CHAPITRE 7

Variables aléatoires à densité

If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.

JOHN VON NEUMANN
Mathématicien et physicien américano-hongrois (1903-1957)

1 Rappels : intégrales généralisées

1.1 Convergence et convergence absolue

DÉFINITION — **intégrale généralisée en b**

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.
L'intégrale généralisée *(ou impropre) de f sur $[a;b[$ est notée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Elle est dite* ***convergente*** *si $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers b avec $x < b$. Dans ce cas, on pose*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si la limite n'existe pas ou qu'elle est infinie, l'intégrale est dite ***divergente****.*

Remarques.
- La définition s'étend aux fonctions continues sur $]a,b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$.
- Si f est une fonction continue sur un intervalle $]a,b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

L'intégrale généralisée de f sur $]a,b[$ est notée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Elle est dite **convergente** si pour un réel $c \in]a,b[$, les intégrales généralisées $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes. Dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

THÉORÈME — **absolue convergence**

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite ***absolument convergente*** *si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.*
De plus, ***si*** *$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente,* ***alors*** *elle est convergente.*

⚠ **Attention.** La réciproque est fausse. Il existe des intégrales généralisées convergentes sans être absolument convergente.

1.2 Critères de convergence

À l'aide du théorème de convergence monotone, on montre que, pour $f : [a;b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue positive, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'application $x \in [a;b[\mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.

PROPOSITION — **critère de comparaison et de négligeabilité**

Soient f, g deux fonctions continues définies sur $[a, b[$.

- ***Si***
  - *f et g sont positives,*
  - *pour tout $x \in [a, b[, \quad f(x) \leqslant g(x)$,*
  - *$\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente,* ***alors*** *$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est aussi convergente.*
- ***Si***
  - *g est positive sur un voisinage de b ;*
  - *$f \underset{b^-}{=} o(g)$;*
  - *$\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente,* ***alors*** *$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est aussi convergente.*

PROPOSITION — **critère d'équivalence**

Soient f, g deux applications continues définies sur $[a, b[$.

Si
- *f et g sont de signe constant sur un voisinage de b,*
- *$f \underset{b^-}{\sim} g$,*

alors *les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.*

Remarque. En pratique, on compare souvent aux **intégrales de Riemann.**

- L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente en 0 si et seulement si $\alpha < 1$;
- L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

1.3 Règles de calculs

Sous réserve de convergence, les propriétés de linéarité, de croissance de l'intégrale, l'inégalité triangulaire et la relation de Chasles sont encore valables. Par contre, pour effectuer une intégration par parties, on se ramène à un segment.

Théorème **changement de variable**

Soit f continue sur un intervalle $]a;b[$.

Si $\varphi :]\alpha;\beta[\to]a;b[$ *est une bijection croissante de classe* $\mathscr{C}^1$,

alors *les intégrales généralisées* $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$ *et* $\int_\alpha^\beta \varphi'(t) f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$ *sont de même nature.*

Dans le cas de convergence,
$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta \varphi'(t) f\big(\varphi(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque. L'énoncé s'étend au cas décroissant.

Méthode

Rédiger un changement de variable dans le cas généralisé

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x.$$

- La fonction $x \in [0;+\infty[\mapsto \sqrt{1+\mathrm{e}^x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, I est une intégrale généralisée en $+\infty$. De plus,

$$\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{e}^{x/2}}.$$

Comme $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x$ est convergente, par le critère d'équivalence pour des intégrandes positives, I est convergente.

- Soit $\varphi : x \in [0;+\infty[\mapsto \sqrt{1+\mathrm{e}^x}$. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ par composition. De plus,

$$\varphi(0) = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

φ est une bijection croissante de $[0;+\infty[$ dans $[\sqrt{2};+\infty[$. Par le théorème de changement de variable, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{t}\,\frac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2-1} = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature (convergentes) et égales.

- Calculons l'intégrale de droite par décomposition

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \left[\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{+\infty} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right).$$

Après simplification $\qquad \mathrm{I} = 2\ln(\sqrt{2}+1).$

Exercice 1

✦ Effectuer le changement de variable $u = 1/t$ dans l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Que peut-on en déduire ? p. 23

2 Variables aléatoires à densité

2.1 Définition et premières propriétés

DÉFINITION — variable aléatoire à densité

Soit X *une variable aléatoire sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$*. Notons* F_X *la fonction de répartition de* X*.*
On dit que X *est une* ***variable aléatoire à densité*** *si :*

- F_X *est continue sur* $\mathbb{R}$*.*
- F_X *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *sauf en un nombre fini de points.*

Exemples.
- Si F_X vérifie :

$$\forall x \in]-\infty; 0[,\ F_X(x) = 0, \quad \forall x \in [0;1],\ F_X(x) = x, \quad \forall x \in]1; +\infty[,\ F_X(x) = 1,$$

alors X est une variable à densité.
On dira dans la suite que X suit une loi uniforme sur $[0;1]$.
- Les variables aléatoires discrètes ne sont pas des variables à densité.

Remarque. Soit X une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition. Nous avons vu que pour tous réels a, b avec $a < b$,

$$F_X(b) - F_X(a) = \mathbf{P}\Big(\big[a < X \leqslant b\big]\Big).$$

De plus, on montre que
$$\mathbf{P}\Big(\big[X = b\big]\Big) = F_X(b) - \lim_{\substack{a \to b \\ a < b}} F_X(a).$$

Preuve. En effet, on a par exemple $[X = b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [b - 1/n < X \leqslant b]$. La suite d'événements $\big([b-1/n < X \leqslant b]\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion, le théorème de la limite monotone dans sa version probabiliste s'applique. Ainsi,

$$\mathbf{P}\Big(\big[X = b\big]\Big) = \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\big([b - 1/n < X \leqslant b]\big) = F_X(b) - \lim_{n \to +\infty} F_X(b - 1/n).$$

On conclut en rappelant que la fonction de répartition est croissante. ■

Si X est une variable aléatoire, F_X est continue. En particulier, pour $b \in \mathbb{R}$: $\boxed{\mathbf{P}\Big(\big[X = b\big]\Big) = 0.}$
Plus généralement, pour tous a, $b \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\Big(\big[X \in]a; b[\big]\Big) = \mathbf{P}\Big(\big[X \in [a; b[\big]\Big) = \mathbf{P}\Big(\big[X \in]a; b]\big]\Big) = \mathbf{P}\Big(\big[X \in [a; b]\big]\Big).$$

DÉFINITION — densité de probabilité

On dit qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une* ***densité de probabilité*** *si elle vérifie :*

→ f *est positive sur* $\mathbb{R}$*.*
→ f *est continue sur* $\mathbb{R}$ *sauf en un nombre fini de points.*
→ *L'intégrale suivante est convergente et* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

Exemple. Justifions que la fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{\pi(1+t^2)}$ définit une densité de probabilité.
- f est clairement une fonction positive.
- f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.
- Pour $A \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{\pi(1+t^2)} = \left[\frac{\arctan(t)}{\pi}\right]_0^A = \frac{\arctan(A) - \arctan(0)}{\pi} \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{\pi/2}{\pi} = \frac{1}{2}.$$

De même, pour $B \in \mathbb{R}^-$, par parité de f, $\displaystyle\int_B^0 f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[B \to -\infty]{} \frac{1}{2}$. On a bien la convergence et l'égalité $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
En conclusion, f est une densité de probabilité.

Exercice 2

Exemples *Les questions 1 et 2 sont indépendantes.*

1. ✦ Montrer que l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

p. 23

2. ✦✦ On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \frac{\lambda}{\mathrm{e}^t+1}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$.

   a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall x > 0$, $\frac{1}{x^2+x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.

   b) 🔍 En déduire la valeur de la constante λ pour que f soit une densité de probabilité.

PROPOSITION — densité de probabilité d'une variable à densité

Soit X *une variable aléatoire à densité.*
Toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à valeurs positives qui coïncide avec ${F_X}'$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points est une densité de probabilité. On dit que f est une densité de probabilité de la variable aléatoire X.

Preuve. Vérifions les deux premiers points de la définition :

→ Par hypothèse, f est une fonction positive. Notons toutefois que la fonction de répartition étant croissante, la dérivée F'_X est positive sur son ensemble de définition. On s'assure donc seulement que f est positive aussi en les points où f et ${F_X}'$ ne coïncident pas.

→ Comme X est une variable à densité, sa fonction de répartition est $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points. Sa dérivée est donc continue sauf un nombre fini de points.

→ Le dernier point sera repris dans la démonstration de la proposition suivante. ■

PROPOSITION — densité et fonction de répartition

Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et F_X, f_X respectivement la fonction de répartition et une densité de X.

- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, et* $\quad F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$.
- *Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ tels que $a < b$,* $\quad \mathbf{P}\Big([X \in [a;b]]\Big) = \displaystyle\int_{a}^{b} f_X(t)\,\mathrm{d}t$.

Preuve. Notons $E = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$, l'ensemble des points de discontinuité de f_X avec pour $t \notin E$, $f_X(t) = F'_X(t)$. On impose l'ordre $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$.

• Prouvons le premier point. Soit $i \in [\![1; m-1]\!]$. Étudions l'intégrale $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_X(t)\,\mathrm{d}t$.

Comme l'intégrande f_X est continue sur $]x_i; x_{i+1}[$, on est dans le cas d'une intégrale généralisée en x_i et x_{i+1}. Soient $x, y \in]x_i; x_{i+1}[$, l'intégrande est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x; y]$, ainsi

$$F_X(y) - F_X(x) = \int_x^y {F_X}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^y f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, la continuité de F_X sur $\mathbb{R}$ (en particulier, en x_i et x_{i+1}) donne :

$$F_X(y) \underset{y \to x_{i+1}}{\longrightarrow} F_X(x_{i+1}) \quad \text{et} \quad F_X(x) \underset{x \to x_i}{\longrightarrow} F_X(x_i).$$

On en déduit la convergence de l'intégrale généralisée avec :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_X(t)\,\mathrm{d}t = F_X(x_{i+1}) - F_X(x_i).$$

→ De même, pour tout $x < x_1$, on a $F_X(x_1) - F_X(x) = \displaystyle\int_x^{x_1} f_X(t)\,\mathrm{d}t$. Comme $F_X(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\int_{-\infty}^{x_1} f_X(t)\,\mathrm{d}t = F(x_1).$$

→ Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe $j \in [\![1;m]\!]$, le plus grand indice i tel que $x_i < x$. Par télescopage

$$\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_1) = \big(\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_j)\big) + \big(\mathrm{F}(x_j) - \mathrm{F}(x_{j-1})\big) + \big(\mathrm{F}(x_{j-1}) - \mathrm{F}(x_{j-2})\big) + \cdots + \big(\mathrm{F}(x_2) - \mathrm{F}(x_1)\big).$$

D'après les deux points précédents et la relation de Chasles :

$$\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_1) = \int_{x_j}^{x} f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_{j-1}}^{x_j} f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_{j-1}}^{x_j} f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t + \cdots + \int_{x_1}^{x_2} f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_1}^{x} f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Finalement, $$\mathrm{F}_{\mathrm{X}}(x) = \int_{x_1}^{x} f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{F}(x_1) = \int_{x_1}^{x} f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{x_1} f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Nous avons vu que :

$$\mathbf{P}\Big([\mathrm{X} \in [a;b]]\Big) = \mathbf{P}\Big([\mathrm{X} \in \,]a;b]]\Big) = \mathrm{F}_{\mathrm{X}}(b) - \mathrm{F}_{\mathrm{X}}(a).$$

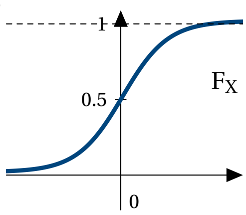
De nouveau, la relation de Chasles donne :

$$\mathbf{P}\Big([\mathrm{X} \in [a;b]]\Big) = \int_{-\infty}^{b} f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{a} f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{b} f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t.$$

■

Remarque. En particulier, on a $\mathbf{P}\big([\mathrm{X} \geqslant x]\big) = \mathbf{P}\big([\mathrm{X} > x]\big) = 1 - \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_{x}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple. Reprenons la densité f de la méthode précédente et calculons la fonction de répartition F. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,



$$\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\pi(1+t^2)} = \left[\frac{\arctan(t)}{\pi}\right]_{-\infty}^{x}$$
$$= \frac{\arctan(x) - \lim\limits_{t \to -\infty} \arctan(t)}{\pi} = \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}.$$

Exercice 3

✧ Calculer $\mathbf{P}(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} < 0)$ lorsque X est une variable aléatoire qui a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{\pi(1+t^2)}$.

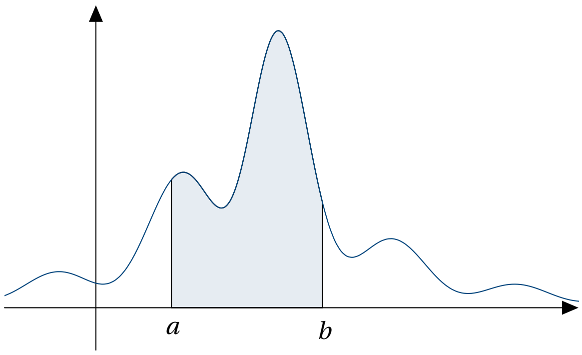
p. 23

Attention. Il ne faut pas confondre fonction de répartition et densité.
Rappelons qu'une fonction de répartition est une fonction croissante de limite 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$. Le lien est, pour tout $t \in \mathbb{R}$, sauf un nombre fini,

$$\boxed{f_{\mathrm{X}}(t) = \mathrm{F}_{\mathrm{X}}{}'(t).}$$

La densité d'une variable X n'est pas unique alors que la fonction de répartion l'est.

Interprétation graphique



Traçons la courbe représentative d'une densité.
L'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$, $x = b$ correspond exactement à la probabilité que la variable aléatoire prenne les valeurs comprises entre a et b.

$$\boxed{\text{Aire} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{P}\Big([a \leqslant X \leqslant b]\Big).}$$

Lorsque $a \to -\infty$ et $b \to +\infty$, on retrouve bien

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 = \mathbf{P}(\Omega).$$

De nouveau, on constate que pour une variable aléatoire continue, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}\Big([X = a]\Big) = 0$.

PROPOSITION **la densité caractérise la loi**

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires à densité sur* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *et* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une application.*
Si f *est à la fois une densité de* X *et* Y*, alors* X *et* Y *ont même loi.*

Preuve. On rappelle que deux variables aléatoires ont même loi lorsqu'elles ont même fonction de répartition. Or, pour $x \in \mathbb{R}$, et d'après la proposition précédente

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = F_Y(x).$$

Deux variables aléatoires à densité, ayant la même densité de probabilité, ont même loi. ■

Remarque. En pratique, donner la loi d'une variable aléatoire à densité est équivalent à donner

$$\mathbf{P}\Big([X \in [a, b]]\Big) \text{ pour tous } a,\ b \in \mathbb{R},$$

C'est aussi équivalent à donner la fonction de répartition ou une densité de probabilité.

PROPOSITION **conditions pour une variable à densité**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction.*

Si
- *La fonction* f *est positive.*
- *La fonction* f *est continue sur* $\mathbb{R}$*, éventuellement privé d'un ensemble fini de points.*
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

Alors *il existe une variable aléatoire* X *dont* f *est une densité de probabilité.*

Résultat admis.

Exemple. *Loi de Gumbel*
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \mathrm{e}^{-x-\mathrm{e}^{-x}}$$

est densité de probabilité. En effet, il est clair que la fonction est positive et continue sur $\mathbb{R}$ (par composition). Or pour tous $A, B \in \mathbb{R}$ avec $A < B$,

$$\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A^B \mathrm{e}^{-x-\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_A^B \mathrm{e}^{-x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x}}\Big]_A^B \underset{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}}{\longrightarrow} 1.$$

Ce qui justifie la convergence et l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

2.2 Cas des variables du type $Y = \varphi(X)$

Méthode

Comment montrer qu'une variable aléatoire est à densité et obtenir une densité ?

Soit X, une première variable aléatoire à densité et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application. On pose $Y = \varphi(X)$. Pour justifier que Y est une nouvelle variable aléatoire, on peut procéder comme suit :

- On précise $Y(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises par Y.
- On exprime la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X. En particulier, on cherche pour tout $t \in Y(\Omega)$, la probabilité $\mathbf{P}\big([Y \leqslant t]\big)$.
- Ensuite, on s'assure que F_Y est bien continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points (noté dans la suite D).
- On calcule la dérivée $F_Y{}'$ sur $\mathbb{R} \setminus D$ afin d'avoir une densité de Y.

⚠ **Attention.** Dans le cas général d'une application φ, rien ne garantit que $Y = \varphi(X)$ reste une variable aléatoire à densité, ni même une variable aléatoire (voir par exemple l'exercice **??**, **??**).

Exercice 4

✧ **Un exemple avec la loi de Laplace**
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable à densité et que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel t par $f(t) = \lambda \exp(-|t|)$ est une densité de X.

1. Quelle est la valeur de λ ? Préciser le graphe de f.
2. Déterminer la fonction de répartition de X. *Indication. On distinguera $x \leqslant 0$ et $x \geqslant 0$.* p. 23
3. On pose $Y = 3X - 2$.
   a) Établir une relation entre F_X et F_Y, les fonctions de répartition de X et Y.
   b) Vérifier que Y est une variable aléatoire à densité et préciser une densité.

Généralisons l'exercice précédent.

Exemple. Calcul de la loi de $Y = aX + b$ en fonction de la loi de X
Soient X une variable aléatoire à densité et $a, b \in \mathbb{R}$.
Pour donner la loi de $Y = aX + b$, nous avons vu qu'il suffit de donner la fonction de répartition ou une densité de Y.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

• Pour $a > 0$.

$$[Y \leqslant t] = \left[X \leqslant \frac{t-b}{a}\right] \quad \Rightarrow \quad F_Y(t) = \mathbf{P}\big([Y \leqslant t]\big) = \mathbf{P}\left(\left[X \leqslant \frac{t-b}{a}\right]\right) = F_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Rappelons que F_X est continue et, sauf en un nombre fini de points, F_X est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par composition, F_Y est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points sur $\mathbb{R}$. Y est donc une variable aléatoire à densité. F_Y est dérivable sauf en un nombre fini de points avec :

$$f_Y(t) = F_Y{}'(t) = \frac{1}{a} F_X{}'\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Relation que l'on peut étendre à tout réel t pour définir une densité de Y.

• Pour $a < 0$. On a maintenant $[Y \leqslant t] = \left[X \geqslant \frac{t-b}{a}\right]$. Passons au complémentaire,

$$F_Y(t) = \mathbf{P}\big([Y \leqslant t]\big) = \mathbf{P}\left(\left[X \geqslant \frac{t-b}{a}\right]\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\left[X < \frac{t-b}{a}\right]\right) = 1 - F_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Car, la variable aléatoire X est à densité, $\mathbf{P}\left(\left[X < \frac{t-b}{a}\right]\right) = \mathbf{P}\left(\left[X \leqslant \frac{t-b}{a}\right]\right)$. Par dérivation, on a, pour tout réel t (sauf un nombre fini),

$$f_Y(t) = -F_Y{}'(t) = -\frac{1}{a}F_X{}'\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{-a}f_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

De nouveau, on étend cette égalité à tout réel t.
En résumé, on obtient dans tous les cas

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f_Y(t) = \frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Exercice 5

✦✦ Soit X une variable aléatoire à densité suivant une loi uniforme sur $[-1;1]$. C'est-à-dire, une densité de X est donnée par $f = 1/2 \cdot \mathbf{1}_{[-1;1]}$.

1. Justifier que $U = |X|$ est une variable à densité et donner une densité.
2. Faire de même avec $V = X^2$.
3. *Cas général.*
   Soit Z une variable aléatoire réelle à densité f continue sur $\mathbb{R}$. Justifier que $Y = Z^2$ est une variable aléatoire réelle admettant une densité nulle sur $\mathbb{R}^-$ et donnée sur $\mathbb{R}_*^+$ par

$$g(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\left(f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})\right).$$

p. 24

Hasard et mécanique quantique **Le saviez-vous**

La mécanique quantique est une partie de la physique qui étudie l'infiniment petit des particules (niveau atomique ou subatomique). Elle se développa au début du XX^e siècle. Cette théorie, d'une redoutable efficacité dans ses prédictions, fait pourtant une place importante au hasard.
Suivant le principe d'incertitude de Heisenberg, il n'est pas possible de connaître à la fois la position et la vitesse d'une particule. Ainsi, au lieu d'étudier la position exacte de la particule, on regarde la probabilité de présence dans une certaine zone.
Par exemple, l'équation de Schrödinger décrit l'évolution de l'onde de probabilité $\Psi(\mathbf{r}, t)$ d'un électron se déplaçant dans un potentiel $V(\mathbf{r}, t)$:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(\mathbf{r}, t)\right]\Psi(\mathbf{r}, t).$$

La quantité $|\Psi(\mathbf{r})|^2$ donne la densité de probabilité de trouver l'électron en un point $\mathbf{r}$.
Albert Einstein s'opposa à cette nouvelle approche de la physique. Il refusait que les lois de la nature puissent faire appel directement au hasard.

Gott würfelt nicht *(Dieu ne joue pas au dés).* EINSTEIN.

3 Espérance d'une variable à densité

3.1 Définition

DÉFINITION — **espérance dans le cas à densité**

Soit X *une variable aléatoire à densité* f_X *sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
On définit ***l'espérance de*** X*, sous réserve de convergence absolue, comme le réel*

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

⚠ **Attention.** Comme pour les variables aléatoires discrètes, il ne faut pas oublier la convergence absolue.

Exemples.
- Considérons X une variable à densité dont une densité est précisée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction f est continue par morceaux, nulle en dehors d'un segment. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge donc absolument et X admet une espérance avec

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

- Reprenons l'exemple d'une variable aléatoire Y de densité $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}$.

Par les croissances comparées et le critère de négligeabilité, il est clair que $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. L'espérance existe. La densité f est une fonction paire, donc $t \in \mathbb{R} \mapsto t f(t)$ est impaire. Il vient

$$\int_{-\infty}^{0} t f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{puis,} \quad \mathbf{E}(Y) = 0.$$

⚠ **Attention.** La condition de parité de la densité n'est pas suffisant, il faut aussi que l'espérance existe comme le montre l'exemple suivant.

- On dit que Z suit une *loi de Cauchy*, lorsque Z admet pour densité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_Z(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}.$$

On a l'équivalent $t f_Z(t) \underset{+\infty}{\sim} 1/(\pi t)$. Or, l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente. Les fonctions sont positives sur $[1;+\infty[$, *le critère d'équivalence* s'applique, $\int_1^{+\infty} t f_Z(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

L'espérance de Z n'est pas définie puisque l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Z(t)\,\mathrm{d}t$ ne converge pas (absolument).

Exercice 6

✧ **Loi de Pareto**
Soient $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ et X une variable aléatoire de densité f définie par :

$$f(t) = \frac{1}{\alpha} t^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}} \quad \text{si} \quad t \in [1;+\infty[\quad \text{et } f(t) = 0 \text{ sinon.}$$

p. 24

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Calculer $\mathbf{P}\big([0 \leqslant X \leqslant 1+\alpha]\big)$ en fonction de α.
3. Pour quelles valeurs de α, X admet-elle une espérance? La calculer quand elle existe.

3.2 Règles de calculs sur l'espérance

Les résultats suivants sont identiques au cas des v.a discrètes dénombrables.

PROPOSITION — **linéarité de l'espérance**

Soient X *et* Y *des variables aléatoires à densité admettant une espérance. Alors pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*, la variable aléatoire* $\lambda X + \mu Y$ *admet une espérance et on a :*

$$\mathbf{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbf{E}(X) + \mu \mathbf{E}(Y).$$

Vocabulaire. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On dit que X est **centrée** si X admet une espérance et $\mathbf{E}(X) = 0$.
D'après la proposition précédente, la variable aléatoire $X - \mathbf{E}(X)$ est toujours une variable aléatoire centrée.

PROPOSITION — **existence par domination**

Soient X *et* Y *sont deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé.*

Si
- $|X| \leqslant Y$.
- Y *admet une espérance.*

Alors, X *admet une espérance et* $|\mathbf{E}(X)| \leqslant \mathbf{E}(Y)$.

Exemple. Si X est une variable aléatoire bornée, alors X admet une espérance.

PROPOSITION — **positivité et croissance de l'espérance**

Soient X, Y *des variables aléatoires à densité admettant une espérance.*

- *Positivité de l'espérance : si* $X \geqslant 0$ *presque sûrement, alors* $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$.
- *Croissance de l'espérance : si* $X \leqslant Y$ *presque sûrement, alors* $\mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y)$.

3.3 Formule de transfert

THÉORÈME — **de transfert**

Soient X *une variable aléatoire admettant une densité* f_X *nulle en dehors de* $]a, b[$ *avec* $(a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ *et* $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}$ *une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points. On a l'équivalence entre*

i) *La variable* $\varphi(X)$ *admet une espérance.*

ii) *L'intégrale* $\displaystyle\int_a^b \varphi(t) f_X(t)\,\mathrm{d}t$ *converge absolument.*

Et en cas de convergence absolue, $$\mathbf{E}\big(\varphi(X)\big) = \int_a^b \varphi(t) f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve. **Dans le cas bijectif et** $\mathscr{C}^1$**.**

Supposons que la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) > 0$. On suppose de plus que F_X est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et f_X est une densité de X continue sur $\mathbb{R}$.

- **La variable Y est à densité, puis calcul d'une densité.**

Dans un premier temps, vérifions que $Y = \varphi(X)$ est une variable à densité et précisons une densité.

→ *L'ensemble* $Y(\Omega)$.

Par le théorème de la bijection, φ est strictement croissante et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle ouvert $\varphi(\mathbb{R}) =]\alpha, \beta[$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) et la réciproque φ^{-1} est continue, strictement croissante de $]\alpha, \beta[$ dans $\mathbb{R}$. En particulier

$$Y(\Omega) \subset \varphi(\mathbb{R}) =]\alpha, \beta[.$$

→ *Lien entre* F_Y *et* F_X.

Soit $t \in]\alpha, \beta[$. Comme φ est bijective et strictement croissante

$$F_Y(t) = \mathbf{P}\big([Y \leqslant t]\big) = \mathbf{P}(\varphi(X) \leqslant t) = \mathbf{P}\left(X \leqslant \varphi^{-1}(t)\right) = F_X\left(\varphi^{-1}(t)\right) \qquad (\star)$$

De plus, pour $t \geqslant \beta$, $F_Y(t) = 1$ et pour $t \leqslant \alpha$, $F_Y(t) = 0$.

→ *Continuité et dérivabilité de* F_Y.

Par composition, F_Y est continue sur $]\alpha, \beta[$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction F_Y est aussi continue sur $]-\infty; \alpha[$. De plus, par composition des limites

$$\left|\begin{array}{l} \rightarrow\ \varphi^{-1}(t) \underset{t \to \alpha^+}{\longrightarrow} -\infty \\ \rightarrow\ F_Y(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad F_X\left(\varphi^{-1}(t)\right) \underset{t \to \alpha^+}{\longrightarrow} 0 = F_Y(\alpha).$$

Ce qui prouve la continuité en α. De même si $\beta \in \mathbb{R}$. Finalement, F_Y est bien continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, par le théorème de dérivation des applications réciproques, on justifie la dérivabilité de φ^{-1} sur $]\alpha, \beta[$ avec

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \left(\varphi^{-1}\right)'(t) = \frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(t)\right)}$$

À partir de la relation $(\star)$, on justifie par composition que F_Y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\alpha, \beta[$ et Y est une variable à densité.

→ *Expression d'une densité.*

Une densité est donnée par dérivation d'une fonction composée

$$\forall\, t \in]\alpha; \beta[, \qquad f_Y(t) = F_Y{}'(t) = \left(\varphi^{-1}\right)'(t) \cdot F_X{}'\big(\varphi^{-1}(t)\big) = \frac{f_X\big(\varphi^{-1}(t)\big)}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(t)\right)}.$$

De plus pour $t \notin]\alpha, \beta[$, $f_Y(t) = 0$. En particulier pour $x \in \mathbb{R}$, on obtient

$$f_Y\big(\varphi(x)\big) = \frac{f_X\big(\varphi^{-1}(\varphi(x))\big)}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(\varphi(x))\right)} = \frac{1}{\varphi'(x)} f_X(x) \qquad (\bullet)$$

- **Existence et calcul de l'espérance.**

La variable Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale $I = \displaystyle\int_\alpha^\beta t f_Y(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. Effectuons le changement de variable $t = \varphi(x)$ de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissant. I est absolument convergente si et seulement si l'intégrale suivante l'est aussi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_Y\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{car} \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \varphi'(x).$$

Or, en utilisant $(\bullet)$, cette dernière se simplifie par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ce qui justifie bien l'équivalence entre **i**)et **ii**). On conclut en rappelant qu'en cas de convergence, les intégrales sont égales :

$$\mathbf{E}(Y) = \int_\alpha^\beta t f_Y(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

■

Exercice 7

✧ **Applications**

1. Soit X, une variable à densité admettant une espérance et $a, b \in \mathbb{R}$. À l'aide de la formule de transfert, montrer que $a\mathrm{X}+b$ admet une espérance et
$$\mathbf{E}(a\mathrm{X}+b) = a\mathbf{E}(\mathrm{X})+b.$$
2. Soit X une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par $f = \mathbf{1}_{]0;1[}$. Justifier l'existence de l'espérance $\mathbf{E}\big(\ln(\mathrm{X})\big)$ et la calculer.

p. 25

4 Moments et variance d'une variable à densité

4.1 Moments

Pour tout entier naturel s, le moment d'ordre s d'une variable aléatoire X est le nombre $m_s(\mathrm{X})$ défini par :
$$m_s(\mathrm{X}) = \mathbf{E}(\mathrm{X}^s).$$
En particulier pour $s = 1$, on retrouve l'espérance $m_1(\mathrm{X}) = \mathbf{E}(\mathrm{X})$.
Dans le cas d'une variable aléatoire à densité, et sous réserve d'absolue convergence, la formule de transfert donne :
$$m_s(\mathrm{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 8

✦ On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} -\ln(x) & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f.
Montrer que X admet des moments à tout ordre et les calculer.

p. 25

Remarque. On montre que si X a un moment d'ordre r alors, X admet un moment d'ordre s pour tout entier $s \leqslant r$.

Exercice 9

✦✦

1. Prouver la remarque précédente.
2. Soit $r \in \mathbb{N}^*$, construire une variable aléatoire à densité admettant un moment d'ordre r mais pas de moment d'ordre $r+1$.

p. 25

4.2 Variance

De nouveau, les résultats qui suivent sont calqués sur le cas des variables discrètes.

DÉFINITION — **variance et écart-type**

Soit X *une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.*

- *On appelle* ***variance*** *d'une variable aléatoire* X*, la quantité* $\mathbf{V}(\mathrm{X}) = \mathbf{E}\Big(\big(\mathrm{X}-\mathbf{E}(\mathrm{X})\big)^2\Big)$.
- *On appelle* ***écart-type*** *de* X*, la quantité* $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathbf{V}(\mathrm{X})}$.

Remarque. La quantité $\sigma(\mathrm{X})$ est bien définie car $\big(\mathrm{X}-\mathbf{E}(\mathrm{X})\big)^2 \geqslant 0$. Donc, par croissance de l'espérance, $\mathbf{V}(\mathrm{X}) \geqslant 0$.

L'écart-type permet de quantifier les écarts par rapport à la moyenne. Un écart-type fort traduit un « grand éloignement » des valeurs de X par rapport à sa moyenne.
En reprenant les preuves dans le cas discret, on prouve les deux énoncés suivants.

PROPOSITION — **propriétés de la variance**

Soit X *une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.*

- $\mathbf{V}(X) = 0$ *si et seulement si* X *est une application presque sûrement constante.*
- *Pour tous réels* a, b,
$$\mathbf{V}(aX+b) = a^2\mathbf{V}(X) \qquad ; \qquad \sigma(aX+b) = |a|\sigma(X).$$

Vocabulaire. Soit X une variable aléatoire. Nous avons vue qu'une variable aléatoire X est dite **centrée** si $\mathbf{E}(X) = 0$. Elle est dite **réduite** si $\sigma(X) = 1$. La variable aléatoire $Y = \frac{X-\mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée, réduite.

En pratique, on calcule la variance avec :

THÉORÈME — **formule de KOENIG-HUYGENS**

Soit X *une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.*

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)^2.$$

Exercice 10

✦ Prouver cet énoncé. p. ??

5 Simulation avec Python

5.1 Rappels : les histogrammes

Un histogramme donne une idée graphique de la répartition des valeurs d'un **échantillon** $E = \{x_1, \dots, x_n\}$. Pour cela, on découpe l'ensemble des valeurs possibles en un certain nombre d'intervalles. Notons $p \in \mathbb{N}^*$ le nombre d'intervalles choisis. Ces intervalles doivent être deux à deux disjoints, et leur réunion est égale à (ou contient) l'ensemble des valeurs possibles. Plus précisément, en notant $a_1, a_2, \dots, a_{p+1} \in \mathbb{R}$, les bornes de tous ces intervalles avec $a_1 < a_2 < \dots < a_{p+1}$, on a

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{p} [a_i ; a_{i+1}[.$$

L'intervalle $[a_i ; a_{i+1}[$ est une **classe**. On peut ainsi définir l'**effectif** m_i d'une classe comme le nombre d'éléments de E appartenant à la classe puis sa fréquence f_i comme le rapport de l'effectif sur le nombre total d'éléments de E.

Ensuite, le graphique est obtenu en traçant, pour chaque $i \in [\![1, p]\!]$, le rectangle de base $[a_i, a_{i+1}]$ sur l'axe des abscisses, et

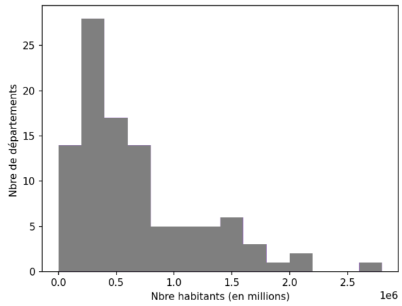
- d'aire égale à m_i (on parle d'histogramme en effectif) ;
- d'aire égale à f_i (on parle d'histogramme en fréquence).
  Dans ce cas, la somme des aires des rectangles est égale à 1.

- **Exemple 1. Répartitions du nombre d'habitants**

Le site de L'I.N.S.E.E (Institut national de la statistique et des études économiques) contient de très nombreuses statistiques en libre accès. On y trouve par exemple la liste du nombre d'habitants par département.

Editeur

```
# L désigne dans la suite la liste
# du nombre d'habitant par département
# Création d'un tableau avec les intervalles de
    longueurs 200 000 (habitants)
inter =np.linspace(0,2.8*10**6,15)
plt.hist(L, bins=inter)
plt.xlabel('Nbre habitants (en millions)')
plt.ylabel('Nbre de départements ')
plt.show()
```



Donnons un second exemple lié aux probabilités. Dans la suite, on construit l'échantillon à partir de plusieurs simulations d'une même variable aléatoire.

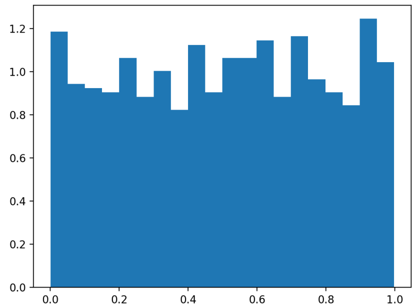
- **Exemple 1. Simulation d'une loi uniforme**

La fonction Python ci-dessous prend en argument un entier naturel m non nul et tire m réels uniformément dans $[0;1]$, puis affiche l'histogramme.

Editeur

```
L= np.random.rand(1000)


plt.hist(L, bins=20, density=True)
 # Création de l'histogramme
 # avec 20 classes
plt.show()
```



Expliquons les commandes :

- `density=True` : Trace l'histogramme en fréquence.
- `bins=...` : Si on met une valeur entière en argument, on définit le nombre de classes. Sinon, c'est une liste (ou un tableau) qui définit les différents intervalles des classes.
- `rwidth=...` : Largeur relative de la barre par rapport à l'intervalle (facultatif).

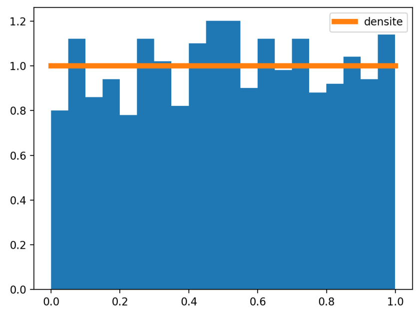
Dans ce dernier exemple, il est utile de rajouter la courbe représentative d'une densité. Plus l'échantillon est important, plus on a de chance que l'histogramme « se rapproche » de la courbe.

Editeur

```
plt.clf()
L= np.random.rand(1000)
classes =np.linspace(0,1,10)

plt.hist(L, bins=20, density=True)  # Création de
     l'histogramme


x=[0,1]
y=[1,1]
plt.plot(x,y,linewidth=5,label="densite")
plt.legend()
plt.show()
```



5.2 La méthode d'inversion : illustration avec la loi de Cauchy

L'idée repose sur l'énoncé suivant :

Si
- U suit la loi uniforme sur $]0;1[$.
- X est une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition F est une bijection de $]a;b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ sur $]0;1[$.

Alors La variable $Y = F^{-1}(U)$ suit la même loi que X.

Exercice 11

✦ ✎ Prouver l'énoncé précédent. p. 26

Exemple. On dit qu'une variable aléatoire X à densité suit une loi de Cauchy si une densité est donnée par

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\pi(1+t^2)}.$$

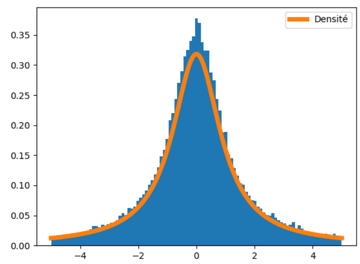
On a vu que la fonction de répartition est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{\arctan(x)}{\pi} + \dfrac{1}{2}$. La fonction F est strictement croissante, continue de $\mathbb{R}$ dans $]0;1[$. Le théorème de la bijection s'applique

$$\forall\, t \in]0;1[, \qquad F^{-1}(t) = \tan\big(\pi(t - 1/2)\big).$$

Ci-dessous, un histogramme d'un échantillon obtenu par simulation d'une loi de Cauchy par la méthode d'inversion.

Editeur

```
plt.clf()
U= np.random.rand(50000)
L=np.tan(np.pi*(U-1/2))
inter=np.linspace(-5,5,100)
plt.hist(L, bins=inter, density=True)  # Création de l'histogramme
x=np.linspace(-5,5,200)
y=1/(np.pi*(1+x**2))
plt.plot(x,y,linewidth=5,label="Densité")
plt.legend()
plt.show()
```



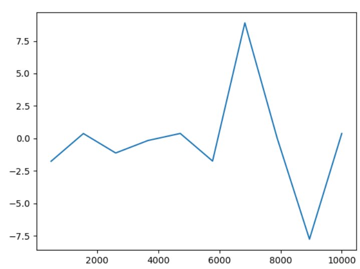
Exercice 12

✦✦ ✎ Expliquer l'intérêt du code suivant? Qu'illustre-t on sur la loi de Cauchy? p. 26

Editeur

```
Liste=100*np.linspace(5,100,10)
E=[]
for m in Liste :

    U= np.random.rand(int(m))
    L=np.tan(np.pi*(U-1/2))
    e=sum(L)/m
    E.append(e)
plt.plot(Liste,E)
plt.show()
```



5.3 La méthode par rejet

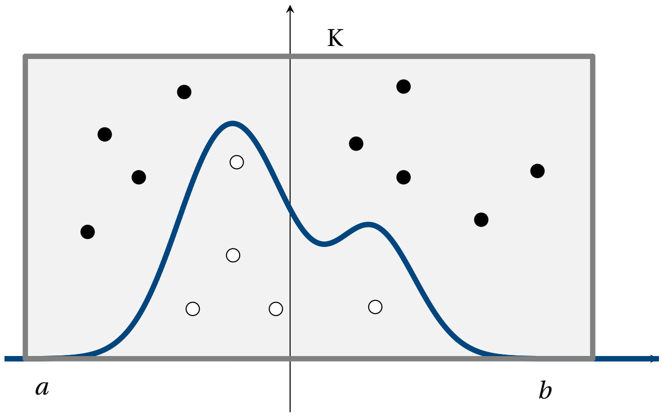
Soit X, une variable à densité et f, une densité. On suppose que f est bornée et à support borné. C'est-à-dire, qu'il existe $\mathrm{K} \in \mathbb{R}^+$, a, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{K} \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \text{ si } x \notin [a;b].$$

Rappelons que l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$, $x = b$ correspond exactement à la probabilité que la variable aléatoire prenne les valeurs comprises entre a et b.

$$\text{Aire} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{P}\Big([a \leqslant \mathrm{X} \leqslant b]\Big).$$

Ainsi, pour simuler la variable X, on peut tirer un point au hasard sous la courbe représentative de f de manière uniforme. On prend alors pour réalisation l'abscisse de ce point.
Précisons que pour tirer un point sous la courbe, on tire un point au hasard dans le rectangle $[a;b] \times [0;\mathrm{K}]$ à l'aide de deux lois uniformes. Si ce dernier est sous la courbe, on le garde. Sinon, on recommence.



Exercice 13

✦ Quelle est la loi du nombre d'essais avant de tirer un point qui est bien situé sous la courbe de f ?

p. 26

Exercice 14

✦ **Exemple : Simulation par la méthode de rejet**
Soit X une variable aléatoire dont une densité f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f. Quelles valeurs choisir pour a, b et K ?
2. a) Comment tirer un point au hasard dans le rectangle $[a;b] \times [0;\mathrm{K}]$ à l'aide de la commande **random** ?
   b) En déduire un programme Python qui simule la variable X.

p. 26

Exemples. Voir aussi l'exercice **??**, page **??** pour une généralisation de l'exemple précédent à toute loi Beta. Pour un exemple où le support de la densité n'est pas à support borné, on pourra voir l'exercice **??**, p.**??** avec une simulation des lois normales.

Exercices

Révisions : intégrales sur un segment

Exercice 15. ✦ **Sommes de Riemann**

Justifier que pour $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$
$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

≫ Solution p. 27

Exercice 16. ✦ ✎ **Lemme de Riemann-Lebesgue**

Soit $f : [0;\pi] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Justifier que
$$\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

≫ Solution p. 27

Exercice 17. ✦ **Variante des intégrales de Wallis avec la fonction tangente**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n \,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Vérifier que $\tan' = 1 + \tan^2$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+2} + u_n = \frac{1}{n+1}$.
3. En déduire une fonction Python qui prend en argument n et renvoie u_n.
4. Étudier les variations de la suite (u_n). En déduire la convergence de la suite (u_n) et calculer la limite.
5. Effectuer le changement de variable $x = \tan t$ dans l'intégrale définissant u_n, puis en déduire $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

≫ Solution p. 27

Révisions : intégrales généralisées

Exercice 18. ✦✦ *Intégrale à paramètre : voir ECRICOME 2009, exercice 2.*

Exercice 19. ✦ On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que J_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre J_n et J_{n+1}.
3. En déduire J_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

≫ Solution p. 28

Exercice 20. ✦ Soit f une fonction continue bornée sur $[0, +\infty[$.

1. Démontrer que les intégrales I et J sont convergentes où
$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
2. Vérifier que $\mathrm{I} = \mathrm{J}$.
3. *Application.* Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}\mathrm{d}x$.

≫ Solution p. 28

Exercice 21. ✦✦ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1. Donner un exemple où $f(t) \underset{t\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$. *Un graphe suffit...*

2. Vérifier que la conclusion $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ devient vraie si l'on suppose en plus que f de classe $\mathscr{C}^1$ avec $\int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t$ convergente.

≫ Solution p. 28

Exercice 22. ✦✦✦ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-1/t)\,\mathrm{d}t$ soient convergentes.

1. a) Effectuer le changement de variable $u = -1/t$ sur

$$\int_0^{+\infty} f(t-1/t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{0} f(t-1/t)\,\mathrm{d}t.$$

b) En déduire

$$2\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-1/t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{t^2}\right) f\left(t-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t.$$

c) À l'aide d'un nouveau changement de variable, établir l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t.$$

2. *Application.* Sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$, calculer $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2-1/t^2}\,\mathrm{d}t$.

≫ Solution p. 29

Exercice 23. ✦✦✦ Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$ non constant. Justifier que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \cos\big(\mathrm{P}(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

est convergente si et seulement si $\deg \mathrm{P} \geqslant 2$.

≫ Solution p. 30

Variable aléatoire à densité

Exercice 24. ✧ **Vrai ou faux ?**
Toute variance de variable aléatoire réelle à densité est strictement positive.

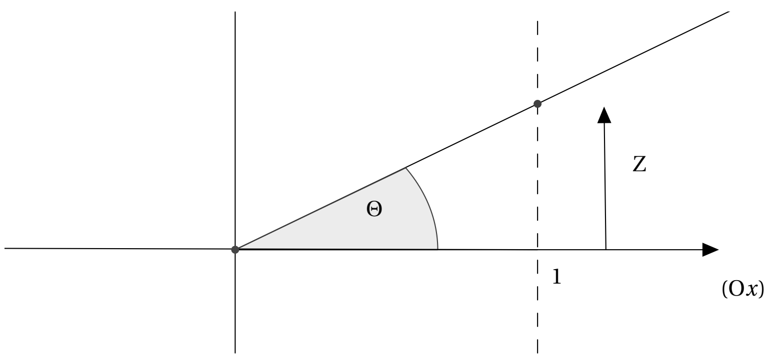
≫ Solution p. 30

Exercice 25. ✦ **Autour de la loi de Cauchy**

Une variable aléatoire à densité suit une loi de Cauchy si une densité est $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{\pi(1+t^2)}$.

1. *Préliminaires.*
   a) Simplifier $\arctan(t) + \arctan(1/t)$ lorsque $t \in \mathbb{R}^*$.
   b) Donner la fonction de répartition d'une loi de Cauchy.
2. Soit X une variable aléatoire à densité suivant une loi de Cauchy. On pose $\mathrm{Y} = 1/\mathrm{X}$.
   a) Calculer $\mathbf{P}\big([\mathrm{Y}<0]\big)$, puis, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $\mathbf{P}\big([0<\mathrm{Y}\leqslant x]\big)$.
   b) Montrer que Y suit encore une loi de Cauchy.
3. Un tireur envoie sa balle sur un demi-plan droit. On suppose que l'angle Θ entre la trajectoire et l'axe $(\mathrm{O}x)$ est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
   Justifier que la position Z de la balle sur la cible (d'axe $x=1$) suit une loi de Cauchy.

≫ Solution p. 30

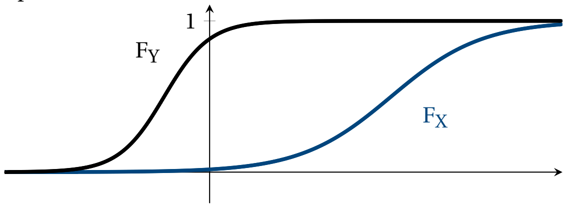


Exercice 26. ✦ Soit X une variable aléatoire à densité avec une densité de probabilité f paire.

1. Préciser $\mathbf{P}\big([X \geqslant 0]\big)$.
2. On note F la fonction de répartition de X. Justifier que $x \in \mathbb{R} \mapsto F(x) - \frac{1}{2}$ est impaire.
3. On suppose que $\int_0^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Démontrer que X admet une espérance et la calculer.

≫ Solution p. 31

Exercice 27. ✦✦ Soient X et Y deux variables à densité. On suppose que X et Y admettent une espérance et des densités strictement positives sur $\mathbb{R}$.



1. ✎ Soit F_X la fonction de répartition de X. Quelle est la loi de $F_X{}^{-1}(U)$ où $U \hookrightarrow \mathscr{U}([0;1])$?
2. La figure ci-contre est la représentation graphique des fonctions de répartition de X et Y. Quelle est la variable dont l'espérance est la plus grande ? Justifier.

≫ Solution p. 32

Exercice 28. ✦ **Nouvelle expression de l'espérance**
Soit X une v.a à densité. On note f une densité de X, et F sa fonction de répartition. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$ et que $f = 0$ sur $\mathbb{R}^-$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,
$$\int_0^x \big(1 - F(t)\big)\,\mathrm{d}t = x\big(1 - F(x)\big) + \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (\bullet)$$
2. On suppose dans cette question que X possède une espérance.
   a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leqslant x \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$.
   b) En déduire que $x\big(1 - F(x)\big) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
   c) À l'aide de la relation $(\bullet)$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \big(1 - F(t)\big)\,\mathrm{d}t$ converge, et que $\int_0^{+\infty} \big(1 - F(t)\big)\,\mathrm{d}t = \mathbf{E}(X)$.
3. On étudie la réciproque.
   On suppose dans cette question que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \big(1 - F(t)\big)\,\mathrm{d}t$ converge.
   a) Montrer que l'application $\varphi : x \to \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   b) Montrer en utilisant $(\bullet)$ que φ est majorée.
   c) En déduire que $\mathbf{E}(X)$ existe et que
$$\mathbf{E}(X) = \int_0^{+\infty} \big(1 - F(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$
4. Adapter le raisonnement pour montrer que si X admet un moment d'ordre 2, alors
$$\mathbf{E}(X^2) = 2\int_0^{+\infty} t\big(1 - F(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

≫ Solution p. 32

Exercice 29. ✦✦✦ *Oraux, sans préparation, HEC 2008*
Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Montrer que la fonction g définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = F(x+1) - F(x)$$
est une densité de probabilité.

≫ Solution p. 33

Exercice 30. ✦ Soit X une variable aléatoire admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}$ et un moment d'ordre 2. Caractériser la valeur du réel a qui minimise l'expression
$$\varphi(a) = \mathbf{E}\Big((X - a)^2\Big) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-a)^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

≫ Solution p. 34

Exercice 31. ✦✦✦ *d'après HEC 2016*

≫ Solution p. 34

1. a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$.

   b) Soit V une variable aléatoire telle que $V(\Omega) = [0,\pi/2[$ suivant la loi uniforme sur $[0,\pi/2[$ (une densité est donnée par $\frac{2}{\pi}\mathbf{1}_{[0,\pi/2[}$). On pose : $X = \tan^2(V)$. Montrer que X est une variable aléatoire à densité.

   c) En déduire que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{x}(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

2. a) Compléter le code python de la fonction `simulX` suivante de sorte que son application à l'entier N ($N \geqslant 2$) fournisse une matrice ligne contenant N simulations indépendantes de la variable aléatoire X.

Editeur

```
import numpy.random as rd
import numpy as np
def simulX( ... ):
    u=rd.rand(N)
    x=np.ones(N)
    for i  ...
        x[i]= ...
    return  ...
```

   b) Après avoir affecté une valeur entière supérieure ou égale à 2 à la variable N, on exécute les commandes suivantes. Trouver la loi d'une variable aléatoire dont la valeur de `c` est, en fin de boucle, une simulation.

Editeur

```
N=100
c=0
x=simulX(N)
for i in range(N):
    if x[i]>1 :
        c=c+1
```

Exercice 32. ✦✦ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-|x|}}{2}.$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
   On note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ dont f est une densité de probabilité.
2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'existence du moment d'ordre m de la variable X. Donner la valeur de l'espérance de X.
3. Pour tout entier n non nul et tout réel x, on pose :
$$\mathrm{H}_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\left(1 + t\mathrm{e}^{-n|t|}\right)\mathrm{d}t.$$
   Montrer que H_n est une fonction de répartition.
4. Soit X_n une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, dont H_n est la fonction de répartition. Vérifier que pour tout réel x
$$\mathrm{H}_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{F}(x)$$
   où F est la fonction de répartition de X.

≫ Solution p. 35

Exercice 33. ✦✦ Soient $\mathrm{Z} \hookrightarrow \mathscr{U}\big([0;1]\big)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Y}_n \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![1;n]\!]\big)$. Comparer

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(\arctan\left(\frac{\mathrm{Y}_n}{n}\right)\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}\big(\arctan(\mathrm{Z})\big).$$

≫ Solution p. 35

Exercice 34. ✦ **Un exemple détaillé**

1. On pose pour tout $t \in]-1;1[$, $g(t) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)$.
   - **a)** Justifier que g est une bijection de $]-1;1[$ dans $\mathbb{R}$.
   - **b)** Donner une expression simple de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Justifier que g^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ et donner $g^{-1\prime}$.
   - **c)** Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}([-1;1])$. On définit la variable $T = g(X)$.
     - i) Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_T(x) = F_X\left(g^{-1}(x)\right)$.
     - ii) En déduire que T est une variable aléatoire à densité. *On précisera une densité.*
2. **a)** Justifier que $U = |X|$ est une variable à densité et donner une densité.
   - **b)** Faire de même avec $V = X^2$.

≫ Solution p. 35

Exercice 35. ✦✦ On considère l'application f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \frac{e^{-t}}{(e^{-t}+1)^2}.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire réelle qui admet f comme densité. Déterminer F, la fonction de répartition de X.
3. Soit φ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et $Y = \varphi(X)$.
   - **a)** Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$ et déterminer sa bijection réciproque.
   - **b)** Déterminer la loi de Y.

≫ Solution p. 36

Exercice 36. ✦✦✦ **Médiane(s) d'une variable aléatoire.**
Soit X une variable aléatoire à densité sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et admettant une espérance.

1. Justifier qu'il existe un réel m tel que $\qquad \mathbf{P}\left([X \leqslant m]\right) = \dfrac{1}{2}$.
   Un tel réel est une médiane de X. *Notons dans la suite,* $\mathscr{M}(X)$, *l'ensemble des médianes de la variable* X.
2. Déterminer la ou les médianes d'une variable aléatoire X de loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$. Est-ce que l'espérance de X est une médiane ?
3. Dans la suite, on souhaite déterminer les réels a qui minimisent la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(a) = \mathbf{E}\Big(\big|X - a\big|\Big) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t-a| f(t)\,dt.$$
   - **a)** Justifier que φ est une fonction convexe.
   - **b)** On définit la fonction G sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} t f(t)\,dt$. Justifier que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée.
   - **c)** En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer φ' à l'aide de la fonction de répartition F de X.
   - **d)** Conclure sur les réels qui minimisent φ.
4. Démontrer que l'ensemble des médianes d'une variable à densité X est un segment.
   Une partie I *de* $\mathbb{R}$ *est un intervalle si pour tous* x, $y \in$ I, *le segment* $[x;y] \subset$ I.

≫ Solution p. 37

Exercice 37. ✦✦ On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions f et g par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \sin\left(2\pi\ln(x)\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\ln(x)^2/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide du changement de variable $u = \ln(t) - n$, justifier la convergence et l'égalité
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) g(t)\,dt = 0.$$
2. Soit $Y \hookrightarrow \mathscr{N}(0;1)$. Vérifier que $X = e^Y$ est une variable aléatoire à densité dont g est une densité.
3. Pour tout réel $\lambda \in]-1;1[$, on définit la fonction $h_\lambda = (1+\lambda f)\cdot g$. Vérifier que h_λ est une densité de probabilité.
4. **a)** Justifier que X admet des moments à tout ordre.
   - **b)** Soit Y_λ une variable aléatoire dont une densité est donnée par h_λ. Démontrer que Y_λ admet des moments à tout ordre et :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbf{E}\left({Y_\lambda}^n\right) = \mathbf{E}\left(X^n\right).$$

≫ Solution p. 38