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Ensuite

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_2) &= f(3e_1 + \varepsilon_1) = 3f(e_1) + f(\varepsilon_1) = 3f(e_1) = (-1,-1,1) \\ &= \varepsilon_1 \\ f(\varepsilon_3) &= f(\varepsilon_1 + 3e_2) = f(\varepsilon_1) + 3f(e_2) = 3f(e_2) = (2,-1,1) \\ &= \varepsilon_2. \end{aligned}$$

On trouve

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Vérifier que $M = -A + I_3$, c'est-à-dire $\alpha = -1, \beta = 1$.

8. *Rédaction 1.*
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(M) &\iff -A + I_3 - \lambda I_3 \text{ n'est pas invsersible} \\ &\iff A + (\lambda - 1)I_3 \text{ n'est pas invsersible} \\ &\iff \lambda - 1 \in \mathrm{Sp}(A). \end{aligned}$$

Or on a vu que 0 est l'unique valeur propre de A, donc M n'admet que 1 comme valeur propre.

Rédaction 2.
La matrice M est semblable à la matrice

$$-T + I_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Comme la matrice est triangulaire, le spectre se lit sur la diagonale. Or deux matrices semblables ont même spectre, donc

$$\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(-T + I_3) = \{1\}.$$

- Comme 0 n'appartient pas au spectre de M, la matrice M est inversible.

9. On a $M - I_3 = -A$, puis $(M - I_3)^3 = (-A)^3 = 0_3$. Comme M et I_3 commutent, on peut développer par la formule du binôme

$$0 = (M - I_3)^3 = M^3 - 3M^2 + 3M - I_3.$$

Soit

$$M^3 - 3M^2 + 3M = M \cdot \left(M^2 - 3M + 3I_3\right) = I_3.$$

De même
$$\left(M^2 - 3M + 3I_3\right) \cdot M = I_3.$$

On reprouve l'inversibilité de M et

$$M^{-1} = M^2 - 3M + 3I_3.$$

10. Comme $\mathrm{M} = -\mathrm{A} + \mathrm{I}_3$ et que $-\mathrm{A}$ commute avec I_3, la formule du binôme de Newton donne

$$\begin{aligned}\mathrm{M}^n = (-\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-\mathrm{A})^k \quad \left(\text{car} (-\mathrm{A})^k\cdot \mathrm{I}_3{}^{n-k} = (-\mathrm{A})^k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{2}\binom{n}{k}(-\mathrm{A})^k \quad \left(\text{car}\, \mathrm{A}^k = 0, k \geqslant 3\right)\\ &= \binom{n}{0}(-\mathrm{A})^0 + \binom{n}{1}(-\mathrm{A})^1 + \binom{n}{2}(-\mathrm{A})^2\\ &= \mathrm{I}_3 - n\mathrm{A} + \frac{n(n-1)}{2}\mathrm{A}^2.\end{aligned}$$

Pour $n = -1$, la formule donnerait

$$\mathrm{M}^{-1} = \mathrm{I}_3 + \mathrm{A} + \mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_3 - \mathrm{M} + \mathrm{I}_3 - 2\mathrm{M} + \mathrm{M}^2 = 3\mathrm{I}_3 - 3\mathrm{M} + \mathrm{M}^2.$$

Ce qui est bien la relation précédente. Cette formule est donc également vraie pour $n = -1$.

11. Comme $\mathrm{A}^3 = 0_3$, on a $f^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$. Ensuite

$$g^6 = f^3 \circ f^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}.$$

Soient $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_0 x + \lambda_1 g(x) + \lambda_2 g^2(x) + \lambda_3 g^3(x) = 0_\mathrm{E} \qquad (\star)$$

En composant successivement par $g^5, g^4, \ldots, g^2$ et sachant que $g^k(x) = 0_\mathrm{E}$ dès que $k \geqslant 6$ on obtient

$$\begin{cases}\lambda_0 g^5(x) = 0_\mathrm{E}\\ \lambda_0 g^4(x) + \lambda_1 g^5(x) = 0_\mathrm{E}\\ \lambda_0 g^3(x) + \lambda_1 g^4(x) + \lambda_2 g^5(x) = 0_\mathrm{E}\\ \lambda_0 g^4(x) + \lambda_1 g^3(x) + \lambda_2 g^4(x) + \lambda_3 g^5(x) = 0_\mathrm{E}.\end{cases}$$

→ Si $g^5(x) \neq 0_\mathrm{E}$, ce système triangulaire se résout de proche en proche : $\lambda_0 = 0$ puis $\lambda_1 = 0 \ldots \lambda_3 = 0$.
→ Si $g^5(x) = 0_\mathrm{E}$, on a $g^4(x) = f^2(x) \neq 0$ et on trouve $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_2 = 0$. En revenant ensuite à $(\star)$, on a aussi $\lambda_3 = 0$. Finalement, la famille est libre.

12. On a une famille libre avec 4 vecteurs dans un espace de dimension 3. C'est absurde, un tel endomorphisme n'existe pas.

13. Soit $h \in \mathbb{R}[f]$, il existe donc $\mathrm{P} = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ tel que $h = \sum_{i=0}^{n} a_i f^i$. Dès lors

$$\begin{aligned}f \circ h = f \circ \left(\sum_{i=0}^{n} a_i f^i\right) &= \sum_{i=0}^{n} a_i f \circ f^i\\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i f^{\circ i} f = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i f^i\right) \circ f = h \circ f.\end{aligned}$$

Ainsi $h \in \mathscr{C}_f$. Conclusion :

$$\mathbb{R}[f] \subset \mathscr{C}_f.$$

14. On a vu que

$$f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 \quad \text{et} \quad f\left(f(\varepsilon_3)\right) = f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1.$$

La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \left(f^2(\varepsilon_3), f(\varepsilon_3), \varepsilon_3\right)$ est une base de E (question 5). En particulier, la famille est génératrice de $\mathbb{R}^3$. Comme $h(\varepsilon_3) \in \mathbb{R}^3$, il s'écrit bien comme combinaison linéaire de $\left(f^2(\varepsilon_3), f(\varepsilon_3), \varepsilon_3\right)$.

15. Partons de

$$h(\varepsilon_3) = \alpha f^2(\varepsilon_3) + \beta f(\varepsilon_3) + \gamma\varepsilon_3$$

et appliquons f,

$$f \circ h(\varepsilon_3) = \alpha f^2 \circ f(\varepsilon_3) + \beta f \circ f(\varepsilon_3) + \gamma f(\varepsilon_3).$$

Comme f et h commutent, et $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2$.

$$\begin{aligned}h(\varepsilon_2) &= h \circ f(\varepsilon_3)\\ &= f \circ h(\varepsilon_3)\\ &= \alpha f^3(\varepsilon_3) + \beta f^2(\varepsilon_3) + \gamma f(\varepsilon_3)\\ &= \alpha f^2(\varepsilon_2) + \beta f(\varepsilon_2) + \gamma\varepsilon_2.\end{aligned}$$

On obtient la même relation avec ε_1, en recomposant par l'application f.

16. Nous venons de voir que l'égalité

$$h(u) = \alpha f^2(u) + \beta f(u) + \gamma u$$

est vraie pour les vecteurs d'une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Cette relation s'étend par linéarité à tout vecteur $u \in \mathrm{E}$. Détaillons ce point.
Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Comme la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il existe $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$u = \sum_{i=1}^{3} \mu_i \varepsilon_i$$

puis par linéarité de h et de f, f^2,

$$\begin{aligned}h(u) &= \sum_{i=1}^{3} \mu_i h(\varepsilon_i)\\ &= \sum_{i=1}^{3} \mu_i \left(\alpha f^2(\varepsilon_i) + \beta f(\varepsilon_i) + \gamma\varepsilon_i\right)\\ &= \alpha f^2\left(\sum_{i=1}^{3} \mu_i\varepsilon_i\right) + \beta f\left(\sum_{i=1}^{3} \mu_i\varepsilon_i\right) + \gamma\sum_{i=1}^{3} \mu_i\varepsilon_i\\ h(u) &= \alpha f^2(u) + \beta f(u) + \gamma u.\end{aligned}$$

Finalement

$$h = \alpha f^2 + \beta f + \gamma\,\mathrm{id}_\mathrm{E} \in \mathbb{R}[f].$$

D'où l'inclusion réciproque et l'égalité

$$\mathbb{R}[f] = \mathscr{C}_f.$$

Exercice 2

17. La famille est échelonnée en degré. Comme elle contient $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$ vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

18. Soit $k \in [\![2; n]\!]$.

$$\mathrm{P}'_k(x) = \frac{(x-k)^{k-1}}{k!} + \frac{(k-1)x(x-k)^{k-2}}{k!}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
P_k'(x+1) &= \frac{(x+1-k)^{k-1}}{k!} + \frac{(k-1)(x+1)(x+1-k)^{k-2}}{k!}\\
&= \frac{(x-(k-1))^{k-1}}{k!} + \frac{(k-1)(x+1)(x-(k-1))^{k-2}}{k!}\\
&= \frac{(x-(k-1))^{k-2}(x-(k-1)+(k-1)x+(k-1))}{k!}\\
&= \frac{kx(x-(k-1))^{k-2}}{k!} = \frac{x(x-(k-1))^{k-2}}{(k-1)!} = P_{k-1}(x).
\end{aligned}$$

La formule est aussi valable pour $k=1$.
En effectuant le changement de variable $x \to x-1$, on trouve aussi

$$P_k'(x) = P_{k-1}(x-1).$$

Par récurrence, on obtient

$$P_k^{(j)}(x) = P_{k-j}(x-j).$$

19. Soit $P \in E$. Puisque $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de E, la famille est génératrice et il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x) \qquad (\star)$$

En particulier, en évaluant en 0,

$$P(0) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(0) = a_0 P_0(0) = a_0.$$

Soit $j \in [\![1;n]\!]$. En dérivant j fois la relation $(\star)$, on trouve

$$P^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k^{(j)}(x) = \sum_{k=\mathbf{j}}^{n} a_k P_k^{(j)}(x)$$

puisque si $j < k$, $P_k^{(j)} = 0_{\mathbb{R}[x]}$. En évaluant en j, la somme se simplifie

$$P^{(j)}(j) = \sum_{k=j}^{n} a_k P_{k-j}(0) = \sum_{k=j}^{n} a_k \delta_{k,j} = a_j$$

car

$$P_{k-j}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > j \\ 1 & \text{si } k = j. \end{cases}$$

20. Soit $P \in E$. Dans ce cas, P' est un polynôme de degré au plus $n-1$. Par composition avec un polynôme de degré 1, $P'(x+1)$ reste un polynôme de degré au plus $n-1$. Ainsi $u(P) \in E$.
Soient $P, Q \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
u(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)'(x+1)\\
&= \left(\lambda P' + \mu Q'\right)(x+1)\\
&= \lambda P'(x+1) + \mu Q'(x+1) = \lambda u(P) + \mu u(Q).
\end{aligned}$$

En conclusion, u est un endomorphisme de E.

21. Comme $u(P_0) = 0$ et pour tout $k \in [\![1;n]\!]$

$$u\left(P_k\right) = P_k'(x+1) = P_{k-1}(x),$$

on trouve

$$A = \operatorname{Mat}_{(P_0,\ldots,P_n)}(u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & & 0 & 1\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

22. La matrice A est une matrice de taille $(n+1, n+1)$. On constate que les n premières lignes de la matrice sont linéairement indépendantes, donc $\operatorname{rg}(A) \geqslant n$. Comme la dernière ligne est nulle, le rang de la matrice n'excède pas n. Ainsi

$$\operatorname{rg}(A) = n.$$

De plus, la matrice A est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

$$\operatorname{Sp}(A) = \{0\}.$$

23. Non car 0 est la seule valeur propre. Si une telle base existerait, les vecteurs propres seraient tous associés à la valeur propre 0. On en déduirait que A serait la matrice nulle. Ce n'est pas le cas.

24. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
S_{2(n+1)} - S_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k\\
&= (-1)^{2n+1} u_{2n+1} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2}\\
&= -u_{2n+1} + u_{2n+2} \leqslant 0
\end{aligned}$$

par décroissance de la suite u.
On en déduit que $(S_{2n})_n$ est décroissante. De même, on prouve la croissance de $(S_{2n+1})_n$. Enfin, pour $n \in \mathbb{N}$

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

25. D'après les résultats sur les suites adjacentes, les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune. Ensuite, le théorème sur les suites extraites donne la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dit autrement, la série $\sum (-1)^k u_k$ converge.

26. Faux. Pour un contre-exemple, on peut considérer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$u_k = \frac{1}{k}.$$

La série $\sum (-1)^k u_k$ ne converge pas absolument car la série harmonique diverge.

27. Intégrons par parties (les fonctions considérées sont de classe $\mathscr{C}^1$) :

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\\
&= \left[f(t)\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}\right]_a^b - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\lambda}\big(f(b)\sin(\lambda b) - f(a)\sin(\lambda a)\big) - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Comme la fonction sinus est bornée par ± 1,

$$\left|\frac{1}{\lambda} f(b)\sin(\lambda b)\right| \leqslant \left|\frac{f(b)}{\lambda}\right| \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0.$$

Et de même,

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda} f(a)\sin(\lambda a) = 0.$$

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$, donc f' est continue sur le segment $[a, b]$. La fonction f' est donc bornée :

$$\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in [a, b], \quad \left|f'(t)\right| \leqslant \mathrm{M}.$$

Dans ce cas pour tout réel $\lambda > 0$,

$$\left|f'(t)\sin(\lambda t)\right| \leqslant \mathrm{M}.$$

Puis par croissance de l'intégrale

$$\int_a^b \left|f'(t)\sin(\lambda t)\right| \mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}(b-a)$$

Mais par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \left|f'(t)\sin(\lambda t)\right| \mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}(b-a).$$

Et donc, pour tout $\lambda > 0$,

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\mathrm{M}(b-a) \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0.$$

Par encadrement

$$\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0.$$

Par combinaison linéaire

$$\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0.$$

28. On a

$$\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) = \cos\left(\frac{t}{2} + kt\right) = \cos\frac{t}{2}\cos(kt) - \sin\frac{t}{2}\sin(kt) \quad (\mathrm{L}_1)$$

et

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right) &= \cos\left(kt - \frac{t}{2}\right)\\ &= \cos(kt)\cos\frac{t}{2} + \sin(kt)\sin\frac{t}{2} \qquad (\mathrm{L}_2)\end{aligned}$$

En effectuant $(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2)/2$, on obtient

$$\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) + \cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\right) = \cos(kt)\cos\frac{t}{2}.$$

29. Soient $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0;1]$

$$\begin{aligned}
&2\cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt)\\
&= 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\frac{t}{2}\cos(kt)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\left(\cos\frac{2k+1}{2}t\right) + \cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\\
&= \sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i-1}\cos\left(\frac{2i-1}{2}t\right) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\\
&= (-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\\
&\qquad + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right) - \cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\right) - \cos\frac{t}{2}\\
&= (-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\frac{t}{2}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

30. Soit $t \in [0;1]$. En divisant la relation précédente par $\cos\frac{t}{2} \neq 0$, il vient

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = (-1)^n\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}$$

En intégrant en 0, 1 et par linéarité de l'intégrale

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\int_0^1\cos(kt)\,\mathrm{d}t = (-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}.$$

Or pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{\sin k}{k} - \frac{\sin(0)}{k} = \frac{\sin k}{k}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}u_k &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\sin k}{k}\\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\int_0^1\cos(kt)\,\mathrm{d}t\\
&= (-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

31. La fonction $t \in [0;1] \mapsto \frac{1}{2\cos\frac{t}{2}}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ par quotient.
D'après la question 27, on a donc

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^1\frac{\cos(\lambda t)}{2\cos\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Mais $\frac{2n+1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, et donc

$$\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Puisque $\left((-1)^n\right)_n$ est une suite bornée, il vient alors

$$(-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que $\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$. C'est-à-dire la série de terme général u_n converge et la somme vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n} = -\frac{1}{2}.$$

32. Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_*^+$, on a

$$\int_0^{\mathrm{A}} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-at}\right]_0^{\mathrm{A}} = \frac{1}{a}\left(1-\mathrm{e}^{-a\mathrm{A}}\right) \underset{\mathrm{A}\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{a}.$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{1}{a}$.

33. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, on a donc une intégrale généralisée en $+\infty$.
Or, lorsque $t \to +\infty$, on a

$$1+x^2\mathrm{e}^{2t} \underset{t\to+\infty}{\sim} x^2\mathrm{e}^{2t}$$

et donc

$$\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{x^2\mathrm{e}^{2t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} |x|\mathrm{e}^{t}.$$

Puis

$$\mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{e}^{t}|x| \underset{t\to+\infty}{\sim} |x|\mathrm{e}^{-t}.$$

Or on vient de voir que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge. Donc par critère de d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,dt$ converge.

34. Soient $x,\ t \in \mathbb{R}_*^+$. Comme toutes les quantités sont positives, l'inégalité demandé est équivalente à l'inégalité obtenue en plaçant chaque membre au carrée

$$x^2\mathrm{e}^{2t} \leqslant 1+x^2\mathrm{e}^{2t} \leqslant \left(x\mathrm{e}^{t}+\frac{\mathrm{e}^{-t}}{2x}\right)^2.$$

Or

$$\left(1+x^2\mathrm{e}^{2t}\right) - x^2\mathrm{e}^{2t} = 1 \geqslant 0,$$

donc l'inégalité de gauche est bien vraie et

$$\begin{aligned}
&\left(x\mathrm{e}^{t}+\frac{\mathrm{e}^{-t}}{2x}\right)^2 - \left(1+x^2\mathrm{e}^{2t}\right)\\
=&x^2\mathrm{e}^{2t}+1+\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{4x^2}-1-x^2\mathrm{e}^{2t} = \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{4x^2} \geqslant 0
\end{aligned}$$

Ce qui conclut sur l'inégalité de droite.

35. En multipliant les trois termes de l'inégalité précédemment obtenue par e^{-2t}, il vient pour tous $x,\ t \in \mathbb{R}_*^+$

$$x\mathrm{e}^{-t} \leqslant \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}} \leqslant x\mathrm{e}^{-t} + \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{2x}.$$

Les trois termes de cet encadrement sont d'intégrale convergente sur $]0,+\infty[$. Par croissance de l'intégrale avec les bornes dans le bon sens, on a donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t\\
&\leqslant x\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On poursuit à l'aide de la question 32

$$x \leqslant f(x) \leqslant x + \frac{1}{6x}.$$

- Par encadrement

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)-x| = 0.$$

36. La fonction $t \mapsto x\mathrm{e}^{t}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathscr{C}^1$, donc le changement de variable est justifié. Notons que l'intégrale définissant f est convergente, donc l'intégrale obtenue après changement de variable l'est encore.
Lorsque $t \to 0$, alors $u \to x$, et lorsque $t \to +\infty$, alors $u \to +\infty$. On a alors

$$u = x\mathrm{e}^{t} \quad\Longleftrightarrow\quad t = \ln\left(\frac{u}{x}\right)$$

et
$$\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\frac{x}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_x^{+\infty} \frac{x^2}{u^2}\sqrt{1+u^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{u}\\
&= x^2\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Notons que

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u}_{\text{Constante}} - \int_1^{x} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u.$$

Or, $x \mapsto \displaystyle\int_1^{x} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u$ est une primitive sur $]0,+\infty[$, de $x \mapsto \sqrt{1+x^2}/x^3$, donc de classe $\mathscr{C}^1$.
On en déduit donc que f est de classe $\mathscr{C}^1_1$ sur $]0,+\infty[$, et que sa dérivée est

$$f'(x) = 2x\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du - x^2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3} = \frac{2f(x)-\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

37. Soit $x > 0$ et $\mathrm{A} > x$. Alors, en posant $g(u) = \sqrt{1+u^2}$ et $h(u) = -\frac{1}{2u^2}$, qui sont deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $[x,\mathrm{A}]$ avec

$$g'(u) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \quad\text{et}\quad g'(u) = \frac{1}{u^3},$$

une intégration par parties sur le segment $[x,\mathrm{A}]$ nous donne

$$\begin{aligned}
\int_x^{\mathrm{A}} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u &= \left[-\frac{\sqrt{1+u^2}}{2u^2}\right]_x^{\mathrm{A}} + \int_x^{\mathrm{A}} \frac{du}{2u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} - \frac{\sqrt{1+\mathrm{A}^2}}{2\mathrm{A}^2} + \int_x^{\mathrm{A}} \frac{du}{2u\sqrt{1+u^2}}.
\end{aligned}$$

Lorsque $\mathrm{A} \to +\infty$, on a

$$\frac{\sqrt{1+\mathrm{A}^2}}{2\mathrm{A}^2} \underset{\mathrm{A}\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\mathrm{A}^2}}{2\mathrm{A}^2} \underset{\mathrm{A}\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\mathrm{A}} \underset{\mathrm{A}\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'autre part $$\frac{1}{2u\sqrt{1+u^2}} \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2u^2}.$$

Comme la série de Riemann $\int_1^{+\infty} 1/u^2 \,\mathrm{d}u$ converge, on a par le critère d'équivalence des intégrales de fonctions positives la convergence de $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{2u\sqrt{1+u^2}}$.
On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u &= \lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \int_x^{\mathrm{A}} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} + \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{2u\sqrt{1+u^2}}.\end{aligned}$$

Et donc, en multipliant par $2x^2$,

$$2f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}.$$

On en déduit que

$$f'(x) = \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}.$$

Comme l'intégrande est strictement positive, son intégrale sur $[x,+\infty[$ l'est aussi. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) > 0$. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

38. Soit $x > 0$ fixé, et soit $\mathrm{A} > x$. Alors, en posant $g(u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ et $h(u) = \ln u$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ avec

$$g'(u) = -\frac{u}{\left(1+u^2\right)^{3/2}}$$

et $h'(u) = \frac{1}{u}$, une intégration par parties sur le segment $[x, \mathrm{A}]$ nous donne

$$\begin{aligned}\int_x^{\mathrm{A}} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} &= \left[\frac{\ln(u)}{\sqrt{1+u^2}}\right]_x^{\mathrm{A}} + \int_x^{\mathrm{A}} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\ln(\mathrm{A})}{\sqrt{1+\mathrm{A}^2}} - \frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{\mathrm{A}} \frac{u\ln(u)}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Lorsque $\mathrm{A} \to +\infty$, on a $\frac{\ln(\mathrm{A})}{\sqrt{1+\mathrm{A}^2}} \underset{\mathrm{A}\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(\mathrm{A})}{\mathrm{A}} \underset{\mathrm{A}\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$
De plus, au voisinage de $+\infty$, on a

$$u^\alpha \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} \underset{u\to+\infty}{\sim} u^\alpha \frac{u\ln u}{u^3} \underset{u\to+\infty}{\sim} u^{\alpha-2}\ln u.$$

En particulier, pour $\alpha = 3/2$, on a

$$u^{3/2} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

de sorte que

$$\frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}} = \underset{u\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{u^{3/2}}\right).$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente [8], on en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$ converge.

Il en est donc de même de $\displaystyle\int_x^{\mathrm{A}} \frac{u\ln u}{\left(1+u^2\right)^{3/2}}\,du$, de sorte que lorsque $\mathrm{A} \to +\infty$,

$$\int_x^{\mathrm{A}} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,du \underset{\mathrm{A}\to+\infty}{\longrightarrow} \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,du$$

On déduit donc de ce qui précède que

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} &= \lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \int_x^{\mathrm{A}} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

39. On a

$$\begin{aligned}f'(x) &= x\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u = -\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + x\int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{\left(1+u^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}u \\ &= x\left(-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,du\right)\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,du \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u,$$

qui est une constante, alors que

$$-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x) \to +\infty$$

On en déduit que

$$\int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u = \underset{x\to0^+}{o}\left(-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

et donc

$$-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u \underset{x\to0^+}{\sim} -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln x$$

De même, en combinant les résultats des questions précédentes, on a

$$f(x) - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\left(-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u\right)$$

Mais d'une part, nous savons que le second terme est équivalent à $-\frac{x^2}{2}\ln x$. Soit encore $f(x) = -\frac{x^2\ln x}{2} + o\left(x^2\ln x\right)$. D'autre part,

$$\sqrt{1+x^2} - 1 = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right) - 1 = \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right) \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

de sorte que $\frac{\sqrt{1+x^2}}{2} - \frac{1}{2} \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{x^2}{4}$.
Mais $\frac{x^2}{4} = \underset{x\to0^+}{o}\left(x^2\ln x\right)$ et donc on en déduit que

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{2} - \frac{1}{2} = \underset{x\to0^+}{o}\left(x^2\ln x\right).$$

Et donc

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{1}{2} &= -\frac{x^2 \ln x}{2} + \underset{x\to 0^+}{o}\left(x^2 \ln x\right) + \underset{x\to 0^+}{o}\left(x^2 \ln x\right) \\ &= -\frac{x^2 \ln x}{2} + \underset{x\to 0^+}{o}\left(x^2 \ln x\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2 \ln x}{2}. \end{aligned}$$

40. On a vu que $f(0) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ et donc

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x \ln x}{2} = 0.$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

D'autre part,

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -x \ln x = 0 = f'(0).$$

Donc f' est continue en 0. Puisque nous avions déjà prouvé que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, on en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

DS 1* - solution

Exercice

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^t$ est continue sur $]-\infty; x]$. On a donc une intégrale généralisée en $-\infty$.

→ Si P est le polynôme nul, la convergence est directement assurée.

→ Soit P, non nul. Notons n son degré et α son coefficient dominant. On a donc

$$\mathrm{P}(t) \underset{-\infty}{\sim} \alpha t^n.$$

Puis par les croissances comparées

$$\mathrm{P}(t)\mathrm{e}^t \underset{-\infty}{\sim} \alpha t^n \mathrm{e}^t = \underset{-\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} 1/t^2 \,\mathrm{d}t$ est convergente et d'intégrande positive, le critère de négligeabilité s'applique. L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{x} \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$

est donc absolument convergente, donc convergente.

2. La linéarité de T est une conséquence de la linéarité des intégrales convergentes :

$$\forall \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathrm{E} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
$$\mathrm{T}(\lambda \mathrm{P} + \mu \mathrm{Q}) = \lambda \mathrm{T}(\mathrm{P}) + \mu \mathrm{T}(\mathrm{Q}).$$

3. Soit $\mathrm{P} \in \operatorname{Ker} \mathrm{T}$. C'est-à-dire

$$\mathrm{T}(\mathrm{P}) = 0$$

ou encore $\qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{T}(\mathrm{P})(x) = 0$

puis $\qquad \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = 0.$

Soit $x \in \mathbb{R}$, d'après la relation de Chasles

$$\int_0^x \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_{-\infty}^{x} \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t}_{=0} - \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t}_{=0} = 0.$$

La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$ est donc constante. C'est aussi la primitive de $x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{P}(x)\mathrm{e}^x$ qui s'annule en 0. Sa dérivée est la fonction nulle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{P}(x)\mathrm{e}^x = 0.$$

Comme la fonction exponentielle ne s'annule pas, P est le polynôme nul. Ainsi

$$\operatorname{Ker} \mathrm{T} \subset \{0\}.$$

Comme le noyau est un sous-espace vectoriel, on a toujours

$$\{0\} \subset \operatorname{Ker} \mathrm{T}.$$

D'où l'égalité demandée.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{T}(e_0)(x) = \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} 1 \cdot \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x} \left[\mathrm{e}^t\right]_{-\infty}^{x} = 1.$$

Dès lors, $\mathrm{T}(e_0)$ est le polynôme constant égal à 1.

5. Soient $k \in [\![0; n-1]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$. Intégrons par parties (les fonctions considérées sont de classe $\mathscr{C}^1$) sur une segment. Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$.

$$\int_{\mathrm{A}}^{x} t^{k+1}\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \left[t^{k+1}\mathrm{e}^t\right]_{\mathrm{A}}^{x} - (k+1)\int_{\mathrm{A}}^{x} t^k \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

Avec $\mathrm{A} \to -\infty$ et en multipliant chaque membre par e^{-x}, il vient

$$\mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} t^{k+1}\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = x^{k+1} - (k+1)\mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} t^k \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

Soit

$$\mathrm{T}\left(e_{k+1}\right)(x) = e_{k+1}(x) - (k+1)\mathrm{T}\left(e_k\right)(x).$$

Ce résultat étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{T}\left(e_{k+1}\right) = e_{k+1} - (k+1)\mathrm{T}\left(e_k\right).$$

6. Prouvons par récurrence que la propriété

$$\mathscr{P}(k): \quad \mathrm{T}\left(e_k\right) - e_k \in \operatorname{Vect}\left(e_0, \ldots, e_{k-1}\right)$$

est vraie pour $k \in [\![1; n]\!]$.

→ *Initialisation.* D'après la question 5 avec $k = 1$, on a

$$\mathrm{T}(e_1) = e_1 - \mathrm{T}(e_0) = e_1 - e_0$$

$\mathscr{P}(1)$ est vérifiée.

→ *Hérédité.* Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie. D'après la question 5

$$\begin{aligned}\mathrm{T}\left(e_{k+1}\right) - e_{k+1} &= -(k+1)\mathrm{T}\left(e_k\right) \\ &= \underbrace{-(k+1)e_k}_{\in \operatorname{Vect}(e_k)} - (k+1)\underbrace{\left(\mathrm{T}\left(e_k\right) - e_k\right)}_{\in \operatorname{Vect}(e_0, \ldots, e_{k-1})}.\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{T}\left(e_{k+1}\right) - e_{k+1} \in \operatorname{Vect}\left(e_1, \ldots, e_{k-1}, e_k\right)$. La propriété $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie si $\mathscr{P}(k)$ l'est.

→ *Conclusion.* On en déduit que pour tout $k \in [\![1; n]\!]$

$$\mathrm{T}\left(e_k\right) = e_k + \left(\mathrm{T}\left(e_k\right) - e_k\right) \in \operatorname{Vect}\left(e_0, \ldots, e_k\right) \subset \mathbb{R}_n[x].$$

Appartenance qui est encore vraie pour $k = 0$. Comme $(e_0, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[x]$, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e_k$$
$$T(P) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \underbrace{T(e_k)}_{\in \mathbb{R}_n[x]} \in \mathbb{R}_n[x].$$

Par linéarité de T et stabilité par combinaison linéaire de $\mathbb{R}_n[x]$.
Finalement, T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

7. D'après la question précédente, la matrice de T dans la base canonique $(e_0, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}_n[x]$ est triangulaire supérieure avec uniquement des « 1 » sur la diagonale. On sait alors que

$$\mathrm{Sp}(T) = \mathrm{Sp}\left(\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(T)\right) = \{1\}.$$

8. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une telle base $\mathscr{C}$ de E constituée de vecteurs propres. D'après la question précédente, ces vecteurs propres sont tous associés à la valeur propre 1. Dans ce cas

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(T) = I_{n+1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathrm{id}_E).$$

On en déduirait que $T = \mathrm{id}_E$, ce qui est absurde. En conclusion, il n'existe pas de base constituée uniquement de vecteurs propres de T.

9. On a vu à la question 6 que pour $k \in [\![1;n]\!]$

$$(\mathrm{id}_E - T)(e_k) \in \mathbb{R}_{k-1}[x]$$

et à la question 4,

$$(\mathrm{id}_E - T)(e_0) = 0_E.$$

On prouve par récurrence descendante que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$

$$(\mathrm{id}_E - T)^k(e_k) \in \mathbb{R}_0[x] = \mathrm{Vect}(e_0)$$

puis $$(\mathrm{id}_E - T)^{k+1}(e_k) = 0_E.$$

Et finalement

$$\forall\, k \in [\![0;n]\!], \qquad (\mathrm{id}_E - T)^{n+1}(e_k) = 0_E.$$

Comme la famille $(e_0, \dots, e_n)$ est génératrice de E, l'égalité précédente s'étend à tout vecteur de E

$$\forall P \in E, \qquad (\mathrm{id}_E - T)^{n+1}(P) = 0_E.$$

Plus simplement :

$$(\mathrm{id}_E - T)^{n+1} = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Par la formule du binôme de Newton sachant que id_E et T commutent, on a

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k T^k = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

On isole le terme $k = 0$ et on factorise par T

$$\mathrm{id}_E + T \circ \left(\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k T^{k-1} \right) = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Si on pose

$$\psi = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i+1} (-1)^{i+1} T^i.$$

On vient de montrer que

$$\psi \circ T = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad T \circ \psi = \mathrm{id}_E.$$

D'après la caractérisation des applications bijectives, T est bijective (c'est un isomorphisme) et $T^{-1} = \psi$ est un polynôme en T.

Remarque. Notons que nous savions déjà que T *est un isomorphisme :*
→ *D'après la 3,* T *est injective ;*
→ *D'après la 6,* T *est un endomorphisme de dimension finie.*

Problème
d'après ESSEC 2008

10. L'application Δ est linéaire. En effet pour $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + \mu Q)(x) &= (\lambda P + \mu Q)(x+1) - (\lambda P + \mu Q)(x) \\ &= \lambda(P(x+1) - P(x)) + \mu(Q(x+1) - Q(x)) \\ &= \lambda\Delta(P)(x) + \mu\Delta(Q)(x)\end{aligned}$$

Ainsi $$\Delta(\lambda P + \mu Q) = \lambda\Delta(P) + \mu\Delta(Q).$$

De plus si $P \in \mathbb{R}[x]$, $\Delta(P) \in \mathbb{R}[x]$.
L'application Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$.

11. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule du binôme

$$\begin{aligned}\Delta\left(x^k\right)(x) &= (x+1)^k - x^k \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i - x^k \\ \Delta\left(x^k\right)(x) &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} x^i \in \mathbb{R}_{k-1}[x].\end{aligned}$$

Comme le coefficient de $\Delta\left(x^k\right)$ devant x^{k-1} est $\binom{k}{k-1} = k \neq 0$, on peut affirmer que $\Delta\left(x^k\right)$ est exactement de degré $k-1$.
Notons aussi que $\Delta(1)(x) = 0$.
À l'aide de la linéarité de Δ et en écrivant

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{avec} \quad a_n \neq 0.$$

On a

$$\Delta(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Delta\left(x^k\right) = a_n \underbrace{\Delta\left(x^n\right)}_{\text{degré } n-1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a_k \Delta\left(x^k\right)}_{\in \mathbb{R}_{n-2}[x]}$$

Ainsi $\Delta(P)$ est de degré $n-1$.

12.a) Soient λ et $P \neq 0$ tels que

$$\Delta(P) = \lambda P.$$

Si $\lambda \neq 0$, on aussi

$$\deg \Delta(\mathrm{P}) < \deg(\lambda \mathrm{P}) = \deg(\mathrm{P}).$$

D'où la contradiction.

Si $\lambda = 0$, $\quad \Delta(\mathrm{P}) = 0$.
On constate que les polynômes constants conviennent. Par contre si P est de degré $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier

$$\deg \Delta(\mathrm{P}) = n - 1$$

alors que $\deg\left(0_{\mathbb{R}[x]}\right) = -\infty$. Ainsi le sous-espace propre est l'ensemble $\mathbb{R}_0[x]$.

12.b) Non, car le noyau de Δ n'est pas réduit à $\left\{0_{\mathbb{R}[x]}\right\}$.

13. *Remarque. On a vu que $\mathbb{R}_n[x]$ est stable par Δ. L'application Δ_n est donc bien posée. De plus, la linéarité de Δ induit la linéarité de Δ_n.*

En reprenant la question 12.a),

$$\operatorname{Ker} \Delta_n = \mathbb{R}_0[x].$$

14. En reprenant la question 11

$$\operatorname{Im} \Delta_n \subset \mathbb{R}_{n-1}[x].$$

Or par la formule du rang

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im} \Delta_n = \operatorname{rg} \Delta_n &= \dim \mathbb{R}_n[x] - \dim \mathbb{R}_0[x] \\ &= n + 1 - 1 = n \\ &= \dim \mathbb{R}_{n-1}[x]. \end{aligned}$$

D'où l'égalité

$$\operatorname{Im} \Delta_n = \mathbb{R}_{n-1}[x].$$

15. Soit $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[x]$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{n-1}[x] = \operatorname{Im} \Delta_n.$$

Il existe donc $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $\Delta_n(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$. Par définition de Δ_n comme restriction de Δ

$$\Delta(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}.$$

Le résultat est valable pour tout $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[x]$, on retrouve la définition de la surjectivité de Δ.

16. Comme le degré de $\Delta(\mathrm{P})$ est strictement inférieur à celui de P, on a

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[x], \qquad \Delta_n^{n+1}(\mathrm{P}) = 0_{\mathbb{R}[x]}.$$

Le polynôme x^{n+1} est annulateur de Δ_n et n'admet que 0 comme racine. On sait alors que 0 est la seule valeur propre possible de Δ_n. De plus, Δ_n n'est pas injective donc 0 est bien valeur propre. Par conséquent

$$\operatorname{Sp}(\Delta_n) = \{0\}.$$

Remarque. On peut aussi préciser que Δ_n est un endomorphisme induit de Δ, donc

$$\operatorname{Sp}(\Delta_n) \subset \operatorname{Sp}(\Delta).$$

Or on a vu que le spectre de Δ est réduit à $\{0\}$.

17. Posons $\tau = \Delta + \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ de sorte que pour tout polynôme Q

$$\tau(\mathrm{Q}) = \mathrm{Q}(x+1).$$

En particulier, pour tout $i \in \mathbb{N}$

$$\tau^i(\mathrm{Q}) = \mathrm{Q}(x+i).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta = \tau - \mathrm{id}_{\mathrm{E}},$$

et par la formule du binôme de Newton (sachant que τ et id_{E} commutent)

$$\Delta^n = \left(\tau - \mathrm{id}_{\mathrm{E}}\right)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} \tau^i.$$

D'où le résultat en évaluant en Q.

18. Notons $\tilde{\Delta}$ la restriction de Δ à $\mathscr{E}$. La linéarité de $\tilde{\Delta}$ est une conséquence de la linéarité de Δ.
$\rightharpoonup$ *Surjectivité de $\tilde{\Delta}$.*
Soit $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[x]$. D'après ce qui précède, il existe $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$ tel que $\Delta(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$.
Posons $\tilde{\mathrm{P}} = \mathrm{P} - \mathrm{P}(0)$ de sorte que

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathrm{P}} \in \mathscr{E} \\ &\tilde{\Delta}(\tilde{\mathrm{P}}) = \Delta(\tilde{\mathrm{P}}) = \Delta(\mathrm{P}) - \Delta(\mathrm{P}(0)) = \Delta(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}. \end{aligned}$$

Car $\mathrm{P}(0)$ s'identifie à un polynôme constant et $\operatorname{Ker} \Delta = \mathbb{R}_0[x]$.

$\rightharpoonup$ *Injectivité de $\tilde{\Delta}$.*
Soit $\mathrm{P} \in \operatorname{Ker} \tilde{\Delta}$. On a donc

$$\Delta(\mathrm{P}) = \tilde{\Delta}(\mathrm{P}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{P} \in \operatorname{Ker} \Delta = \mathbb{R}_0[x].$$

P est donc le polynôme constant. Or $\mathrm{P}(0) = 0$ car $\mathrm{P} \in \mathscr{E}$. Le polynôme P est nul. On a donc $\operatorname{Ker} \tilde{\Delta} = \{0_{\mathscr{E}}\}$ et $\tilde{\Delta}$ est injective.

$\rightharpoonup$ Finalement, $\tilde{\Delta}$ est un isomorphisme de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}[x]$.

19. Le problème est équivalent à définir la suite par récurrence

$$\mathrm{N}_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{N}_n \in \mathscr{E}, \quad \mathrm{N}_n = \tilde{\Delta}^{-1}(\mathrm{N}_{n-1}).$$

Récurrence qui est bien posée.

20. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{M}_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (x-k).$$

$$\begin{aligned}
\Delta(\mathrm{M}_n) &= \mathrm{M}_n(x+1)-\mathrm{M}_n(x)\\
&= \frac{1}{n!}\left(\prod_{k=0}^{n-1}(x+1-k)-\prod_{k=0}^{n-1}(x-k)\right)\\
&= \frac{1}{n!}\left(\prod_{k=0}^{n-1}(x-(k-1))-\prod_{k=0}^{n-1}(x-k)\right)\\
&\underset{k\leftarrow k-1}{=} \frac{1}{n!}\left(\prod_{k=-1}^{n-2}(x-k)-\prod_{k=0}^{n-1}(x-k)\right)\\
&= \frac{1}{n!}\left((x+1)\prod_{k=0}^{n-2}(x-k)-(x-(n-1))\prod_{k=0}^{n-2}(x-k)\right)\\
&= \frac{1}{n!}\left((x+1)-(x-(n-1))\right)\prod_{k=0}^{n-2}(x-k)\\
&= \frac{1}{n!}\cdot n\prod_{k=0}^{n-2}(x-k)\\
\Delta(\mathrm{M}_n) &= \mathrm{M}_{n-1}.
\end{aligned}$$

Et $\qquad \mathrm{M}_n(0)=0.$

Par unicité de la suite :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \mathrm{M}_n=\mathrm{N}_n.$$

21. Pour tout $k\in[\![0;n]\!]$, $\mathrm{N}_k\in\mathbb{R}_n[x]$.
La famille $(\mathrm{N}_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est échelonné en degré sans contenir le polynôme nul. La famille est donc libre. Comme le nombre de vecteurs est égal à la dimension de $\mathbb{R}_n[x]$, c'est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

22.a) On a vu que pour tout $\mathrm{P}\in\mathbb{R}[x]$

$$\deg\Delta(\mathrm{P})<\deg\mathrm{P}.$$

Comme $\deg\mathrm{N}_k=k$, on vérifie que

$$\deg\Delta^j(\mathrm{N}_k)<k-j<0.$$

Dit autrement, $\Delta^j(\mathrm{N}_k)$ est le polynôme nul.

22.b) D'après la question précédente, $(\mathrm{N}_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[x]$. Il existe donc $\lambda_0,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ tels que

$$\mathrm{Q}=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\mathrm{N}_k.$$

Soit $j\in[\![0;n]\!]$. Par linéarité de Δ^j

$$\Delta^j(\mathrm{Q})=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\Delta^j(\mathrm{N}_k)=\sum_{k=j}^{n}\lambda_k\Delta^j(\mathrm{N}_k)=\sum_{k=j}^{n}\lambda_k\mathrm{N}_{k-j}.$$

En évaluant en 0

$$\Delta^j(\mathrm{Q})(0)=\sum_{k=j}^{n}\lambda_k\mathrm{N}_{k-j}(0)$$

Or $\qquad \mathrm{N}_{k-j}(0)=\begin{cases}0 & \text{si}\quad k\neq j\\ 1 & \text{si}\quad k=j\end{cases}$

Il vient $\lambda_j=\Delta^j(\mathrm{Q})(0)$. Ce qui conclut.

22.c) Dès que $k>\deg\mathrm{Q}$, $\Delta^k(\mathrm{Q})$ est le polynôme nul et $\Delta^k(\mathrm{Q})(0)=0$, la somme en apparence infinie est en réalité une somme finie et il n'y a pas de problème de convergence.

23. On sait que P est un polynôme de degré $n+1$ si Q est de degré $n\in\mathbb{N}$. On a aussi

$$\mathrm{P}=\sum_{k=0}^{n+1}\Delta^k(\mathrm{P})(0)\mathrm{N}_k$$

et $\qquad \Delta(\mathrm{P})=\mathrm{Q}.$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}&=\sum_{k=0}^{n+1}\Delta^k(\mathrm{P})(0)\mathrm{N}_k=\Delta^0(\mathrm{P})(0)\mathrm{N}_0+\sum_{k=1}^{n+1}\Delta^k(\mathrm{P})(0)\mathrm{N}_k\\
&=\mathrm{P}(0)+\sum_{i=0}^{n}\Delta^{i+1}(\mathrm{P})(0)\mathrm{N}_{i+1}.
\end{aligned}$$

Comme $\qquad \Delta^{i+1}(\mathrm{P})(0)=\Delta^i(\Delta(\mathrm{P}))(0)=\Delta^i(\mathrm{Q})(0).$

Il vient $\qquad \mathrm{P}=\mathrm{P}(0)+\sum_{i=0}^{n}\Delta^i(\mathrm{Q})(0)\mathrm{N}_{i+1}.$

24.a) Par télescopage

$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Q}(k)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}(k+1)-\mathrm{P}(k)=\mathrm{P}(n+1)-\mathrm{P}(0).$$

24.b) Considérons $\mathrm{Q}(x)=x^2$ et déterminons P de sorte que $\Delta(\mathrm{P})=\mathrm{Q}$. Commençons par déterminer les coordonnées de Q dans la base $(\mathrm{N}_0,\mathrm{N}_1,\mathrm{N}_2,\mathrm{N}_3)$ de $\mathbb{R}_3[x]$.

$$\begin{aligned}
x^2&=x(x-1)+x\\
&=2\mathrm{N}_2(x)+\mathrm{N}_1(x).
\end{aligned}$$

On reprend la question 21 pour les coordonnées de P avec le choix $\mathrm{P}(0)=0$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(x)&=2\mathrm{N}_3(x)+\mathrm{N}_2(x)+0\mathrm{N}_1(x)\\
&=\frac{x(x-1)(x-2)}{3}+\frac{x(x-1)}{2}\\
&=\frac{x(x-1)}{6}(2(x-2)+3)\\
&=\frac{x(x-1)(2x-1)}{6}.
\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}k^2&=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Q}(k)\\
&=\mathrm{P}(n+1)-\mathrm{P}(0)\\
&=\frac{(n+1)n(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

25. Supposons qu'un tel endomorphisme existe. Soit $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_n[x]$ tel que

$$\Delta_n^n(\mathrm{P})\neq 0.$$

(Dit autrement, P est un polynôme de degré n). On a donc

$$g^{2n}(\mathrm{P})\neq 0$$

et g est un endomorphisme nilpotent car

$$g^{2n+2}=\Delta_n^{n+1}=0.$$

Deux cas sont possibles

$$g^{2n+1}(\mathrm{P})\neq 0\quad\text{et}\quad g^{2n}(\mathrm{P})=0,$$

ou $\qquad g^{2n}(\mathrm{P}) \neq 0 \quad$ et $\quad g^{2n+1}(\mathrm{P}) = 0.$

Dans le premier cas, on montre par récurrence (le faire) que la famille

$$\left(\mathrm{P}, g(\mathrm{P}), g^2(\mathrm{P}), \dots, g^{2n+1}(\mathrm{P})\right)$$

est une famille libre de $\mathbb{R}_n[x]$ avec $2n+2$ éléments (absurde). Dans le second cas, la famille

$$\left(\mathrm{P}, g(\mathrm{P}), g^2(\mathrm{P}), \dots, g^{2n}(\mathrm{P})\right)$$

est libre et c'est aussi absurde pour une famille de $\mathbb{R}_n[x]$.
En conclusion, il n'existe pas de tel endomorphisme.

26. Justifions par récurrence descendante que la propriété

$$\mathscr{P}(k): \quad g\left(\mathrm{N}_k\right) = h\left(\mathrm{N}_k\right)$$

est vraie pour tout $k \in [\![0; n]\!]$.

→ Pour $k = n$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie par hypothèse sur g et h.
→ Soit $k \in [\![1; n]\!]$, supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie et prouvons $\mathscr{P}(k-1)$. On a donc

$$g\left(\mathrm{N}_k\right) = h\left(\mathrm{N}_k\right)$$

puis en appliquant Δ_n

$$\Delta_n \circ g\left(\mathrm{N}_k\right) = \Delta_n \circ h\left(\mathrm{N}_k\right).$$

Or g et h commutent avec Δ_n

$$g \circ \Delta_n\left(\mathrm{N}_k\right) = h \circ \Delta_n\left(\mathrm{N}_k\right).$$

Par définition de la suite $(\mathrm{N}_n)_n$, il vient

$$g\left(\mathrm{N}_{k-1}\right) = h\left(\mathrm{N}_{k-1}\right).$$

La propriété $\mathscr{P}(k-1)$ est vérifiée.

→ Conclusion : pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

Remarque. On peut éviter la récurrence descendante en considérant la propriété

$$\mathscr{Q}(k): \quad g\left(\mathrm{N}_{n-k}\right) = h\left(\mathrm{N}_{n-k}\right).$$

Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[x]$, il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{N}_k$ puisque $\left(\mathrm{N}_k\right)_{k \in [\![0;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ (question 21).
Par linéarité de g et h :

$$\begin{aligned} h(\mathrm{P}) &= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k h\left(\mathrm{N}_k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k g\left(\mathrm{N}_k\right) = g(\mathrm{P}). \end{aligned}$$

Ce résultat étant valable pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[x]$, $h = g$.

27. On a $g(\mathrm{N}_n) \in \mathbb{R}_n[x]$ et $\left(\mathrm{N}_k\right)_{k \in [\![0;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$, donc génératrice. D'où l'existence des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que

$$g(\mathrm{N}_n) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{N}_k.$$

28. Posons

$$\begin{aligned} h &= \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} {\Delta_n}^k \\ &= a_n \,\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[x]} + a_{n-1}\Delta_n + \cdots + a_0 {\Delta_n}^n. \end{aligned}$$

En tant que polynôme en Δ_n, $h \in \mathscr{C}(\Delta_n)$.
D'après la question 27

$$g(\mathrm{N}_n) = h(\mathrm{N}_n).$$

Puis d'après la question 26

$$g = h.$$

Ce qui se traduit par

$$g(\mathrm{P}) = a_n \mathrm{P} + a_{n-1}\Delta_n(\mathrm{P}) + \ldots + a_0 {\Delta_n}^n(\mathrm{P}).$$

D'où le résultat puisque ${\Delta_n}^k(\mathrm{P}) = \Delta^k(\mathrm{P})$.

29. D'après la question précédente, la famille $\mathscr{F}$ est génératrice de $\mathscr{C}(\Delta_n)$.
Justifions que la famille $\mathscr{F}$ est libre. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \Delta_n^i = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[x])}.$$

En évaluant en N_n, il vient

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathrm{N}_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \Delta_n^i(\mathrm{N}_n) = 0_{\mathbb{R}[x]}.$$

Or la famille $\left(\mathrm{N}_i\right)_{i \in [\![0;n]\!]}$ est libre. Chaque coefficient λ_i est nul. La famille $\mathscr{F}$ est bien libre.
En conclusion, la famille $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$, sa dimension correspond à son nombre d'éléments, soit

$$\dim \mathscr{C}(\Delta_n) = n+1.$$

30.a) On a d'une part pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$

$$\Delta(\mathrm{P})(x) = \mathrm{P}(x+1) - \mathrm{P}(x) \text{ puis } d(\Delta(\mathrm{P})) = 1 \times \mathrm{P}'(x+1) - \mathrm{P}'(x)$$

par différence et composition.
D'autre part,

$$\Delta(d(\mathrm{P}))(x) = \Delta\left(\mathrm{P}'\right)(x) = \mathrm{P}'(x+1) - \mathrm{P}'(x).$$

Dès lors

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[x], \qquad d \circ \Delta(\mathrm{P}) = \Delta \circ d(\mathrm{P}).$$

Soit

$$d \circ \Delta = \Delta \circ d.$$

30.b) Dans ce cas

$$\begin{aligned} d(\mathrm{N}_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \Delta^k(\mathrm{N}_{n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{N}_{n+1-k}. \end{aligned}$$

Pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $n+1-k > 0$ et N_{n+1-k} admet 0 comme racine. Par conséquent

$$d(\mathrm{N}_{n+1})(0) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{N}_{n+1-k}(0) = 0.$$

30.c) En revenant à la définition de N_{n+1}, 0 est bien racine de N_{n+1} mais seulement d'ordre 1, c'est-à-dire

$$d(N_{n+1})(0) = N_{n+1}{}'(0) \neq 0.$$

On a donc une contradiction et l'endomorphisme de dérivation d n'est pas un polynôme de Δ.

31. On a

$$\begin{aligned} v_n &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(n+1)^t}{n^t}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\cdot\frac{\prod_{k=0}^{n}|x-k|}{\prod_{k=0}^{n-1}|x-k|}\right) \\ &= \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^t\frac{1}{(n+1)}|x-n|\right). \end{aligned}$$

Pour $n \geqslant x$

$$\begin{aligned} v_n &= t\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(\frac{n-x}{n+1}\right) \\ &= t\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(\frac{1-x/n}{1+1/n}\right) \\ &= t\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)-\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= (t-1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1-\frac{x}{n}\right). \end{aligned}$$

Comme $1/n$ et x/n ont une limite nulle lorsque $n \to +\infty$

$$\begin{aligned} v_n =&(t-1)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &+\left(-\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ =&\frac{t-1-x}{n}-\frac{t-1+x^2}{2n^2} \end{aligned}$$

→ Si $t \neq 1+x$, on a bien

$$v_n \sim \frac{t-(x+1)}{n}$$

→ et si $t = 1+x$

$$v_n = \frac{t+t^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

D'où $\quad v_n \sim \dfrac{x+x^2}{2n^2} \quad$ car $\quad x+x^2 \neq 0.$

(on rappelle que x n'est pas un entier).

31. D'après le critère de Riemann, les séries

$$\sum \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{n^2}$$

sont respectivement divergente et convergente. Par le critère d'équivalence des séries à termes de signe constant :
→ $\sum v_n$ diverge si $t \neq x+1$;
→ $\sum v_n$ converge si $t = x+1$.

32. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par télescopage

$$\begin{aligned} \ln(u_n)-\ln(u_0) &= \sum_{k=0}^{n-1}\ln(u_{k+1})-\ln(u_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k. \end{aligned}$$

Soit S la somme de le série $\sum v_k$. On a donc

$$\ln\left(\frac{u_n}{u_0}\right) = \ln(u_n)-\ln(u_0) \xrightarrow[n\infty]{} S$$

par linéarité et continuité de la fonction exponentielle

$$u_n = e^{\ln(u_n)-\ln(u_0)}u_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} u_0 e^{S}.$$

La suite (u_n) est donc convergente avec une limite non nulle.

33. Ainsi il existe $C(x) \neq 0$ tel que

$$n^{x+1}|N_n(x)| \underset{n\infty}{\sim} C(x).$$

D'où $\quad |N_n(x)| \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{C(x)}{n^{x+1}}.$

35. Dans ce cas, on a par la formule du binôme

$$a_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}b^i = (b-1)^n.$$

36. C'est une reformulation de la question 22.b).
Ensuite, la relation obtenue à la question 17 donne en particulier

$$\Delta^n(Q)(0) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}Q(i).$$

D'où le résultat.

37. Justifions par récurrence forte que la propriété

$$\mathscr{P}(k) : f(k) = Q(k)$$

est vraie pour tout $k \in [\![0;n]\!]$.

Initialisation. La relation de la question précédente pour $k = 0$ fournit directement la propriété $\mathscr{P}(0)$.

Hérédité. Soit $k \in [\![0;n-1]\!]$, supposons $\mathscr{P}(0), \ldots, \mathscr{P}(k)$ vraie. De nouveau la relation précédente donne Soit $i \in [\![0;n]\!]$.

$$\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^{k+1-i}\binom{k+1}{i}f(i) = \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^{k+1-i}\binom{k+1}{i}Q(i).$$

On isole le dernier terme :

$$f(k+1)+\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k+1-i}\binom{k+1}{i}f(i) = Q(k+1)+\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^{k+1-i}\binom{k+1}{i}Q(i).$$

Or la somme se simplifie par les hypothèses de récurrence. D'où $f(k+1) = Q(k+1)$. La propriété $\mathscr{P}(k+1)$.

Conclusion. La propriété $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![0;n]\!]$. On en déduit bien l'annulation.

Remarque. On peut aussi donner une preuve purement calculatoire :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{N}_k(i) &= \sum_{k=0}^{i} a_k \mathrm{N}_k(i) \\
&= \sum_{k=0}^{i} a_k \binom{i}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{i} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(j) \binom{i}{k} \\
&= \sum_{j=0}^{i} \sum_{k=j}^{i} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \binom{i}{k} f(j) \\
&\underset{\ell=k-j}{=} \sum_{j=0}^{i} \sum_{\ell=0}^{i-j} (-1)^{\ell} \binom{\ell+j}{j} \binom{i}{\ell+j} f(j)
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\binom{\ell+j}{j}\binom{i}{\ell+j} &= \frac{(\ell+j)!}{j!\ell!} \frac{i!}{(i-(\ell+j))!(\ell+j)!} \\
&= \frac{i!}{j!l!(j-\ell-j)!} \\
&= \frac{i!}{j!(i-j)!} \frac{(i-j)!}{\ell!(i-\ell-j)!} \\
\binom{\ell+j}{j}\binom{i}{\ell+j} &= \binom{i}{j}\binom{i-j}{\ell}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{N}_k(i) &= \sum_{j=0}^{i} \sum_{\ell=0}^{i-j} (-1)^{l} \binom{i}{j} \binom{i-j}{\ell} f(j) \\
&= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} f(j) (1-1)^{i-j} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{N}_k(i).
\end{aligned}$$

C'est-à-dire $\mathrm{Q}(i) = f(i)$.

38.a) Procédons par récurrence sur la propriété, pour $k \in [\![0, n+1]\!]$:

$$\mathscr{P}(k) : \varphi^{(k)} \text{ s'annule au moins } n+2-k \text{ fois.}$$

Initialisation. $\mathscr{P}(0)$ est vraie par hypothèse sur $\varphi = \varphi^{(0)}$.

Hérédité. Soit $k \in [\![0, n]\!]$, supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie, démontrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $b_0 < b_1 < \cdots < b_{n+1-k}$ tels que

$$\forall i \in [\![0, n+1-k]\!], \qquad \varphi^{(k)}\left(b_i\right) = 0.$$

Soit $i \in [\![0, n+1-k-1]\!]$.
On sait que $\varphi^{(k)}$ est continue sur $[b_i, b_{i+1}]$, dérivable sur $]b_i, b_{i+1}[$,

$$\varphi^{(k)}\left(b_i\right) = \varphi^{(k)}\left(b_{i+1}\right).$$

D'après le théorème de Rolle, il existe $c_i \in]b_i, b_{i+1}[$ tel que

$$\varphi^{(k+1)}\left(c_i\right) = \varphi^{(k)'}\left(c_i\right) = 0.$$

On a donc $n+2-(k+1)$ réels c_i tels que

$$b_0 < c_0 < b_1 < c_1 < \cdots < c_{n+1-k-1} < b_{n+1-k} \quad \text{et} \quad \varphi^{(k+1)}\left(c_i\right) = 0.$$

Ainsi, $\mathscr{P}(k+1)$ est prouvé car les c_i sont bien distincts.
Conclusion. Pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.
En particulier, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, $\varphi^{(n)}$ s'annule au moins $n+2-(n+1) = 1$ fois.

38.b) Comme x n'est pas entier, on peut choisir A de sorte que $\varphi(x) = 0$. De plus, les entiers de $[\![0; n]\!]$ sont aussi des zéros de la fonction φ. D'après le résultat précédent à φ (qui est bien de classe $\mathscr{C}^{n+1}$), on montre l'existence d'un zéro pour $\varphi^{(n+1)}$. Notons θ, ce zéro. Comme $\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{N}_k$ est de degré au plus n, sa dérivée $n+1$-ième est nulle. De plus N_{n+1} est de degré $n+1$ et de coefficient dominant $1/(n+1)!$. Par conséquent

$${\mathrm{N}_{n+1}}^{(n+1)} = 1.$$

On en déduit que

$$0 = \varphi^{(n+1)}(\theta) = f^{(n+1)}(\theta) - 0 + 1 \cdot \mathrm{A}.$$

D'où le résultat.

39. → Si $x = 0$, on a directement

$$f(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{N}_k(0)$$

car $\mathrm{N}_k(0) = 0$ dès que $k \geqslant 1$ et

$$a_0 \mathrm{N}_0(0) = f(0) \times 1 = f(0).$$

→ Si $x > 0$ alors D'après ce qui précède

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{N}_k(x) \right| &\leqslant |\mathrm{N}_{n+1}(x)| \cdot \left| f^{(n+1)}(\theta) \right| \\
&\leqslant (1+n)\,|\mathrm{N}_{n+1}(x)| \cdot \mathrm{M}.
\end{aligned}$$

Or $\qquad (1+n)\,|\mathrm{N}_{n+1}(x)| \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{C}(x)(1+n)}{(1+n)^{x+1}} + \dfrac{\mathrm{C}(x)}{n^x}.$

Et

$$\frac{\mathrm{C}(x)}{n^x} \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

On a par encadrement

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{N}_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x).$$

D'où le résultat.

40. Supposons donc que pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$f(m) = 0.$$

Dans ce cas,

$$f(m) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{N}_k(m) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \mathrm{N}_k(m) = 0.$$

On montre par récurrence forte sur la propriété

$$\mathscr{P}(m) : \quad a_0 = \ldots = a_m = 0$$

est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.
En conclusion, f est la fonction nulle.