DS - calcul

Question 1. On définit le polynôme P par
$$\mathrm{P}(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4.$$
Calculer P(2) et P′(2). En déduire la factorisation de P.

– – – – – – – – – – – – –

Question 2. On définit la matrice N par
$$\mathrm{N} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$
À l'aide du programme suivant, que peut-on en déduire sur le spectre de N ?

Editeur
```
import numpy as np

N=np.array([[0,3,2],[-2,5,2],[2,-3,0]])
P=np.array([-4,8,-5,1])
M=np.eye(3) # matrice Identité I3
R=np.zeros([3,3])
for i in range(4):
    R+=P[i]*M
    M=np.dot(N,M)
print(R)
```

Editeur
```
# Résultat :

>>>
[[0. 0. 0.]
 [0. 0. 0.]
 [0. 0. 0.]]
```

– – – – – – – – – – – – –

Question 3. Donner une base des deux sous-espaces propres de N.

– – – – – – – – – – – – –

Question 4. On considère un réel α, un entier $n > 1$ et l'endomorphisme T_α suivant :
$$\mathrm{T}_\alpha : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$$
$$\mathrm{P} \mapsto x(x-1)\mathrm{P}''(x) + (1+\alpha x)\mathrm{P}'(x).$$

a) Dans cette question uniquement $n = 3$. Expliciter la matrice de T_α.
b) Donner le spectre de T_α en fonction de α et n.

– – – – – – – – – – – – –

Question 5. Considérons l'intégrale

$$I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx.$$

Effectuer le changement de variables $u = \sqrt{e^x - 1}$ et calculer I.

– – – – – – – – – – – – –

Question 6.

a) Calculer $J = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$. On pourra faire un changement de variable.

b) En déduire $K = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$ à l'aide du changement de variable affine $u = \pi - x$.

– – – – – – – – – – – – –

Question 7. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ défini par

$$f(P) = -P''(1) + 2P'(1)(x-1) - 2P(1)(x-1)^2.$$

On pose aussi $Q_1 = 1$, $Q_2 = x - 1$ et $Q_3 = \frac{1}{2}(x-1)^2$.

a) Donner la matrice de f dans la base (Q_1, Q_2, Q_3) de $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Calculer $f(Q_1 - 2Q_3)$ et $f(Q_1 + 2Q_3)$.

c) En déduire tous les sous-espaces propres de f.

– – – – – – – – – – – – –

Question 8. On reprend l'endomorphisme de la question 4 avec $n = 3$. Pour quelles valeurs de α, tous les sous-espace propres sont de dimension 1 ?

NOM : **NOTE :** /10.

DS - feuille réponse

Question 1.

Question 2.

Question 3.

Question 4.

Question 5.

Question 6.

Question 7.

Question 8.

DS calcul - réponses

1. On a
$$\mathrm{P}(2) = 2^3 - 5\times 2^2 + 8\times 2 - 4 = 0$$
et $\mathrm{P}'(x) = 3x^2 - 10x + 8$
$$\mathrm{P}'(2) = 3\times 2^2 - 20 + 8 = 0.$$
On constate aussi que $\mathrm{P}(1) = 0$. Comme P est de degré 3 avec 1 comme coefficient dominant
$$\mathrm{P}(x) = (x-2)^2(x-1).$$

2. Le code montre que $\mathrm{P}(\mathrm{N}) = 0_3$. P est un polynôme annulateur de N. Par conséquent
$$\mathrm{Sp}(\mathrm{N}) \subset \mathrm{Rac}(\mathrm{P}) = \{1;2\}.$$

3. On cherche le sous-espace propre associé à 1 en résolvant $\mathrm{NX} = \mathrm{X}$, c'est-à-dire le système :
$$\begin{cases} -x+3y+2z=0 \\ -2x+4y+2z=0 \\ 2x-3y-z=0 \end{cases}$$
Ce système est équivalent à $x = y = -z$. Ainsi, le sous-espace propre associé à 1 est de dimension 1,
$$\mathrm{E}_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right).$$
L'étude du sous-espace propre associé à 2 conduit au système :
$$\begin{cases} -2x+3y+2z=0 \\ -2x+3y+2z=0 \\ 2x-3y-2z=0 \end{cases}$$
Ces trois équations se ramènent à $2x-3y-2z=0$, qui est l'équation d'un plan de $\mathbb{R}^3$.
Le sous-espace propre E_2 associé à 2 est donc de dimension 2
$$\mathrm{E}_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

4.a) Soit $k \in [\![2;n]\!]$
$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_\alpha\left(x^k\right) &= x(x-1)k(k-1)x^{k-2} + (1+\alpha x)kx^{k-1} \\
&= k(k-1)\left(x^k - x^{k-1}\right) + k\alpha x^k + kx^{k-1} \\
&= \big(k\alpha + k(k-1)\big)x^k + \big(k - k(k-1)\big)x^{k-1} \\
\mathrm{T}_\alpha\left(x^k\right) &= k(\alpha+k-1)x^k + k(2-k)x^{k-1}.
\end{aligned}$$
De plus
$$\mathrm{T}_\alpha(1) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_\alpha(x) = 1+\alpha x$$
Ainsi
$$\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(\mathrm{T}_\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(\alpha+1) & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3(\alpha+2) \end{bmatrix}.$$

4.b) Plus généralement la matrice T_α dans la base canonique est diagonale avec les éléments diagonaux
$$k(\alpha+k-1) \quad k \in [\![0;n]\!].$$
Ils constituent le spectre de T_α.

5. On a $u(x) = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$ un changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x-1}} = \frac{u^2+1}{2u}$$
Soit
$$\mathrm{d}x = \frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u,$$
et $u(\ln 2) = \sqrt{\mathrm{e}^{\ln 2} - 1} = 1$, $u(0) = 0$.
$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_0^1 u\cdot\frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int_0^1 \frac{u^2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int_0^1 \frac{(u^2+1)-1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int_0^1 1 - \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\big[u - \arctan(u)\big]_0^1 \\
&= 2\big(1-\arctan(1)\big) \\
\mathrm{I} &= 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = 2 - \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

6.a)
$$\begin{aligned}
\mathrm{J} &= \int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos(x)^2}\,\mathrm{d}x = \big[-\arctan(\cos(x))\big]_0^\pi \\
&= \arctan(1) - \arctan(-1) \\
&= 2\arctan(1) \quad \text{(arctangente est impaire)} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$
On aurait pu faire le changement de variable $u = \sin(x)$.

6.b) À l'aide du changement de variable affine $u = \pi - x$
$$\begin{aligned}
\mathrm{K} &= \int_\pi^0 \frac{(\pi-u)\sin(\pi-u)}{1+\cos(\pi-u)^2}(-\mathrm{d}u) \\
&= \int_0^\pi \frac{(\pi-u)\sin(u)}{1+\cos(u)^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \pi\int_0^\pi \frac{\sin(u)}{1+\cos(u)^2}\,\mathrm{d}u - \int_0^\pi \frac{u\sin(u)}{1+\cos(u)^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \pi\mathrm{J} - \mathrm{K}.
\end{aligned}$$

D'où $$\mathrm{K} = \frac{\pi}{2}\mathrm{J} = \frac{\pi^2}{4}.$$

7.a) Vérifier que

$$f(\mathrm{Q}_1) = -2(x-1)^2 = -4\mathrm{Q}_3, \quad f(\mathrm{Q}_2) = 2(x-1) = 2\mathrm{Q}_2,$$
$$f(\mathrm{Q}_3) = -1 = -\mathrm{Q}_1.$$

D'où
$$\mathrm{M}_{(\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2,\mathrm{Q}_3)}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

7.b) On a
$$\begin{aligned} f(\mathrm{Q}_1 - 2\mathrm{Q}_3) &= f(\mathrm{Q}_1) - 2f(\mathrm{Q}_3) = -4\mathrm{Q}_3 - 2(-\mathrm{Q}_1) \\ &= 2(\mathrm{Q}_1 - 2\mathrm{Q}_3). \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} f(\mathrm{Q}_1 + 2\mathrm{Q}_3) &= f(\mathrm{Q}_1) + 2f(\mathrm{Q}_3) = -4\mathrm{Q}_3 + 2(-\mathrm{Q}_1) \\ &= -2(\mathrm{Q}_1 + 2\mathrm{Q}_3). \end{aligned}$$

7.c) Rajoutons au calcul précédent que
$$f(\mathrm{Q}_2) = 2\mathrm{Q}_2.$$

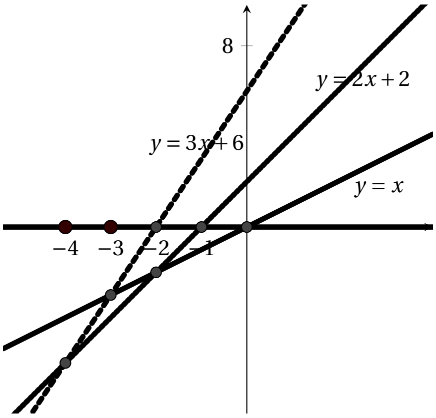
On en déduit que 2 est valeur propre avec
$$\mathrm{Vect}(\mathrm{Q}_2, \mathrm{Q}_1 - 2\mathrm{Q}_3) \subset \mathrm{E}_2(f).$$

Précisons que $(\mathrm{Q}_2, \mathrm{Q}_1 - 2\mathrm{Q}_3)$ est libre.
On a aussi -2 comme valeur propre avec
$$\mathrm{Vect}(\mathrm{Q}_1 + 2\mathrm{Q}_3) \subset \mathrm{E}_{-2}(f).$$

Or on sait que
$$\dim \mathrm{E}_{-2}(f) + \dim \mathrm{E}_2(f) \leqslant \dim \mathbb{R}_2[x].$$

Nécessairement, on a les égalités
$$\mathrm{Vect}(\mathrm{Q}_2, \mathrm{Q}_1 - 2\mathrm{Q}_3) = \mathrm{E}_2(f),$$
$$\mathrm{Vect}(\mathrm{Q}_1 + 2\mathrm{Q}_3) = \mathrm{E}_{-2}(f),$$
et le spectre se résume à $\{-2; 2\}$.

8. Si
$$\alpha \notin \{0; -1; -2; -3; -4\}.$$



Dans ce cas, on a 4 valeurs propres distinctes. Par un compte des dimensions, les espaces propres sont nécessairement de dimension 1.
Reste à traiter les cas
$$\alpha \in \{0; -1; -2; -3; -4\}.$$