Nom :

Mathématiques approfondies
Cours ECG 2

Partie II

Chapitres

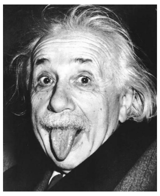
Lycée Saint Louis 2024/2025

CHAPITRE 1

Révisions en analyse

Do not worry too much
about your difficulties in mathematics, I
can assure you that mine are still greater.

ALBERT EINSTEIN



1 Suites et séries

Exercice 1. ✦ Discuter suivant la valeur $\alpha \in \mathbb{R}$ de la convergence de la série

$$\sum \frac{\dfrac{\cos(1/n)^{\pi}}{\sin(\pi/n)} e^{\ln(n+666)-\ln(n)} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{2n}}{7\cdot n^{\alpha}}.$$

Exercice 2. ✦✦ *d'après EMlyon*

Soient x un nombre réel strictement positif et (u_n) la suite réelle ainsi définie :

$$u_0 = x, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2\sqrt{u_n}}$$

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 1$.

2. **a)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est monotone et convergente.

b) Déterminer la limite de cette suite.

3. On suppose maintenant que $x \neq 1$ et on considère la série de terme général $v_n = -1 + u_n$.

a) Étudier la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de v_{n+1}/v_n.

b) Que peut-on conclure pour la série de terme général v_n ?

c) En déduire que la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}_n = \prod_{k=0}^{n} u_k.$$

2 Intégrales et intégrales généralisées

Exercice 3. ✦✦ *d'après Ecricome*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ ainsi que la suite réelle $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ suivante :

$$\mathrm{I}_0 = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x)]^n \,\mathrm{d}x.$$

A - Étude de la bijection réciproque de f

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque.
2. Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1}.
3. Justifier que :
$$\forall x \in \mathrm{J}, \qquad \cos\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \sin\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}.$$
4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathrm{J}\backslash\{1\}$ et :
$$\forall x \in \mathrm{J}\setminus\{1\}, \qquad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$
5. En déduire le développement limité en $\sqrt{2}$ de f^{-1} à l'ordre 1.

B - Étude de la suite d'intégrales

1. Justifier que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie. Calculer I_2.
2. Déterminer les réels a et b, tels que : $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}, \quad \dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{a}{1-t} + \dfrac{b}{1+t}$.
3. En posant $t = \sin x$, déterminer I_1.
4. Déterminer le sens de variation de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5. **a)** Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\}, \qquad \mathrm{I}_n \geqslant \int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)^n}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{n^2}\,\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)^n}.$$
   b) En déduire le comportement de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{I}_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{n}{n+1}\mathrm{I}_n.$$

Exercice 4. ✦✦✦ *d'après EDHEC*

Dans la suite, α désigne un nombre réel fixé supérieur ou égal à 1, et on pose :
$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}t^n\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale I est absolument convergente.
2. **a)** Calculer I_0.
   b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que si I_{n-1} est convergente, il en est de même de I_n, et trouver une relation entre I_n et I_{n-1}.
   c) En déduire la convergence de I_n et la valeur de I_n en fonction de n et α.
3. **a)** *Rappeler les formules de Taylor-Young et Taylor avec reste intégral. Préciser bien les hypothèses.*
   En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction sinus sur l'intervalle $[0,x]$, montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$
   b) En déduire que :
$$\left|\mathrm{I} - \left(\mathrm{I}_0 - \frac{\mathrm{I}_2}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{\mathrm{I}_{2n}}{(2n+1)!}\right)\right| \leqslant \mathrm{K}\mathrm{I}_{2n+1},$$
   K étant un nombre réel que l'on précisera en fonction de n.
   c) En déduire : $\mathrm{I} = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\alpha^3} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n+1)\alpha^{2n+1}}\right)$.
4. **a)** Rappeler la définition de la fonction arctangente, préciser son graphe ainsi que l'équation de la tangente en 0. Enfin, vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\mathrm{Arctan}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [0,1], \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0,1], \qquad \left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \mathrm{Arctan}(x) \right| \leqslant \frac{1}{2n+3}.$$

d) En déduire une expression très simple de I en fonction de α utilisant la fonction Arctan.

Exercice 5. ✦✦ **Exemple d'intégrales à paramètres : lien entre les fonctions Beta et Gamma**

A - Préliminaires

Soit Φ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \Phi(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)\, t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

Pour tout réel $x > 0$ fixé, on note $\varphi_x : t \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \ln(t) t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}$.

1. Justifier que Φ est bien définie.

2. Vérifier que la fonction Φ est croissante.

3. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad t \leqslant \mathrm{e}^t - 1 \leqslant t\mathrm{e}^t.$$

4. **a)** Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. Comparer $\Phi(x/2), \Phi(x+h)$ et $\Phi(2x)$ pour tout $h \in [-x/2, x]$.

b) En déduire $\lim\limits_{h \to 0} h\Phi(x+h)$.

Dans la suite, on admet que la fonction Φ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.

B - La fonction Gamma

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_*^+$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

1. En utilisant l'intégrale de Gauss $\left(\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\, \mathrm{d}u = \sqrt{\pi}\right)$, donner la valeur de $\Gamma(1/2)$.

2. Justifier que pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3. *Dérivabilité*

a) Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. Montrer que :

$$\forall h \in]-x, +\infty[, \qquad h\Phi(x) \leqslant \Gamma(x+h) - \Gamma(x) \leqslant h\Phi(x+h).$$

b) En déduire la dérivabilité de Γ sur $\mathbb{R}_*^+$ et préciser $\Gamma'(x)$.

4. **a)** Comparer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$, en déduire qu'il existe $\alpha \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$.

b) En utilisant la question 2, donner un équivalent simple de $\Gamma(x)$ en 0^+.

c) Préciser la convexité de Γ.

d) À l'aide des dernières questions, donner l'allure du graphe de Γ sur $]0;2[$.

C - La fonction Beta

✦✦✦✦ Pour tous x et y réels strictement positifs, on pose

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, \mathrm{d}t.$$

1. Prouver la convergence de l'intégrale définissant $\mathrm{B}(x,y)$.

2. **a)** Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \forall y \in \mathbb{R}_*^+, \mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x)$.

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \forall y \in \mathbb{R}_*^+, \mathrm{B}(x+1,y) = \frac{x}{y}\mathrm{B}(x,y+1)$.

3. Montrer que :
$$\forall x\in\mathbb{R}_*^+, \forall y\in\mathbb{R}_*^+,\qquad \mathrm{B}(x,y+1)=\mathrm{B}(x,y)-\mathrm{B}(x+1,y).$$
En déduire que :
$$\mathrm{B}(x+1,y)=\frac{x}{x+y}\mathrm{B}(x,y).$$

4. Soient n un entier naturel non nul et x un réel strictement positif.

a) À l'aide de l'inégalité de gauche de la question A-3, montrer que
$$\forall t\in[0;n],\qquad \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

b) Montrer que pour tout $t\in[0;n]$, on a $\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)\mathrm{e}^{-t}\leqslant\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$.

c) En déduire que
$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

5. Montrer que :
$$\forall x\in\mathbb{R}_*^+,\quad \Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x n!}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)}.$$

6. **a)** Soit $y\in\mathbb{R}_*^+$. Justifier que
$$\mathrm{B}(n+1,y)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\Gamma(y)}{n^y}\quad\text{puis}\quad \mathrm{B}(x,y)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\Gamma(y)}{x^y}.$$

b) Soient x, y, deux réels strictement positifs.

i) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$
$$\frac{\mathrm{B}(x+n,y)}{\mathrm{B}(x,y)}=\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{x+k}{x+y+k}\right)\quad\text{puis}\quad \frac{\mathrm{B}(x+n,y)n^y}{\mathrm{B}(x,y)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}.$$

ii) Conclure en montrant que
$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Exercice 6. ✦✦✦ On pose, pour tout entier naturel n,
$$\mathrm{C}_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{2n}\,\mathrm{d}x\quad\text{et}\quad \mathrm{D}_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2(\cos x)^{2n}\,\mathrm{d}x.$$

1. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\mathrm{C}_n=(2n-1)\,(\mathrm{C}_{n-1}-\mathrm{C}_n)$.
On pourra écrire $\cos^{2n}x=\cos x\cos^{2n-1}x$.

2. Établir, pour tout entier naturel n non nul, les égalités
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^2(\cos x)^{2n-2}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{C}_n}{2n-1}=\frac{\mathrm{C}_{n-1}}{2n}.$$

3. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\mathrm{C}_n=(2n-1)n\mathrm{D}_{n-1}-2n^2\mathrm{D}_n$.

4. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\dfrac{1}{n^2}=2\left(\dfrac{\mathrm{D}_{n-1}}{\mathrm{C}_{n-1}}-\dfrac{\mathrm{D}_n}{\mathrm{C}_n}\right)$.

5. **a)** Justifier, pour tout réel $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, la minoration : $\sin x\geqslant\dfrac{2}{\pi}x$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n, la majoration : $\mathrm{D}_n\leqslant\dfrac{\pi^2}{4}\dfrac{\mathrm{C}_n}{2n+2}$.

6. Prouver l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

CHAPITRE 2

Rappels et compléments d'algèbre linéaire

Un mathématicien est une machine à transformer le café en théorèmes.

PAUL ERDÖS
Mathématicien hongrois (1913-1996).

1 Sommes de sous-espaces vectoriels

1.1 Rappels : sommes de deux s.e.v et supplémentaires

Définition 1 (somme de sous-espaces, somme directe)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

- **Le sous-espace somme** est défini par $\mathrm{F}+\mathrm{G}=\left\{u+v \,\middle|\, (u,v)\in \mathrm{F}\times\mathrm{G}\right\}$.
- On dit que F et G sont en **somme directe**, notée $\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$, si $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{0_\mathrm{E}\}$.

Remarque. $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant F et G.

Proposition 2 (unicité de la décomposition)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) Les sous-espaces F et G sont en somme directe.

ii) Tout vecteur $u\in\mathrm{F}+\mathrm{G}$ s'écrit de manière *unique* sous la forme :
$$u=u_\mathrm{F}+u_\mathrm{G} \quad \text{avec} \quad u_\mathrm{F}\in\mathrm{F},\quad u_\mathrm{G}\in\mathrm{G}.$$

Définition 3 (supplémentaire)

Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont **supplémentaires** si tout vecteur de E se décompose de façon unique en une somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. C'est-à-dire

$$\forall\, w\in\mathrm{E},\quad \exists!\,(u,v)\in\mathrm{F}\times\mathrm{G},\quad w=u+v.$$

⚠ **Attention.** Il n'y a pas unicité du supplémentaire. Il ne faut pas confondre supplémentaire et complémentaire.

Remarque. La méthode Analyse-Synthèse est particulièrement adaptée à cette définition.

Exercice 7

✦✦ Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\mathrm{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$, $u_1 = (1, 0, 0)$ et $u_2 = (1, 1, 1)$.
   Montrer que $\mathrm{Vect}(u_1)$ et $\mathrm{Vect}(u_2)$ sont deux supplémentaires de F dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   Posons $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ les sous-espaces vectoriels des matrices symétriques et antisymétriques de taille n. Justifier que $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ sont supplémentaires.
   A *est symétrique si* ${}^t\mathrm{A} = \mathrm{A}$*, antisymétrique si* ${}^t\mathrm{A} = -\mathrm{A}$.

Proposition 4 (caractérisation des supplémentaires)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) Les sous-espaces F et G sont supplémentaires.

ii) $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_\mathrm{E}\}$ et $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{E}$.

On a donc : F et G sont supplémentaires si et seulement si $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$.

Précisions en dimension finie

La preuve de l'énoncé suivant s'appuie sur le *théorème de la base incomplète* : en dimension finie, on peut compléter toute famille libre de vecteurs de E en une base de E.

Proposition 5 (existence d'un supplémentaire)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire.

Remarque. Concaténation de bases.
Soient $\mathscr{B}_\mathrm{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathscr{B}_\mathrm{G} = (f_1, \ldots, f_r)$ des bases respectivement de F et G. On montre que si F et G sont en somme directe, alors la famille $(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_r)$ est une base de $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.
On en déduit l'énoncé suivant.

Proposition 6 (cas de la somme directe)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.
Si F et G sont en somme directe, alors

$$\dim(\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}) = \dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}).$$

Théorème 7 (formule de Grassmann)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors,

$$\dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}) = \dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}).$$

Exercice 8

✦✦ Preuve

1. Soit F' un supplémentaire de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ dans F. Montrer que $\mathrm{F}' \oplus \mathrm{G} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$.
2. Conclure en prouvant la formule de Grassmann.

Proposition 8 (caractérisation des supplémentaires)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.
Les trois énoncés suivants sont équivalents.

i) F et G sont supplémentaires.

ii) $F+G=E$ et $\dim(F)+\dim(G)=\dim(E)$.

iii) $F\cap G=\{0_E\}$ et $\dim(F)+\dim(G)=\dim(E)$.

Exercice 9

✦✦ Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$. On considère $u=(a_1,a_2\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et

$$F=\mathrm{Vect}(u)\quad\text{et}\quad G=\left\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n}a_kx_k=0\right\}.$$

1. F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, préciser les dimensions de F et G.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.
3. Représenter dans le plan les sous-espaces F et G lorsque $u=(1,1)$.

1.2 Compléments : sommes de p sous-espaces vectoriels

Sommes de sous-espaces vectoriels

Définition 9 (somme de s.e.v)

Soient $F_1,\dots,F_p$, des s.e.v d'un espace vectoriel E. On appelle **somme** de $F_1,\dots,F_p$, notée $\sum_{i=1}^{p}F_i$, l'ensemble

$$\sum_{i=1}^{p}F_i=\{\,u_1+\cdots+u_p \mid \forall\, i\in[\![1,p]\!],\ u_i\in F_i\,\}.$$

Remarque. $\sum_{i=1}^{p}F_i$ est un s.e.v de E, c'est la plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les F_i.

Exemples.

- Soit $\mathscr{F}=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ une famille de vecteurs de E.

$$\mathrm{vect}\big(e_1,e_2,\dots,e_p\big)=\mathrm{Vect}(e_1)+\mathrm{Vect}(e_2)+\ldots+\mathrm{Vect}(e_p).$$

- Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$. Notons $\mathscr{T}^+$, $\mathscr{T}^-$ et $\mathscr{D}$ respectivement l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes, inférieures strictes et diagonales de taille (n,n). Ces trois ensembles sont des s.e.v de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})=\mathscr{T}^++\mathscr{T}^-+\mathscr{D}.$$

Exercice 10

✧ Soient $F_1,\dots,F_p$, des s.e.v d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que $\sum_{i=1}^{p}F_i$ est bien un s.e.v de E.
2. Soit H, un sous-espace vectoriel de E tel que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $F_i\subset H$.
   Montrer que $\sum_{i=1}^{p}F_i\subset H$.

Proposition 10 (somme et dimension)

Soient $F_1,\dots,F_p$, des s.e.v d'un espace vectoriel E.
Si les F_i sont tous de dimension finie, alors $\sum_{i=1}^{p}F_i$ est aussi de dimension finie avec

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p}F_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{p}\dim(F_i).$$

Sommes directes

Définition 11 (somme directe)

La somme de p sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \dots, F_p$ d'un espace vectoriel E est dite **directe** si

$$\forall\,(u_1,\dots,u_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, \qquad u_1 + \dots + u_p = 0_E \quad \Rightarrow \quad u_1 = \dots = u_p = 0_E.$$

La somme directe des s.e.v $F_1, F_2, \dots, F_p$ est notée $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$.

Exemples.

- En reprenant l'exemple précédent, on a même $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{T}^+ \oplus \mathcal{T}^- \oplus \mathcal{D}$.
- Si pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $F_i = \mathrm{Vect}(e_i)$ où e_i est un vecteur de E non nul alors la somme $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$ est directe si et seulement si la famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est libre.

Proposition 12 (somme directe et unicité)

Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des s.e.v d'un e.v E. On a équivalence entre :

i) La somme $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$ est directe.

ii) Tout vecteur de $F_1 + F_2 + \dots + F_p$ s'écrit d'une manière unique comme somme de vecteurs de $F_1, F_2, \dots, F_p$. Autrement dit, pour tout $u \in F_1 + F_2 + \dots + F_p$

$$\exists!\,(u_1, u_2, \dots, u_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p, \qquad u = u_1 + u_2 + \dots + u_p.$$

Exercice 11

✦ Soient F_1, F_2 et F_3 trois s.e.v de E tels que

$$F_1 \cap F_2 = \{0_E\}, \quad F_2 \cap F_3 = \{0_E\} \quad \text{et} \quad F_1 \cap F_3 = \{0_E\}.$$

A-t-on nécessairement $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$?

Théorème 13 (caractérisation par concaténation)

Soient $F_1, \dots, F_p$ des s.e.v de dimension finie d'un espace vectoriel E. Soient $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$,…, $\mathcal{B}_p$, des bases respectivement de F_1, F_2, …, F_p. On a équivalence entre les énoncés suivants.

i) La somme $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$ est directe.

ii) La famille $\mathcal{B}$, obtenue par concaténation des bases $\mathcal{B}_i$, est une base de $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$.

Exercice 12

✦✦ **Exemple.** Dans $\mathbb{R}^4$, on pose

$$F = \{(x, y, z, t) \mid x + y = z + t = 0\}, \quad G = \mathrm{Vect}(u), \quad H = \mathrm{Vect}(v) \quad \text{avec} \left\{ \begin{array}{lcl} u & = & (1,0,1,0) \\ v & = & (0,1,0,1). \end{array} \right.$$

1. Donner une base de F.
2. Vérifier que $F \oplus G \oplus H = \mathbb{R}^4$ en utilisant l'énoncé précédent.

Théorème 14 (caractérisation par les dimensions)

Soient $\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_p$ des s.e.v de dimension finie d'un espace E. On a l'équivalence entre les énoncés suivants.

i) La somme $\sum\limits_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ est directe.

ii) $\dim\left(\sum\limits_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{p} \dim(\mathrm{F}_i)$.

Exemple. Reprenons l'exemple précédent.

$$\dim\left(\mathscr{T}^+\right) + \dim\left(\mathscr{T}^-\right) + \dim(\mathscr{D}) = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n = n^2 = \dim\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right).$$

Exercice 13

✦ Soient F_1, F_2 et F_3 trois s.e.v de E tels que

$$\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 = \{0_\mathrm{E}\}, \quad \mathrm{F}_2 \cap \mathrm{F}_3 = \{0_\mathrm{E}\}, \quad \mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_3 = \{0_\mathrm{E}\}$$

$$\text{et} \quad \dim(\mathrm{F}_1) + \dim(\mathrm{F}_2) + \dim(\mathrm{F}_3) = \dim(\mathrm{E}).$$

A-t-on nécessairement $\mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2 \oplus \mathrm{F}_3 = \mathrm{E}$?

Exercice 14

✦✦ **Exemple**

Dans $\mathbb{R}_3[x]$, on pose :

$$\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[x] \mid \mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}(2) = 0\}, \qquad \mathrm{V} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[x] \mid \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}(2) = 0\},$$
$$\mathrm{G} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[x] \mid \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}(2) = \mathrm{P}(3) = 0\}, \qquad \mathrm{H} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[x] \mid \mathrm{P}(x) = \mathrm{P}(-x)\}.$$

1. Préciser les dimensions de chacun de ces sous-espaces vectoriels.
2. Montrer que $\mathrm{V} \oplus \mathrm{H} = \mathbb{R}_3[x]$.
3. Justifier que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \oplus \mathrm{H} = \mathbb{R}_3[x]$.

2 Changement de bases

2.1 Rappels : liens entre matrices et applications linéaires

Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base d'un espace vectoriel E, alors pour tout vecteur u de E, il existe un unique n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i \, e_i.$$

Dans ce cas, $(x_1, \dots, x_n)$ sont les **coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$**. On définit la **matrice colonne des coordonnées** de u dans la base $\mathscr{B}$ par

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Généralisation. Soient $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E et $\mathscr{B}$ une base de E.
Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on note $(x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{n,k})$ les coordonnées de u_k dans la base $\mathscr{B}$.
On appelle **matrice de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$**, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$, la matrice dont les colonnes sont les matrices coordonnées des vecteurs de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,p} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,p} \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

Autrement dit, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ s'obtient en concaténant les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs de la famille.

Définition 15 (matrice d'une application linéaire)

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$, $\mathcal{B}_F$ deux bases respectives de E et F. **La matrice de** $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ **relativement aux bases** $\mathcal{B}_E$ **et** $\mathcal{B}_F$ est la matrice de la famille $\big(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_p)\big)$ dans la base $\mathcal{B}_F$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}\big(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_p)\big).$$

Elle est notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$.

Représentation

Notons $(e_1, \cdots, e_p)$ et $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ des bases de E et F. Une manière commode de se représenter la matrice est de placer en colonne les composantes des images de la base $(e_1, \cdots, e_p)$ par φ dans la base d'arrivée $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$. Le coefficient en position (i, j) est la composante de $\varphi(e_i)$ suivant le vecteur ε_j.

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & & & \varphi(e_p) \end{array} & \\
\begin{bmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & * & \cdots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & * \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array}
\end{array}$$

Exemples.
- La matrice de l'application identité $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\mathrm{id}_E)$ est la matrice identité I_p où $p = \dim(E)$.
- La matrice de l'application nulle $u \in E \to 0_F \in F$ est $0_{n,p}$ avec $n = \dim(F)$, $p = \dim(E)$.

Théorème 16 (isomorphisme)

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie (notées respectivement p et n) et $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ deux bases respectives de E et F.

L'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ \varphi & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(\varphi) \end{array} \right.$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

En particulier, pour tous φ, $\psi \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(\varphi + \psi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(\varphi) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(\psi) \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(\lambda\varphi) = \lambda\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(\varphi).$$

Rappel. Un isomorphisme est une application linéaire bijective.

Conséquences.
- À toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ correspond une unique application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ dont A soit la matrice dans les bases canoniques. Elle est appelée **l'application linéaire canoniquement associée à la matrice** A.

- En dimension finie, il ne peut avoir d'isomorphisme si la dimension de l'espace de départ ne coïncide pas avec la dimension de l'espace d'arrivée. Ainsi, l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F est aussi de dimension finie et
$$\dim\big(\mathcal{L}(E,F)\big) = \dim\big(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})\big) = pn = \dim(E) \times \dim(F).$$

Théorème 17 (image d'un vecteur)

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$.
Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ et $u \in E$.

Si on note
- U la matrice colonne des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}_E$.
- V la matrice colonne des coordonnées de $\varphi(u)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.
- $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(\varphi)$, la matrice de l'application φ dans les bases $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$,

alors $$AU = V.$$

Remarques.

- Cette relation s'écrit directement $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\left(\varphi(u)\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(u)$.

- Cette formule s'étend par concaténation aux matrices d'une famille de vecteurs.

Soient $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ et $(u_1,\cdots,u_q)$ une famille de vecteurs de E. Alors

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\left(\varphi(u_1),\cdots,\varphi(u_q)\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(u_1,\cdots,u_q)} \qquad (\bullet)$$

Théorème 18 (produit matriciel et composition d'applications)

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$, $\mathscr{B}_G$.
Soient $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\psi \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G,\mathscr{B}_E}(\psi\circ\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G,\mathscr{B}_F}(\psi)\cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi).$$

Corollaire 19 (inversibilité et isomorphisme)

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ deux bases respectives de E et F. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) L'application linéaire φ est bijective.

ii) La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi)$ est inversible.

Dans ce cas, $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}\left(\varphi^{-1}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi)^{-1}.$$

Exercice 15

✦✦ *Les questions sont indépendantes*

1. Prouver cet énoncé grâce au théorème précédent.
   On pourra utiliser la caractérisation de la bijectivité.
2. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ défini par $\varphi(x,y) \mapsto (ax+by, cx+dy)$.
   À quelle condition sur a, b, c et d, φ est bijective?
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer A, la matrice de $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto P(x+1) \in \mathbb{R}_n[x]$ dans la base canonique.
   (b) Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2.2 Compléments : matrices de passage

Définition 20 (cas particulier des matrices de passages)

Soient E, un espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, deux bases.
La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$ est appelée **matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$**. On la note $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$.
Autrement dit, la j-ème colonne de $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ est la matrice coordonnée du j-ème vecteur de $\mathscr{C}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Remarque. Pour $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, deux bases de E, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}.$$

Application. Soit u un vecteur de E dont $U_{\mathscr{B}}$ et $U_{\mathscr{C}}$ sont les matrices colonnes des coordonnées respectivement dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ alors

$$U_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}U_{\mathscr{C}}.$$

Exercice 16

✧ Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}' = (e_1 + e_2, 2e_2 + e_3, 3e_3)$.
Existe-t-il un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ ayant les mêmes composantes dans ces deux bases ?
On pourra dans un premier temps, traduire matriciellement le problème.

Remarque. Avec trois bases $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ de E, on a aussi

$$\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{D}} = \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}} \cdot \mathrm{P}_{\mathscr{C},\mathscr{D}} \qquad (\bullet)$$

Exercice 17

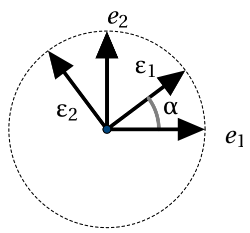
✦ On considère la base canonique $\mathscr{B} = \left(1, x, x^2\right)$ de $\mathbb{R}_2[x]$.
Soient a, $b \in \mathbb{R}$ distincts. On considère les familles de polynômes $\mathscr{C} = \left(1, x-a, (x-a)^2\right)$ et $\mathscr{D} = \left((x-a)^2, (x-a)(x-b), (x-b)^2\right)$.

1. (a) Justifier que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ sont deux autres bases de $\mathbb{R}_2[x]$.
   (b) Calculer $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$, $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}$ et $\mathrm{P}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}$. Vérifier par le calcul que $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{D}} = \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}} \cdot \mathrm{P}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}$.
2. Prouver la relation $(\bullet)$ dans le cas général de trois bases $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ de E.

Proposition 21 (inversibilité)

Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E.
La matrice $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ est inversible avec $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \left(\mathrm{P}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}\right)^{-1}$.
Autrement dit, l'inverse de la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$ est la matrice de passage de la base $\mathscr{C}$ à la base $\mathscr{B}$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^2$, notons $\mathscr{B}$ la base canonique et la famille $\mathscr{C}$ composée des deux vecteurs $\varepsilon_1 = \left(\cos(\alpha), \sin(\alpha)\right)$ et $\varepsilon_2 = \left(\sin(\alpha), \cos(\alpha)\right)$. La matrice inverse s'obtient en remplaçant α par $-\alpha$.



$$\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}{}^{-1} = \mathrm{P}_{\mathscr{C},\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Théorème 22 (changement de bases)

Soient $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E de dimension finie, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ deux bases de E. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi) = \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}{}^{-1} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) \cdot \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}.$$

Exercice 18

✦ ✎ Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3). Posons de plus $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ avec

$$u_1 = e_1 - e_3, \quad u_2 = e_1 - 2e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad u_3 = e_1 + e_2 + e_3.$$

On admet que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

1. Préciser B, la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.
2. Expliciter la relation entre A et B. À quelles conditions sur a et b, l'endomorphisme φ est un isomorphisme ?

2.3 Compléments : matrices semblables

Définition et exemples

Définition 23 (matrices semblables)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que A est **semblable** à B s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Exercice 19

✦ **Vrai ou faux?** Pour tous $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. A est semblable à A. ✓ ×
2. Si A est semblable à B, alors B est semblable à A. ✓ ×
3. Si A est semblable à B, et B est semblable à C, alors A est semblable à C. ✓ ×
4. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, si A est semblable à B alors A^p est semblable à B^p. ✓ ×
5. Si A est semblable à B et A est inversible alors A^{-1} est semblable à B^{-1}. ✓ ×

Proposition 24 (endomorphisme et similitude)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, deux matrices semblables et E un espace vectoriel de dimension finie.
Alors A et B représentent les matrices d'un même endomorphisme de E dans des bases différentes.
Autrement dit, il existe deux bases $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ de E et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ tels que

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) \quad \text{et} \quad B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi).$$

Exemple. Les matrices suivantes sont semblables $M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

Exercice 20

✦ Notons φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M.

1. (a) Prouver l'existence de $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{vect}(u) = \ker(\varphi - \mathrm{id}_E)$.
   De même, on prouve que $v = (4,3,-2)$, $w = (-2,3,-2)$ vérifient

$$\mathrm{Vect}(v) = \ker(\varphi - 2\,\mathrm{id}_E) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Vect}(w) = \ker(\varphi + 4\,\mathrm{id}_E).$$

   (b) Vérifier que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrer que M et D sont semblables.

Lien avec le rang

Rappels.

• **Le rang** d'une matrice A, noté rg(A), est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Autrement dit, si $A = [C_1\, C_2\, \ldots\, C_p]$ alors

$$\mathrm{rg}(A) = \dim\left(\mathrm{Vect}(C_1, C_2, \ldots, C_p)\right).$$

• **Propriétés de calculs.**

— Le rang est invariant par transposition, autrement dit

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA).$$

— Le rang est invariant par les opérations élémentaires :
  - L'échange de lignes ou de colonnes ($L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$).
  - La multiplication d'une ligne ou d'une colonne par $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ($L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_i \leftarrow \lambda C_i$).
  - L'addition d'une autre ligne ou colonne ($L_i \leftarrow L_i + L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + C_j$).

• Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et de bases respectives $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$. Soient $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(\varphi)$. On montre que

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\varphi).$$

Corollaire 25 (invariance du rang par similitude)

Soient A, B $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si A et B sont semblables, **alors** elles ont même rang.

Exercice 21. ✧ La réciproque est fausse. Pouvez-vous donner un contre exemple ?

3 Trace d'une matrice

Définition 26 (trace)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit la **trace** de A, notée $\mathrm{Tr}(A)$, comme la somme des coefficients diagonaux de A. Autrement dit, pour $A = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$,

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Exercice 22

✧ Calculer $\mathrm{Tr}(I_n)$, $\mathrm{Tr}(0_n)$, $\mathrm{Tr}(J)$ et $\mathrm{Tr}(K)$ où

$$J = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

À partir des règles de calculs usuelles, on montre que :

Proposition 27 (forme linéaire)

L'application trace $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire. C'est-à-dire, pour tous A, B $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B) \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(\lambda A) = \lambda\, \mathrm{Tr}(A).$$

Vocabulaire. Une forme linéaire est une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exercice 23

✦

1. Donner la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$. Préciser une base.
2. Expliciter un supplémentaire du noyau.

Proposition 28 (trace et produit)

Pour tous A, B $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

Exercice 24

✦ ✎ Prouver cette proposition.
Si on note $[M]_{i,j}$*, le coefficient en position* (i,j) *de la matrice* M*, on rappelle que pour* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$

$$[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k}[B]_{k,j}.$$

Corollaire 29 (invariance par similitude)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible. Alors

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}\left(P^{-1}AP\right).$$

Remarque. Autrement dit, deux matrices semblables ont même trace. Cette propriété permet de définir la trace d'un endomorphisme (voir exercice 44).

Exercice 25

✦ ✎ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Que dire de A si $\mathrm{Tr}(A^tA) = 0$?
2. Que dire de A et B si pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(BX)$?

4 Les espaces stables

Définition 30 (espace stable)

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et F une partie de E. On dit que F est une **partie stable** par φ si

$$\forall u \in F, \qquad \varphi(u) \in F.$$

Exemple. Soit $\varphi : f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mapsto f' \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Les espaces $\mathbb{R}[x]$ et $\mathrm{Vect}(\cos, \sin)$ sont des parties stables de φ.

Exercice 26

✦ ✎ *Les questions sont indépendantes*

1. Montrer que toute somme de s.e.v stables par φ reste stable par φ.
2. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Montrer que le noyau et l'image de φ sont stables par ψ.

Remarques.

- Soit F un s.e.v de E dont $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille génératrice. Alors F partie est stable par φ si et seulement si, pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $\varphi(e_i) \in F$.
- Si F est un s.e.v stable par φ, on peut définir la restriction de φ à F par

$$\varphi|_F : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ u & \mapsto & \varphi(u). \end{array} \right.$$

L'application $\varphi|_F$ définit alors un endomorphisme de F.

Exercice 27

✦ Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ injectif et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E stable par φ. Montrer que l'endomorphisme induit par φ sur F est un isomorphisme.

Exercices

- *Le niveau de difficulté de l'exercice est repéré par les symboles ✧ , ✦ , ✦✦ , ✦✦✦ (difficulté croissante).*
- *Les exercices classiques à bien maîtriser sont repérés par ✎ .*
- *Les questions avec indications sont marquées par 🔑 .*

Révisions en algèbre linéaire

Exercice 28. ✦ **Vrai ou faux ?** 🔑

1. La somme de deux matrices inversibles est inversible. ✓ ×
2. Toute matrice carrée est la somme de deux matrices inversibles. ✓ ×

Exercice 29. ✧ Soient E un espace vectoriel de dimension 2 et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $f \circ f = -\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.
Soit u, un vecteur non nul de E.

1. Justifier que $\big(u, f(u)\big)$ est une base de E.
2. Donner J la matrice de f dans cette base.
3. ✦✦✦ Généraliser le résultat précédent où E est de dimension $2n$.

Exercice 30. ✦✦ ✎ On pose $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -10 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

1. En examinant les instructions en Python suivantes, calculer les puissances de A. 🔑

Editeur

```
>>> import numpy as np
>>> A = np.array(([-4, 0, 3], [0, 2, 0], [-10, 0, 7]))
>>> P = np.array(([1, 0, 3], [0, 1, 0], [2, 0, 5]))
>>> P_inv = np.linalg.inv(P)  # calcule l'inverse de la matrice
>>> P_inv
array([[-5.,  0.,  3.],
       [ 0.,  1.,  0.],
       [ 2.,  0., -1.]])
>>> P_inv @ A @ P            # La commande @ fait un produit matriciel
array([[2., 0., 0.],
       [0., 2., 0.],
       [0., 0., 1.]])
```

2. Peut-on trouver $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$? 🔑

Exercice 31. ✦ Peut-on trouver deux matrices $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$? 🔑

Exercice 32. ✦ **Somme directe dans $\mathbb{R}_n[x]$**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour tout $i \in [\![0; n]\!]$, on définit $\mathrm{F}_i = \big\{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[x] \mid \forall j \in [\![0; n]\!] \setminus \{i\},\ \ \mathrm{P}(j) = 0\big\}$.

1. Justifier que pour tout $i \in [\![0; n]\!]$,

$$\mathrm{F}_i = \mathrm{Vect}(\mathrm{L}_i) \quad \text{où} \quad \mathrm{L}_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - j).$$

2. Vérifier que la somme $\mathrm{F}_0 + \mathrm{F}_1 + \cdots + \mathrm{F}_n$ est directe, puis l'égalité $\displaystyle\bigoplus_{i=0}^{n} \mathrm{F}_i = \mathbb{R}_n[x]$.

Exercice 33. ✦✦ Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f,\ g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que

$$\mathrm{E} = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g \quad \text{et} \quad \mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g.$$

Montrer que ces sommes sont directes. 🔑

Exercice 34. ✦✦ **Exemples de formes linéaires**
Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[x]$, posons :

$$\varphi_1(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(1), \quad \varphi_2(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(0), \quad \varphi_3(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(-1) \quad \text{et} \quad \psi(\mathrm{P}) = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que φ_1 et ψ sont des formes linéaires de $\mathbb{R}_2[x]$.
   On admet que φ_2 et φ_3 sont elles-aussi des formes linéaires.
2. Justifier que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R})$.
3. **a)** Justifier l'existence de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$,
$$\int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t = \lambda_1 P(1) + \lambda_2 P(0) + \lambda_3 P(-1)$$
   b) Préciser les valeurs de λ_1, λ_2 et λ_3.

Exercice 35. ✦✦✦ ✎ **Caractérisation des homothéties** *Source : oraux HEC 2018*

Soit φ un endomorphisme de E.

1. Montrer que si pour tout vecteur $u \in E$, $(\varphi(u), u)$ sont colinéaires, alors φ est une homothétie.
2. On suppose φ un endomorphisme de dimension finie $n \geqslant 2$.
   Démontrer que, si φ n'est pas une homothétie, alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice M de φ a pour première colonne
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 36. ✦✦ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère, pour $k \in [\![0, n]\!]$, les polynômes P_k définie par $P_k(x) = (1-x)^k x^{n-k}$.

1. Préciser le degré de P_k.
2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Simplifier $\sum\limits_{i=0}^{k} \binom{k}{i} P_i$.
3. En déduire que $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
4. **a)** Montrer que pour $0 \leqslant i \leqslant n$, $\sum\limits_{k=i}^{n} \binom{k}{i} = \binom{n+1}{i+1}$.
   b) Déterminer les coordonnées du polynôme $Q(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} x^j$ dans la base $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$.

Exercice 37. ✦ Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.

Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\ker(\varphi)$, $\ker(\varphi - \mathrm{id}_E)$ et $\ker(\varphi + \mathrm{id}_E)$ sont en somme directe.

Exercice 38. **Variante sur les endomorphismes nilpotents**

Soit φ un endomorphisme sur E de dimension 4 tel que $\varphi^5 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Justifier que $\varphi^4 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
2. Dans la suite, on suppose de plus que $\varphi^3 \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.
   Peut-on avoir $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi^2$? Même question avec $\operatorname{Ker}\varphi^2 = \operatorname{Ker}\varphi^3$.
3. En déduire que $\dim \operatorname{Ker}\varphi^3 = 3$.
4. Conclure en montrant qu'il existe une base dans laquelle les coefficients de la matrice de φ dans cette base sont nuls partout, sauf sur la deuxième diagonale inférieure.

Exercice 39. ✦✦ Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et φ un endomorphisme de E tel que :
$$\exists\, p \in \mathbb{N}^*, \qquad \varphi^p = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{et} \quad \varphi^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}.$$
On dit que φ est un endomorphisme nilpotent d'indice p.

1. Montrer que $\quad \operatorname{Ker}(\varphi) \subset \operatorname{Ker}(\varphi^2) \subset \ldots \subset \operatorname{Ker}(\varphi^p) = E$.
   Vérifier que toutes ces inclusions sont strictes.
2. Soit $\mathscr{B}_1$ une base de $\operatorname{Ker}(\varphi)$. On la complète en une base $\mathscr{B}_2$ de $\operatorname{Ker}(\varphi^2)$. On continue le procédé en complétant, pour tout entier $k \in [\![0, p-1]\!]$ une base $\mathscr{B}_k$ de $\operatorname{Ker}(\varphi^k)$ en une base $\mathscr{B}_{k+1}$ de $\operatorname{Ker}(\varphi^{k+1})$.
   On trouve ainsi une succession de bases $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}_2 \subset \ldots \subset \mathscr{B}_p$, où $\mathscr{B}_p$ est une base de E.
   Donner la forme de la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}_p$. Préciser sa diagonale.
3. En déduire que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_n$, alors A est de trace nulle.
   Que dire de $\operatorname{Tr}(A^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$?

Exercice 40. ✦✦✦ *d'après oraux ESCP 2001*

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n ($n \geqslant 2$). On note S (respectivement A) le sous-espace vectoriel de E formé des matrices symétriques, (respectivement antisymétriques).

Soient (α, β) deux réels donnés non nuls, et f l'application définie sur E par, pour tout $M \in E$: $f(M) = \alpha M + \beta\, {}^t M$

1. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{S} \oplus \mathrm{A}$.
2. Exprimer f à l'aide de p et q, où $q = \mathrm{I} - p$, quand p désigne le projecteur sur S de direction A.
3. Exprimer $f^2 = f \circ f$ en fonction de f et de I.
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un automorphisme de E. Exprimer alors f^{-1} en fonction de f et de I.
5. Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f^k en fonction de p, q, α, β. En déduire la puissance $k^{\text{ème}}$ de la matrice :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \alpha+\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+\beta \end{bmatrix}.$$

Exercice 41. ✦✦✦ Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On suppose que, pour tout $u \in \mathrm{E}$, il existe un entier $n_u \in \mathbb{N}$ tel que $f^{n_u}(u) = 0_{\mathrm{E}}$. Montrer qu'il existe un entier n tel que $f^n = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$.

Compléments de deuxième année

Exercice 42. ✦✦ Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'objectif est de prouver que $\mathrm{BA} = \mathrm{I}_2$.
Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f, g les endomorphismes canoniquement associés à A et B.

1. Vérifier que $g(e_2)$ et $g(e_3)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. Notons $\mathscr{C}$ cette base.
2. Calculer la matrice de $g \circ f$ dans cette nouvelle base.
3. Conclure.

Exercice 43. ✦ Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle telle que $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = 0$ et φ son endomorphisme canoniquement associé.

1. Justifier qu'il existe $x \in \mathbb{R}^2$ tel que la famille $\big(x, \varphi(x)\big)$ soit libre.
2. En déduire que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Exercice 44. ✦ ✎ **Trace d'un endomorphisme**
Soient $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E de dimension finie et $\mathscr{B}$ une base de E. On définit la trace de φ par

$$\mathrm{Tr}(\varphi) = \mathrm{Tr}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)\big).$$

1. Justifier que la trace de φ ne dépend pas du choix de la base.
2. *Exemples*
   a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la trace de φ où $\varphi : \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto \mathrm{P} - \mathrm{P}' \in \mathbb{R}_n[x]$.
   b) On pose $\varphi : \mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^t\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
      i) Justifier que le sous-espace des matrices symétriques de taille (n, n) (noté $\mathscr{S}_n$) et celui des matrices antisymétriques (noté $\mathscr{A}_n$) sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Préciser les dimensions.
      ii) En déduire la trace de φ.
   c) Soit p, un projecteur de E de dimension n.
      i) Justifier que $\ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = \mathrm{E}$.
      ii) En déduire que la trace d'un projecteur d'un espace vectoriel de dimension finie est égale à son rang.

Exercice 45. ✦✦✦ ✎ **Dimension du commutant** *Source : oraux HEC 2021*
Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $\mathrm{A}^2 = 0$.

1. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Déterminer la dimension de l'espace vectoriel $\mathscr{C}_{\mathrm{A}} = \Big\{ \mathrm{M} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \;\Big|\; \mathrm{AM} = \mathrm{MA} \Big\}$.

Exercice 46. ✦✦✦ ✎ **Base de polynômes de Lagrange**
Soient a_0, a_1, …, a_n, $n+1$ réels deux à deux distincts. Notons $\mathscr{B} = \big(1, x, \dots, x^n\big)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ et $(e_0, \dots, e_n)$, la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

1. Montrer que l'application suivante est un isomorphisme

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \big(\mathrm{P}(a_0), \dots, \mathrm{P}(a_n)\big). \end{array} \right.$$

2. Pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, on définit le polynôme $\mathrm{L}_i = \varphi^{-1}(e_i)$. Montrer que la famille $\mathscr{C} = (\mathrm{L}_0, \dots, \mathrm{L}_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ et que

$$\forall\, \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[x], \qquad \mathrm{P} = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(a_i)\, \mathrm{L}_i.$$

3. Préciser ${\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}}^{-1}$.
Pour rappel, $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ *désigne la matrice de passage de la base* $\mathscr{B}$ *à la base* $\mathscr{C}$.

Exercice 47. ✦ *D'après HEC 2009 E*

Soit A un élément donné de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ non colinéaire à I_2. On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont A est la matrice associée dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ On pose : $w = e_1 + e_2$.

1. En considérant les trois vecteurs e_1, e_2 et w, montrer qu'il existe au moins un élément non nul x de $\mathbb{R}^2$ tel que la famille $\big(x, \varphi(x)\big)$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la matrice M associée à φ dans la base $\big(x, \varphi(x)\big)$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}$$

où a et b sont deux réels, indépendants de la base $\big(x, \varphi(x)\big)$, que l'on exprimera en fonction de det(A) et Tr(A).
On pourra admettre que le déterminant est un invariant de similitude.

3. En déduire que la matrice A est semblable à sa transposée ${}^t\mathrm{A}$.

Exercice 48. ✦✦✦ ✎ **Vecteurs cycliques et espaces stables**

Soient E, un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On dit qu'un vecteur $u \in \mathrm{E}$ est *cyclique* pour φ s'il existe un entier m non nul tel que la famille $\mathscr{B}_{u,m} = \big(u, \varphi(u), \varphi^2(u), \dots, \varphi^{m-1}(u)\big)$ soit une famille génératrice de E.
Pour rappel, $\varphi^i(u) = \varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi(u)$ *avec* i *compositions.*

1. Comparer m et n.
2. Montrer que si u est cyclique pour φ, alors $\mathscr{B}_{u,n}$ est une base de E.
3. *Application*
Dans la suite, on suppose que les seuls sous-espaces vectoriels stables par φ sont $\{0_\mathrm{E}\}$ et E.
   a) Justifier qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que la famille $\mathscr{B}_{u,m}$ soit libre mais $\mathscr{B}_{u,m+1}$ n'est pas libre.
   b) Vérifier que $\mathrm{Vect}(\mathscr{B}_{u,m})$ est un espace stable par φ.
   c) En déduire que tout vecteur $u \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$ est cyclique.
   d) On note $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ les coordonnées de $\varphi^n(u)$ dans la base $\mathscr{B}_{u,n}$. Justifier que

$$\varphi^n = a_0 \cdot \mathrm{id}_\mathrm{E} + a_1 \cdot \varphi + \ldots + a_{n-1} \cdot \varphi^{n-1}.$$

   e) Donner la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}_{u,n}$ à l'aide des réels a_i.

Exercice 49. ✦

Écrire un programme Python qui compte le nombre de matrices non inversibles parmi les matrices de tailles $(25, 25)$:

$$\mathrm{M}(a,b) = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad -50 \leqslant a, b \leqslant 50.$$

Indication. On pourra utiliser les commandes **ones([n,p])** qui renvoie une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ne contenant que des 1, **eye(n)** pour la matrice I_n et **np.linalg.matrixrank(A)** pour le rang de la matrice A.

CHAPITRE 3

Valeurs propres et vecteurs propres

Une idée qui ne peut servir qu'une seule fois est une astuce. Sinon, elle devient une méthode.

GEORGE PÓLYA

Mathématicien américain d'origine hongroise et suisse (1887-1985).

1 Rappels : polynômes d'endomorphismes et de matrices

Rappelons que pour un endomorphisme φ de E, les applications $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$, $\varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi$ ... sont parfaitement définies et linéaires. Les **puissances** de φ sont les applications :

$$\varphi^0 = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n \text{ compositions}}.$$

Remarque. Comme pour les matrices, il existe une version de la formule du binôme de Newton dans le cas des endomorphismes. Soient $\varphi, \psi \in \mathscr{L}(E)$ qui *commutent* ($\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$). Alors pour tout entier naturel p,

$$(\varphi + \psi)^p = (\varphi + \psi) \circ (\varphi + \psi) \circ \cdots \circ (\varphi + \psi) = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \varphi^i \circ \psi^{p-i}.$$

Définition 31 (polynôme de matrice, d'endomorphisme)

Soient $P(x) = \sum_{i=0}^{p} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.

- Le **polynôme de matrice** P(A) est défini par $\quad P(A) = \sum_{i=0}^{p} a_i A^i \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Un polynôme P est **annulateur** de A si $P(A) = 0_n$.

- Le **polynôme d'endomorphisme** $P(\varphi)$ est défini par $\quad P(\varphi) = \sum_{i=0}^{p} a_i \varphi^i \in \mathscr{L}(E)$.
Un polynôme P est **annulateur** de φ si $P(\varphi) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Exercice 50

✦ ✎ **Existence d'un polynôme annulateur**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. En étudiant la famille $(I_n, A, \dots, A^p)$ pour un entier p bien choisi, montrer que A admet un polynôme annulateur.

Règles de calculs
On démontre que pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $\quad (\lambda P)(A) = \lambda P(A) \quad$ et $\quad (P+Q)(A) = P(A) + Q(A)$.
Retenons également la propriété de commutativité : $\quad (PQ)(A) = P(A)Q(A) = Q(A)P(A) = (QP)(A)$.
On a de même avec des endomorphismes

$$(\lambda P)(\varphi) = \lambda P(\varphi), \qquad (P+Q)(\varphi) = P(\varphi) + Q(\varphi) \quad \text{et} \quad (PQ)(\varphi) = P(\varphi) \circ Q(\varphi) = Q(\varphi) \circ P(\varphi) = (QP)(\varphi).$$

Exercice 51

✦ *Les questions sont indépendantes.*

1. Soient A, B, deux matrices carrées semblables.
   Montrer que tout polynôme annulateur de A est annulateur de B.
2. Soient A$\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P\in\mathbb{R}[x]$ annulateur de A.
   Montrer que si $P(0)\neq 0$ alors A est inversible.

Proposition 32 (polynôme d'endomorphisme, de matrice)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie dont $\mathscr{B}$ est une base et φ un endomorphisme de E.
Pour tout $k\in\mathbb{N}$,
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)^k=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi^k).$$
Plus généralement, pour tout $P\in\mathbb{R}[x]$,
$$P\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)\Big)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(P(\varphi)\big).$$

2 Valeurs propres, vecteurs propres, cas matriciel

2.1 Premières définitions

Définition 33 (valeurs propre, vecteur propre)

Soient $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda\in\mathbb{R}$ et $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On dit que λ est une **valeur propre** de A et que X est un **vecteur propre** pour A associé à la valeur propre λ si
$$AX=\lambda X \quad\text{et}\quad X\neq 0_{n,1}.$$

Exemple. Posons
$$A=\begin{bmatrix}1&3&0\\0&-2&0\\-1&-2&0\end{bmatrix}\quad\text{et}\quad X=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\quad Z=\begin{bmatrix}-2\\2\\1\end{bmatrix},$$
de sorte que
$$AX=0\cdot X,\quad AY=Y\quad\text{et}\quad AZ=-2Z.$$
Comme X, Y et Z sont des matrices colonnes non nuls, 0, 1 et -2 sont valeurs propres de A.

Attention. Un vecteur propre est toujours non nul.

Définition 34 (spectre)

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Le **spectre** de A, noté Sp(A) est l'ensemble des valeurs propres de A.

Exemple. En reprenant l'exemple précédent, $\{0;1;-2\}\subset\mathrm{Sp}(A)$.

Python. Voici le code pour obtenir une approximation des valeurs propres.

Editeur

```
import numpy.linalg as al
 # On importe la sous-bibliothèque
     linalg
A=np.array([[1,3,0],[0,-2,0],[-1,-2,0]])
 # On définit la matrice A
print(al.eigvals(A))
```

Console

```
>>> # script executed

[ 0.  1. -2.]
```

Selon ce calcul, -2, 0 et 1 sont toutes les valeurs propres de la matrice A. On conjecture donc que $\mathrm{Sp}(A)=\{-2;0;1\}$.

2.2 Caractérisations des valeurs propres

Théorème 35 (caractérisation avec l'inversibilité)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les énoncés suivants sont équivalents.

i) Le réel λ est une valeur propre de A.

ii) La matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Autrement dit, Sp(A) est l'ensemble des réels λ pour lesquels la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Remarque. En particulier, 0 est valeur propre si et seulement si, la matrice A n'est pas inversible.

Corollaire 36 (matrices triangulaires)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si A est une matrice triangulaire,

alors les valeurs propres de A sont les coefficients diagonaux de A.

Attention. C'est grossièrement faux si la matrice n'est pas triangulaire.
On pourra par exemple, vérifier que $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ n'admet aucune valeur propre réelle.

2.3 Les sous-espaces propres $E_\lambda(A)$

Définition 37 ($E_\lambda(A)$)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout réel λ, on pose

$$E_\lambda(A) = \left\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\right\}.$$

En remarquant que $E_\lambda(A) = \operatorname{Ker}\left(A - \lambda I_n\right)$, on en déduit que :

Proposition 38 (structure de $E_\lambda(A)$)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- $E_\lambda(A) \neq \{0_{n,1}\}$ si et seulement si λ est une valeur propre de A.

Remarque. La formule du rang donne alors $\dim\left(E_\lambda(A)\right) + \operatorname{rg}\left(A - \lambda I_n\right) = n$.

Vocabulaire. Si $E_\lambda(A) \neq \{0_{n,1}\}$ alors on parle de **l'espace propre associé à la valeur propre** λ. Dans ce cas,

$$1 \leqslant \dim\left(E_\lambda(A)\right) \leqslant n.$$

Exercice 52

✦ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que si A et B sont semblables alors $\operatorname{Sp}(A) = \operatorname{Sp}(B)$ et les sous-espaces propres sont de même dimension.

Exemple. Le cas diagonal.
Si A est une matrice diagonale, alors les valeurs propres de A sont exactement les coefficients diagonaux de A et pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, la dimension de $E_\lambda(A)$ est égale au nombre de fois où λ apparait sur la diagonale de A.

Exercice 53

✦✦ **Vrai ou Faux?**
Pour tous $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ alors $\lambda^2 \in \mathrm{Sp}(A^2)$. ✓ ×
2. Si $\lambda^2 \in \mathrm{Sp}(A^2)$ alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. ✓ ×
3. $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}\left({}^tA\right)$. ✓ ×
4. $E_\lambda(A) = E_\lambda\left({}^tA\right)$. ✓ ×
5. $\dim\left(E_\lambda(A)\right) = \dim\left(E_\lambda\left({}^tA\right)\right)$. ✓ ×
6. Si A est inversible, $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ ssi $\lambda^{-1} \in \mathrm{Sp}(A^{-1})$. ✓ ×

3 Valeurs propres, vecteurs propres, cas des endomorphismes

3.1 Définitions et exemples

Reprenons et adaptons les définitions au cas des endomorphismes d'un espace vectoriel E.

Définition 39 (valeur propre, vecteur propre, spectre)

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.
- Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$. On dit que λ est une **valeur propre** de φ et que u est un **vecteur propre** pour φ associé à la valeur propre λ si
$$\varphi(u) = \lambda u \quad \text{et} \quad u \neq 0_E.$$
- L'ensemble des valeurs propres de φ est le **spectre de** φ, il est noté $\mathrm{Sp}(\varphi)$.

Exemple. Posons $u = (1,0,-2,)$, $v = (0,0,1)$, $w = (1,1,-2)$ et
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y, 3y, 2x-4y+2z) \end{array} \right.$$
On a $\varphi(u) = u$, $\varphi(v) = 2v$ et $\varphi(w) = 3w$. Comme u, v et w sont non nuls, 1, 2 et 3 sont trois valeurs propres de φ. C'est-à-dire, $\{1;2;3\} \subset \mathrm{Sp}\left(\varphi\right)$.

Remarque. Le vecteur u (non nul) est un vecteur propre de φ si et seulement si la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(u)$ est stable par φ.

Exercice 54

✦ **Exemples** *Les questions sont indépendantes.*

On pose $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[x] \\ P & \longmapsto & P' + 2P \end{array} \right.$ et $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f'. \end{array} \right.$

1. Étudier les valeurs propres de l'endomorphisme φ.
2. Montrer que tout réel est valeur propre de ψ.

Définition-proposition 40 ($E_\lambda(\varphi)$)

Soient $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit le sous-espace vectoriel $E_\lambda(\varphi)$ de E par
$$E_\lambda(\varphi) = \left\{ u \in E \,|\, \varphi(u) = \lambda u \right\} = \mathrm{Ker}\left(\varphi - \lambda\, \mathrm{id}_E\right).$$

Remarques.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda(\varphi)$ est un espace stable par φ.
- $E_\lambda(\varphi)$ est bien un s.e.v de E puisque c'est le noyau d'une application linéaire.
- Si λ est une valeur propre, on dit que $E_\lambda(\varphi)$ est **l'espace propre associé à la valeur propre** λ.

3.2 Précision en dimension finie

Théorème 41 (lien matrice et endomorphisme)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, $u \in \mathrm{E}$ et $\mathcal{B}$, une base de E.

Si on note
- $\rightharpoonup$ U la matrice colonne des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.
- $\rightharpoonup$ $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$, la matrice de l'endomorphisme φ dans la base $\mathcal{B}$.

Alors, u est vecteur propre de l'endomorphisme φ pour la valeur propre λ si et seulement si U est vecteur propre de la matrice A pour la valeur propre λ.

Application. Soient A et B deux matrices semblables. Elle représente le même endomorphisme φ dans des bases différentes. On retrouve alors $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \mathrm{Sp}(\varphi) = \mathrm{Sp}(\mathrm{B})$.

Proposition 42 (caractérisations en dimension finie)

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ avec E de dimension finie et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence entre les énoncés suivants.

- **i**) Le réel λ est valeur propre de φ.
- **ii**) L'endomorphisme $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E}$ n'est pas injectif.
- **iii**) L'endomorphisme $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E}$ n'est pas bijectif.
- **iv**) $\mathrm{rg}\left(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E}\right) < \dim \mathrm{E}$.

3.3 Précisions pour des endomorphismes remarquables

Les homothéties

Pour rappel, une homothétie de E de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est l'application $\lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \to & \mathrm{E} \\ u & \mapsto & \lambda \cdot u. \end{array} \right.$

- Le polynôme P d'expression $\mathrm{P}(x) = x - \lambda$ est un polynôme annulateur de l'homothétie de rapport λ.
- Tout vecteur non nul de E est vecteur propre pour la valeur propre λ.

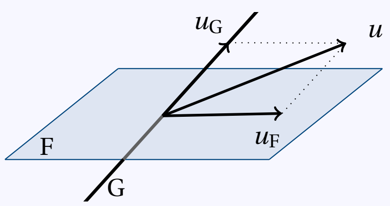
Exercice 55

✦✦✦ ✎ **La réciproque**
Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ non nul tel que tout vecteur non nul est vecteur propre de φ.
Montrer que φ est une homothétie.

Les projecteurs

Définition 43 (projecteur)

Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.



Ainsi, pour tout $u \in \mathrm{E}$, il existe une unique décomposition $u = u_\mathrm{F} + u_\mathrm{G}$ où $(u_\mathrm{F}, u_\mathrm{G}) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}$. On pose

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \to & \mathrm{E} \\ u & \mapsto & u_\mathrm{F}. \end{array} \right.$$

Cette application est linéaire, elle est appelée le **projecteur** sur F parallèlement à G.

Remarque. On montre que p est un projecteur sur $\mathrm{F} = \mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}(p)$. En particulier, le noyau et l'image d'un projecteur sont supplémentaires dans E.

$$\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{E}.$$

Exercice 56

1. Savez-vous prouver cette remarque ?
2. Vérifier que $\mathrm{id}_{\mathrm{E}} - p$ est un projecteur. Préciser ces éléments caractéristiques.

Théorème 44 (caractérisation d'un projecteur)

Soit $p : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ une application. Les énoncés suivants sont équivalents.

i) p est un projecteur.

ii) p est linéaire et $p \circ p = p$.

Spectre d'un projecteur.
Soit $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un projecteur. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E de sorte que p soit le projecteur sur F parallèlement sur G. Afin que F et G ne soient pas réduit à $\{0_{\mathrm{E}}\}$, on suppose dans la suite que $p \neq 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ et $p \neq \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

- On montre que $\mathrm{Sp}(p) = \{0; 1\}$.
- Le polynôme d'expression $x^2 - x = x(x-1)$ est un polynôme annulateur de p. Notons que les valeurs propres de p sont des racines du polynômes.
- D'après les résultats précédents sur les projecteurs, $\mathrm{F} = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{E}_1(p)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{E}_0(p)$. On en déduit que E se décompose suivant les espaces propres de p

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}_1(p) \oplus \mathrm{E}_0(p).$$

Exemple. Les symétries. Soient E, un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Pour tout $u \in \mathrm{E}$, il existe un unique couple $(u_{\mathrm{F}}, u_{\mathrm{G}}) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}$ tel que $u = u_{\mathrm{F}} + u_{\mathrm{G}}$. On définit alors la symétrie par rapport à F parallèlement à G comme l'application linéaire :

$$s : u \in \mathrm{E} \mapsto u_{\mathrm{F}} - u_{\mathrm{G}} \in \mathrm{E}.$$

Exercice 57

✦ **Les symétries**

1. Faire un dessin similaire au cas des projecteurs pour illustrer la situation.
2. Préciser $s \circ s$. En déduire un polynôme annulateur.
3. On suppose que $s \neq \pm \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.
   Étudier les valeurs propres de s et préciser les espaces propres à l'aide de F et G.
4. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G.
   Vérifier que $s = 2p - \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. Retrouver les résultats de la question 3.

4 Lien avec les polynômes et conséquences

4.1 Polynômes et valeurs propres

Théorème 45 (polynômes et valeurs propres)

Soient $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[x]$ et $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

Si u est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ,

alors $$\mathrm{Q}(\varphi)(u) = \mathrm{Q}(\lambda) \cdot u.$$

Corollaire 46 (valeurs propres et racines)

Soient $\varphi \in \mathscr{L}(E)$, $P \in \mathbb{R}[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si
- λ est valeur propre de φ.
- P est un polynôme annulateur de φ.

Alors λ est une racine du polynôme P.

Remarque. On a des énoncés équivalents avec les matrices.
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $Q \in \mathbb{R}[x]$ et X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors

$$Q(A)X = Q(\lambda)X.$$

De plus, si Q est annulateur de A, λ est une racine de Q.

Exercice 58

✦ Soit $\varphi : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tM$.

1. Donner un polynôme annulateur de φ de degré 2.
2. En déduire les valeurs propres de φ.

4.2 Conséquences

Rappels sur les polynômes de Lagrange.
Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ des réels deux à deux distincts, il existe p polynômes, notés L_i, tels que

$$\forall\, i, j \in [\![1, p]\!], \quad L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ i \neq j, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 59

✦✦ **Existence des polynômes de Lagrange**

1. Prouver cet énoncé avec l'application linéaire

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_{p-1}[x] & \to & \mathbb{R}^p \\ P & \mapsto & \big(P(\lambda_1), P(\lambda_2), \ldots, P(\lambda_p)\big). \end{array} \right.$$

2. a) Préciser les trois polynômes de Lagrange pour $a_1 = -1$, $a_2 = 0$ et $a_3 = 1$.
   b) Donner l'expression de $L_i(x)$ dans le cas général.
3. Justifier que pour tout $P \in \mathbb{R}_{p-1}[x]$, $P(x) = \sum\limits_{i=1}^{p} P(a_i) L_i$.

Théorème 47 (somme directe des espaces propres)

Soit φ un endomorphisme d'un espace vectoriel E.

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ désignent p valeurs propres deux à deux distinctes de φ,

alors la somme $\sum\limits_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(\varphi)$ est directe.

Corollaire 48 (en dimension finie)

Si on suppose de plus que E est de dimension finie, alors

$$\sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}(\varphi)\right) \leqslant \dim(E).$$

Corollaire 49 (famille libre de vecteurs propres)

Soit φ un endomorphisme de E.

Si les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$ sont des vecteurs propres de φ associés à des valeurs propres distinctes,

alors la famille $\left(u_1, \dots, u_p\right)$ est une famille libre de E.

Corollaire 50 (majoration du nombre de valeurs propres)

Soit φ un endomorphisme de E de dimension finie. Alors le nombre de valeurs propres de φ est inférieur à la dimension de l'espace :

$$\mathrm{Card}\left(\mathrm{Sp}(\varphi)\right) \leqslant \dim(\mathrm{E}).$$

Remarque. Matriciellement, si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Card}\left(\mathrm{Sp}(\mathrm{A})\right) \leqslant n$.

5 Recherche de valeurs propres et vecteurs propres

Cette section détaille les différentes méthodes pour calculer les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice. Elles sont essentiellement basées sur le pivot de Gauss.

5.1 Recherche des valeurs propres

Rappelons que :

- Le réel λ est valeur propre de A si et seulement si $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n) < n$.
- Le rang est invariant par transposition et opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.

Exemple. On pose $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Procédons par opérations élémentaires pour se ramener à un système triangulaire.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_3) &= \mathrm{rg}\begin{bmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} && \mathrm{L}_3 \leftrightarrow \mathrm{L}_1 \\
&= \mathrm{rg}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1-\lambda \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -\lambda & 2 & -1 \end{bmatrix} && \begin{array}{c} \mathrm{L}_3 \leftarrow 2\mathrm{L}_3 - \lambda \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow 2\mathrm{L}_2 + 3\mathrm{L}_1 \end{array} \\
&= \mathrm{rg}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & 2-2\lambda & 3-3\lambda \\ 0 & 4-2\lambda & \lambda^2-\lambda-2 \end{bmatrix} && \begin{array}{c} \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2/2 \\ \text{(et factorisation)} \end{array} \\
&= \mathrm{rg}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 3-3\lambda \\ 0 & 2-\lambda & (\lambda+1)(\lambda-2) \end{bmatrix} && \mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_3 \\
&= \mathrm{rg}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & (\lambda+1)(\lambda-2) \\ 0 & 1-\lambda & 3(1-\lambda) \end{bmatrix} && \mathrm{C}_2 \leftarrow 3\mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_3 \\
\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_3) &= \mathrm{rg}\begin{bmatrix} -2 & * & * \\ 0 & (-2+\lambda)(\lambda+4) & * \\ 0 & 0 & 3(1-\lambda) \end{bmatrix} && \begin{array}{l} \text{Il est inutile de calculer} \\ \text{les coefficients } * . \end{array}
\end{aligned}$$

Ainsi λ est valeur propre si et seulement si $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_3) < 3$. C'est équivalent à

$$(\lambda-2)(\lambda+4) = 0 \quad \text{ou} \quad 3(1-\lambda) = 0.$$

Finalement $$\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{-4; 1; 2\}.$$

Remarques.
- Noter bien l'échange $L_3 \leftrightarrow L_1$ au début du pivot de Gauss. C'est particulièrement utile pour avoir un pivot qui ne dépend pas de λ.
- Si on dispose d'un polynôme annulateur de petit degré, on peut se limiter à regarder le rang sur les quelques racines du polynôme pour déterminer les valeurs propres.

5.2 Recherche des vecteurs propres

Expliquons maintenant comment calculer les vecteurs propres de la matrice A connaissant les valeurs propres.

- Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Raisonnons par équivalences.

$$\begin{aligned}
X \in E_1(A) &\iff \\
AX = X &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2y - z &=& x \\ 3x - 2y &=& y \\ -2x + 2y + z &=& z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -x + 2y - z &=& 0 \\ 3x - 3y &=& 0 \\ -2x + 2y &=& 0 \end{array}\right. \quad L_3 = -2L_2 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} -x + 2y - z &=& 0 \\ x - y &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y = x \\ z = x \end{array}\right. \\
&\iff X = \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \iff X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Finalement
$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Déterminons les autres sous-espaces propres.

- De même
$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3/4 \\ -1/2 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_{-4}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}\right).$$

Exercice 60

✦ Soient $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$ et $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. On admet que $P(A) = 0_3$.

1. Donner les racines de P. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de A ?
2. Déterminer les valeurs propres de A et, pour chaque valeur propre, déterminer une base du sous-espace propre associé.

5.3 Cas particulier de la dimension 2

Proposition 51 (lien avec le déterminant)

Soient $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \det(A - \lambda I_2) = 0.$$

Exercice 61

✧ Donner, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, le nombre de valeurs propres réelles de
$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Exercices

Révisions, puissances et polynômes de matrices et d'endomorphismes

Exercice 62. ✦✦ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $d_1, \dots, d_n$, n réels deux à deux distincts. Posons

$$\mathrm{D} = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n).$$

Montrer que la famille $\left(\mathrm{D}^k\right)_{k \in [\![0;n-1]\!]}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathscr{D}_n$ des matrices diagonales.

Exercice 63. ✦✦ Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ dont un polynôme annulateur a pour expression $\mathrm{P}(x) = x^2 + x - 2$.

1. Justifier que φ est un isomorphisme et exprimer φ^{-1} en fonction de φ et id_E.
2. Démontrer l'existence de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \varphi^n = a_n \varphi + b_n \,\mathrm{id}_\mathrm{E}.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Énoncer la division euclidienne du polynôme x^n par $x^2 + x - 2$.
Retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 64. ✦✦✦ **Vecteur cyclique et polynôme annulateur**
Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et φ un endomorphisme de E.
On dit qu'un vecteur $u \in \mathrm{E}$ est cyclique pour φ s'il existe $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille $\mathscr{B}_{u,\ell} = \left(u, \varphi(u), \dots, \varphi^{\ell-1}(u)\right)$ soit génératrice dans E.

1. Soit u, un vecteur cyclique pour φ. Montrer que $\mathscr{B}_{u,n}$ est une base de E.
2. Justifier qu'il existe n réels notés $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ tels que $\varphi^n(u) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i \varphi^i(u)$.
3. Justifier que le polynôme d'expression $\mathrm{P}(x) = x^n - \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ est annulateur de φ.

Exercice 65. ✦ Soient φ, ψ deux endomorphismes nilpotents de E.
Montrer que si φ, ψ commutent, alors la somme $\varphi + \psi$ est nilpotente.
Un endomorphisme φ est dit nilpotent s'il existe un entier p tel que $\varphi^p = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ (composée p-ième).

Exercice 66. ✦✦✦ ✎ ✦✦✦ ✎ **Commutant d'un endomorphisme cyclique**
Soit φ un endomorphisme d'un un espace vectoriel E de dimension n. On note $\mathscr{C}(\varphi)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec φ et $\mathbb{R}(\varphi)$ l'ensemble des polynômes en φ. Dit autrement

$$\mathscr{C}(\varphi) = \left\{\psi \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \mid \psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi\right\} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}(\varphi) = \left\{\mathrm{P}(\varphi) \mid \mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]\right\}.$$

Enfin, on dit qu'un endomorphisme h de E est cyclique s'il existe un vecteur $u_0 \in \mathrm{E}$ tel que la famille $\left(u_0, h(u_0), \dots, h^{n-1}(u_0)\right)$ soit une base de E.

1. Montrer que $\mathscr{C}(\varphi)$ et $\mathbb{R}(\varphi)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, puis que $\mathbb{R}(\varphi) \subset \mathscr{C}(\varphi)$.
2. Montrer que φ est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E et des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ tels que :
$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Pour les questions suivantes, on suppose que l'endomorphisme φ est cyclique, et on fixe un vecteur $u_0 \in \mathrm{E}$ tel que la famille $\mathscr{B} = \left(u_0, \varphi(u_0), \dots, \varphi^{n-1}(u_0)\right)$ soit une base de E.

3. Soit $\mathrm{P}(\varphi) = \varphi^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k \varphi^k$. Montrer que $\mathrm{P}(\varphi) = 0$.
Indication : remarquer que $\mathrm{P}(\varphi)(u_0) = 0$, puis montrer que $\mathrm{P}(\varphi)\left(\varphi^\ell(u_0)\right) = 0$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$.
4. a) Montrer que la famille $\left(\mathrm{id}_\mathrm{E}, \varphi, \dots, \varphi^{n-1}\right)$ est une base de $\mathbb{R}(\varphi)$.
Indication : utiliser la division euclidienne.
   b) En déduire que $\mathscr{C}(\varphi) = \mathbb{R}(\varphi)$, puis la dimension du commutant $\mathscr{C}(\varphi)$.
Indication : si $f \in \mathscr{C}(\varphi)$, exprimer $f(u_0)$ dans la base $\mathscr{B}$, puis calculer $f\left(\varphi^i(u_0)\right)$ pour $i \in \mathbb{N}$.

Valeurs propres, vecteurs propres

Exercice 67. ✧ Expliquez l'intérêt de la fonction Python suivante.

Editeur
```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

def bidule(A,x) : # A est une matrice carrée et x, un réel
    [n,p]=np.shape(A)
    if n!=p :
        print('Non, la matrice n est pas carrée ...')
    elif np.linalg.matrix_rank(A-x*np.eye(n))<n :
        print('Oui !')
    else :
        print('Non !')
```

Exercice 68. ✦✦ Vrai ou faux?

1. Si $A = J^2$ alors $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$.
2. Si A est antisymétrique alors A est diagonalisable.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}\left(A^2\right)$ alors $\sqrt{\lambda} \in \mathrm{Sp}(A)$ ou $-\sqrt{\lambda} \in \mathrm{Sp}(A)$.

Exercice 69. ✦✦ **Polynôme annulateur minimal** *Questions sans préparation HEC 2015*

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1. Établir l'existence d'un polynôme P non nul tel que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
2. Soit Q un polynôme tel que $Q(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et de degré minimal parmi les polynômes non nuls tels que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que toute racine de Q est valeur propre de f.

Exercice 70. ✦ *D'après EDHEC 2019*

On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2 .
   b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).
   c) En Python, la commande `linalg.matrix_rank(M)` de la bibliothèque `numpy` renvoie le rang de la matrice `M`. On a saisi

Editeur
```
import numpy as np
A = np.array([[1, 0, 0],[-2, 3, -2],[-1,1,0]])
r1=np.linalg.matrix_rank(A-np.eye(3))
r2=np.linalg.matrix_rank(A-2*np.eye(3))
print('r1=',r1,'r2=',r2)
```

Python a répondu

Console
```
>>> # script executed

r1= 1 r2= 2
```

   Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres de f et à la dimension des sous-espaces propres associés?
   d) Donner une base de chacun des noyaux $\mathrm{Ker}\left(f-\lambda_1 \mathrm{id}\right)$ et $\mathrm{Ker}\left(f-\lambda_2 \mathrm{id}\right)$. En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.
2. a) Justifier qu'il existe une base (u_1, v_1, v_2) de $\mathbb{R}^3$, où (u_1, v_1) est une base de $\mathrm{Ker}\left(f-\lambda_1 \mathrm{id}\right)$ et (v_2) une base de $\mathrm{Ker}\left(f-\lambda_2 \mathrm{id}\right)$. *On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de u_1 et la première de v_1 étant nulles.*
   b) On note $x = (a, b, c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer, en fonction de a, b et c les coordonnées de x dans la base (u_1, v_1, v_2).

Exercice 71. ✦ Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) par

$$\begin{cases} \varphi(e_1) &= 6e_1 - 4e_2 + 4e_3 \\ \varphi(e_2) &= e_1 + 2e_2 + 2e_3 \\ \varphi(e_3) &= -e_1 + 2e_2 + 2e_3. \end{cases}$$

Déterminer le sous-espace propre de φ associé à la valeur propre 4.

Exercice 72. ✦ ✎ **Un exemple détaillé : la matrice Attila**

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. Notons $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1 et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. **a)** Préciser le rang de J. En déduire que 0 est valeur propre dont on précisera la dimension de l'espace propre associé. Préciser une base $\mathscr{C}$ de l'espace propre associé à la valeur propre 0.

b) Calculer JX. Que peut-on en déduire ?

2. En déduire que J ne possède que deux valeurs propres.

3. Montrer que J est semblable à une matrice diagonale dont on précisera les coefficients diagonaux.

4. Conclure en donnant tous les polynômes annulateur de J.

Exercice 73. ✦ **Transformation affine et spectre**
Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. Pour tous $a, b \in \mathbb{N}$, on pose

$$M(a,b) = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{bmatrix}.$$

1. Exprimer $M(a,b)$ à l'aide de I_n et J. En déduire le lien entre le spectre de J et celui de $M(a,b)$.

2. On a vu à l'exercice 49 qu'il y a exactement 105 matrices non inversibles lorsque $a, b \in [\![-50;50]\!]$ et $n = 25$. Retrouver ce résultat sachant que J admet deux valeurs propres 0 et n (voir exercice précédent).

Exercice 74. ✦✦ *d'après ESCP 2001*
Soient n un entier naturel tel que $n \geqslant 3$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

et φ l'endomorphisme associé à A sur la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Déterminer une base du noyau de φ et une base de l'image de φ.

2. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

Exercice 75. ✦✦ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrer que λ est valeur propre de AB si et seulement si λ est valeur propre de BA.

Exercice 76. ✦ **Matrices stochastiques**
Une matrice carrée $P = (p_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est dite stochastique si elle vérifie les deux conditions :

i) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$.

ii) Tous les coefficients de la matrice P sont positifs.

1. Traduire la condition **i)** en terme de vecteur propre.
On pourra poser $X = {}^t(1,\ldots,1)$.

2. Montrer que l'ensemble $\mathscr{E}$ des matrices stochastiques est une partie convexe stable par produit.
Une partie A *est convexe si pour tous* $a, b \in A$, *tout* $\lambda \in [0,1]$, $\lambda a + (1-\lambda) b \in A$.
Une partie A *est stable par produit si pour tous* $a, b \in A$, $ab \in A$.

3. Démontrer que les valeurs propres réelles d'une matrice stochastique sont comprises entre -1 et 1.

≫ *Pour aller plus loin, on pourra consulter le sujet EM Lyon 2010 ECS, problème I.*

Exercice 77. ✦ **Crochet de Lie et nilpotence**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A^k B - BA^k = kA^k$.

2. On considère

$$\varphi_B : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & MB - BM. \end{array} \right.$$

Vérifier que φ_B est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Traduire la question 1 en terme de vecteur propre et valeur propre.

4. En déduire l'existence d'un entier k non nul tel que $A^k = 0_n$.

Exercice 78. ✦✦ ✎ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note φ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[x]$ par $\varphi(P) = (x-1)P'(x)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$. Préciser sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

2. En déduire le spectre de φ.

3. Soit P un vecteur propre de φ associé à une valeur propre λ non nulle.

  a) Justifier que 1 est une racine de P.

  b) En étudiant la multiplicité de 1 en tant que racine de P, exprimer P en fonction de λ.

4. Conclure en donnant tous les espaces propres de φ.

Exercice 79. ✦✦✦ **Matrice à diagonale dominante, localisation des valeurs propres réelles**
Une matrice carrée $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est dite à diagonale dominante si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\left|a_{i,i}\right| > \left|a_{i,1}\right| + \cdots + \left|a_{i,i-1}\right| + \left|a_{i,i+1}\right| + \cdots + \left|a_{i,n}\right|.$$

1. Montrer qu'une matrice à diagonale dominante est inversible.
Indication. On pourra s'intéresser au noyau de la matrice.

2. Soit $B = \left(b_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\mathrm{Sp}(B) \subset \bigcup_{i=1}^{n} [b_{ii} - r_i, b_{ii} + r_i] \quad \text{où} \quad r_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |b_{i,j}|.$$

3. *Exemple d'une matrice tridiagonale*
Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$ et A la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Montrer que si λ est une valeur propre réelle de A, alors il existe $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\lambda = 2\cos(\theta)$.

Exercice 80. ✦✦✦ On considère les deux matrices *Question sans préparation, HEC 2018*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Comparer leurs spectres, leurs traces, leurs rangs, ainsi que les dimensions de leurs sous-espaces propres.

2. Sont-elles semblables ?

Exercice 81. ✦✦✦ *D'après Oraux HEC 2018*
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM$.

1. Démontrer que A et φ_A ont le même spectre.

2. Comparer, pour chacune de leurs valeurs propres communes, les dimensions des sous-espaces propres correspondants de A et φ_A.